Problems on the theory of minimal models

極少モデル理論についての問題

京都大学大学院理学研究科数学教室
藤野 修*
Osamu Fujino
Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Kyoto University

令和 3 年 12 月 24 日

概 要

We discuss some problems on the theory of minimal models.
極少モデル理論についてのいくつかの問題を論じる。

目 次

* 〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町, e-mail: fujino@math.kyoto-u.ac.jp

1　はじめに

この報告書では未解決問題を説明するのが目標であるが、有名な未解決問題は当然のことながらかなり難しく、論文の手頃なネタを探している人にはあまり役に立たないような気がする。簡単そうな問題を捻り出して説明しようとすると、自分自身で解いてしまって未解決でなくなってしまう。このような感じでちょうどいい塩梅の未解決問題を見つけるのは大変難しい。みなさんのご期待に十分こたえられたとは思わないが、この報告書が少しでも問題を見つけるのに役立てば幸いである。残念ながら、この報告書はだらだらと思いついたことを述べただけで記述は全く洗練されていないと思う。

以下、何も断らなければ複素数体上で考えることにする。

2　古典的極少モデル理論の問題

極小モデル理論の最近の発展は凄まじく、もう若くない私には最先端を追いかけることは無理である。ここでは古典的な極小モデル理論の問題を扱いたい。大きな問題を 3 つ説明することを目標にする。非専門家のために 2.4 節に特異点の最低限の定義を書いておいた。

2.1　フリップの停止問題

一つ目の問題はフリップの停止問題である。この問題は極小モデル理論が始まったかなり初期の頃からの有名な未解決問題であり、完全解決にはまだまだ遠いような印象を受ける。

X を非特異射影多様体とする。このとき、極小モデルプログラムを走らせることができる。つまり、

$$X =: X_0 \overset{\varphi_0}{\dashrightarrow} X_1 \overset{\varphi_1}{\dashrightarrow} X_2 \dashrightarrow \cdots \overset{\varphi_{k-1}}{\dashrightarrow} X_k \overset{\varphi_k}{\dashrightarrow} \cdots$$

なる X から始まる双有理写像の列が構成できる。ただし、各 φ_k はフリップか因子収縮射である。もう少し詳しく説明しよう。 X の標準因子 K_X と負で交わる曲線 C が存在したとする。すると、錐定理と収縮定理を使うことにより、因子収縮射かフリッピング収縮射を作ることができる。フリッピング収縮射の場合はフリップを X_1 とおく。因子収縮射の場合は潰した先を X_1 とおく。この操作を繰り返すのである。この繰り返しのことを「極小モデルプログラムを走らせる」ということにする。

問題 1** 上の極小モデルプログラムは常に停止することを示せ。つまり、フリップの無限列が存在しないことを示せ。

ピカール数を考えることにより、因子収縮射が有限回しか起こり得ないことは簡単に示せる。したがって、我々はフリップの無限列が存在しないことを示したいのである。この問題が解決すれば、与えられた X に極小モデルプログラムを走らせると、高々有限回のフリップと因子収縮射ののち、最終的に森ファイバー空間か極小モデルに到達して停止することがわかる。これは素朴な意味での極小モデル理論の完成を意味する。少し弱い形であるが、以下の定式化も面白い。

問題 2** フリップの無限列が存在しないように極小モデルプログラムを走らせることが可能であることを示せ。

この問題では任意の極小モデルプログラムの停止を目指すのではなく、フリップの無限列が生じないように極小モデルプログラムを走らせることが可能か？と問うているのである。極小モデル理論の文献を見ると、フリップの停止問題は対数的フリップについて定式化されていると思う。個人的な感覚だが、フリップの停止問題は特異点が悪くなればなるほど扱いが困難になるような気がする。したがって、ここでは一番素朴で簡単と思しき非特異射影多様体から始まる極小モデルプログラムの停止問題に制限して述べてみた。

定理 2.1 (Lazić–Tsakanikas, [LT]) 非特異射影多様体についての極小モデルの存在問題が解決すれば、対数的標準対についての極小モデルの存在問題が完全解決する。

最近得られた上の定理により、非特異射影多様体の極小モデルの存在問題が解決すれば、対数的標準対と呼ばれる一番一般的な対象についての極小モデルの存在問題が解決することがわかっている。この定理があるので、フリップの停止問題を非特異射影多様体から始まる極小モデルプログラムだけに限定しても価値があるのである。ちなみに [LT] は NQC weak Zariski decomposition なるザリスキ分解の高次元化の一つを用いて極小モデルの存在問題を論じている。

2.2 非消滅予想

次に非消滅予想について説明する。まず擬有効因子について思い出しておこう。擬有効因子の定義は色々な言い換えが可能であるが、ここでは以下の定義を採用することにする。

定義 2.2 非特異射影多様体 X の上のカルティエ因子 L が擬有効であるとは、任意の豊富 $\mathbb{Q}$-因子 H に対し、$L+H$ が巨大になることとする。

複素幾何学的には以下の特徴付けがわかりやすいかもしれない。

補題 2.3 カルティエ因子 L が擬有効であることと、直線束 $\mathcal{O}_X(L)$ 上に曲率カレント $\sqrt{-1}\Theta_h(L)$ が正になる特異エルミート計量 h が存在することは同値である。

次の定理を述べるために一つ定義を用意する。

定義 2.4 n 次元非特異射影多様体 X が単線織とは、$n-1$ 次元非特異射影多様体 Y が存在して $Y \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$ なる支配的な有理写像が存在することとする。

以下の定理は単線織の特徴付けを与えている。

定理 2.5 (Boucksom–Demailly–Păun–Peternell, [BDPP]) X は非特異射影多様体とする。このとき、標準因子 K_X が擬有効でないことと X が単線織であることは同値である。

準備が整ったので非消滅予想について述べる。

問題 3 (Nonvanishing Conjecture) *** X を非特異射影多様体とする。標準因子 K_X は擬有効であると仮定する。このとき、$\kappa(X, K_X) \geq 0$ を証明せよ。つまり、ある正の整数 m が存在し、$H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X)) \neq 0$ となることを示せ。

この予想の重要さは橋詰の結果より明らかである。

定理 2.6 (橋詰健太, [H]) 非消滅予想が正しければ、対数的標準対についての極小モデルの存在問題が完全解決する。

問題 3 は極小モデル理論とは無関係の形をしている。非特異射影多様体上の非線形偏微分方程式を用いた手法など、現在の極小モデル理論の標準的な手法以外でのアプローチに期待したい。

2.3 対数的標準環の有限生成性

X を非特異射影多様体とし、X 上の $\mathbb{Q}$-因子 $\Delta = \sum_i a_i \Delta_i$ を考える。ただし、Δ_i は相異なる非特異な素因子で、$\sum_i \Delta_i$ は単純正規交叉因子になっていると仮定する。さらに、全ての i に対して $0 \leq a_i \leq 1$ が成立しているとする。このような状況で対数的標準環

$$R(X, \Delta) = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(\lfloor m(K_X + \Delta) \rfloor))$$

を考える。

問題 4 *** $R(X, \Delta)$ が有限生成 $\mathbb{C}$-代数であることを証明せよ。

有名な結果としては以下のものがある。

定理 2.7 (Birkar–Cascini–Hacon–M$^{\mathrm{c}}$Kernan, [BCHM]) 全ての i に対して $0 \leq a_i < 1$ が成立するならば、$R(X, \Delta)$ は有限生成 $\mathbb{C}$-代数である。

問題 4 の特殊な場合を考えることも価値がある。

問題 5 *** $a_i = 1$ となる i はただ一つだけとし、さらに $K_X + \Delta$ が巨大であると仮定する。このとき、$R(X, \Delta)$ が有限生成 $\mathbb{C}$-代数であることを示せ。

問題 5 は予想以上に難しい問題であることが以下の定理からしたがう。

定理 2.8 (藤野–權業, [FG]) 問題 5 が $n+1$ 次元で解決したら、n 次元以下で対数的標準対についての極小モデルの存在問題とアバンダンス予想が解決する。

ここでアバンダンス予想について思い出しておこう。アバンダンス予想は極小モデル理論関連の有名な予想の中で最も難しいものの一つと考えられている。

問題 6 (アバンダンス予想) *** (X, Δ) を射影的な対数的標準対とし、$K_X + \Delta$ は数値的非負とする。このとき、$K_X + \Delta$ は半豊富である。

アバンダンス予想が完全に解決しているのは 2 次元と 3 次元だけである。1 次元の場合は自明である。地味だが次の問題は今後の発展を考えるとかなり重要だと思う。

問題 7 * 2 次元、3 次元でアバンダンス定理の別証明（分類結果などを使わない証明）を見つけよ。

個人的には、現在知られている 2 次元の場合のアバンダンスの証明もかなり難しいと思う。色々な場合に分けて議論する必要があるし、低次元の特殊事情をかなり使っている印象がある。見通しのよい別証明を考えることは価値があると思う。

定理 2.8 について少し補足しておきたい。すでに述べたように、問題 5 は問題 4 の特別な場合である。したがって、$n+1$ 次元で問題 4 が完全に解決すると、問題 5 も $n+1$ 次元で解決したことになる。次に $n+1$ 次元で問題 5 が解決したと仮定してみよう。すると問題 3 が n 次元で成立することが示せる。定理 2.6 を援用すると、n 次元での対数的標準対についての極小モデルの存在問題が解決する。また、幾何学的に錐を考えるというよく知られたテクニックを使うと、n 次元のアバンダンスが完全に成立することもわかる。つまり、問題 6 が n 次元で完全解決する。最後に n 次元で極小モデルの存在問題とアバンダンス予想が完全に成立したと仮定する。このときは極小モデル理論の標準的な議論で問題 4 を $n+1$ 次元で解決できる。したがって、問題 4 と問題 5 は実は同じで、これらは低次元の極小モデルの存在問題とアバンダンス予想の解決と同値であることがわかる。詳しくは [FG] を参照してほしい。

2.4 特異点の定義の復習

非専門家が極小モデル理論を学ぶ際の最大の障壁の一つがそのややこしい特異点の定義であろう。ここで最低限の定義について述べておきたい。詳しくは [F3] や [KM] などを参照してほしい。

X を正規な代数多様体とし、Δ を X 上の有効 $\mathbb{Q}$-因子とする。K_X で X の標準因子を表すことにする。ここで、$K_X + \Delta$ は $\mathbb{Q}$-カルティエと仮定する。つまり、ある正の整数 m が存在し、$m(K_X+\Delta)$ がカルティエ因子になると仮定する。次に X の特異点解消 $f\colon Y \to X$ を考える。$K_X + \Delta$ は $\mathbb{Q}$-カルティエなので、f での引き戻しを考えることができる。引き戻しを以下のように書くことにする。

$$K_Y + \Delta_Y = f^*(K_X + \Delta)$$

ただし、K_Y は Y の標準因子で、$f_*K_Y = K_X$ となるように選んでおく。もちろん、Δ_Y の定義から $f_*\Delta_Y = \Delta$ が成立している。特異点解消定理を使ってうまく $f\colon Y \to X$ を選ぶと、Δ_Y の台は単純正規交叉因子と仮定することができる。Δ_Y の係数が全て 1 未満の時、(X, Δ) は川又対数的端末対という。Δ_Y の係数が全て 1 以下の時、(X, Δ) は対数的標準対という。素朴な意味での極小モデル理論が機能するのは対数的標準対までであると考えられている。また、川又対数的端末対についての極小モデル理論はかなりの部分が [BCHM] で確立されている。

例 2.9 X を非特異射影多様体とし、$\Delta = \sum_i a_i \Delta_i$ は X 上の $\mathbb{Q}$-因子とする。ただし、Δ_i は相異なる非特異な素因子で、$\sum_i \Delta_i$ は単純正規交叉因子になっていると仮定する。このとき、(X, Δ) が対数的標準対であることは、全ての i に対して $0 \leq a_i \leq 1$ が成立することと同値である。また、(X, Δ) が川又対数的端末対であることは、全ての i に対して $0 \leq a_i < 1$ が成立することと同値である。

3 ケーラー多様体について

複素幾何の諸問題なるイベントでの講演の報告書なので、ケーラー多様体についても少し考えたい。

X をコンパクトケーラー多様体とし、先程と同様に X 上の $\mathbb{Q}$-因子 $\Delta = \sum_i a_i \Delta_i$ を考える。ただし、Δ_i は相異なる非特異な素因子で、$\sum_i \Delta_i$ は単純正規交叉因子になっていると仮定する。さらに、全ての i に対して $0 \leq a_i \leq 1$ が成立しているとする。一般の複素多様体を扱う場合は標準因子ではなく標準束を扱うべきだが、そこは記号の乱用をすることにして、対数的標準環

$$R(X, \Delta) = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(\lfloor m(K_X + \Delta) \rfloor))$$

を考える。非特異射影多様体の時と全く同様に以下の問題が考えられる。

問題 8***　対数的標準環 $R(X, \Delta)$ が有限生成 $\mathbb{C}$-代数であることを証明せよ。

これは非常に大雑把な予想であり、非特異射影多様体について成り立つことはコンパクトケーラー多様体でも同様に成り立つだろうという程度の根拠しかなかったと思う。一般のコンパクト複素多様体に対しては有限生成性が成り立たないことは以前から知られていた。

定理 3.1 (P. M. H. Wilson, [W]) X がケーラーでないコンパクト複素多様体なら、たとえ $\Delta = 0$ であっても、$R(X, \Delta)$ が有限生成 $\mathbb{C}$-代数とならない例が存在する。つまり標準環

$$R(X) = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$$

が $\mathbb{C}$-代数として有限生成とならないコンパクト複素多様体が存在する。

コンパクトケーラー多様体には極小モデル理論のような枠組みはなかったので、$R(X, \Delta)$ の有限生成性を支持する根拠は多くなかったのだが、以下の定理が証明されている。定理 2.7 のコンパクトケーラー多様体版である。

定理 3.2 (藤野, [F2]) 全ての i に対して $0 \leq a_i < 1$ が成立するならば、$R(X, \Delta)$ は有限生成 $\mathbb{C}$-代数である。

ここからは X は一般のコンパクト複素多様体とする。ケーラー性は仮定しない。以下の問題はおそらく解決可能と思う。

問題 9 X を一般のコンパクト複素多様体とし、X の代数次元 $a(X)$ は $\dim X - 1$ 以上とする。このとき、全ての i に対して $0 \leq a_i < 1$ が成立するならば、$R(X, \Delta)$ は有限生成 $\mathbb{C}$-代数であることを示せ。

$a(X) = \dim X$ の場合は X を双有理型同型なモデルで取り替えて X は非特異射影多様体としてよい。したがって、問題となるのは $a(X) = \dim X - 1$ の場合だけである。この場合は X の代数的還元写像をとると、X から非特異射影多様体 Y へ射が存在するとしてよい。$X \to Y$ の一般ファイバーは楕円曲線であることがわかるので、頑張れば上の問題は解決できるはずである。もう一つ同様の問題を考えよう。おそらくこれも解決可能だと思う。

問題 10 X を 3 次元コンパクト複素多様体とする。このとき、$R(X, \Delta)$ が有限生成 $\mathbb{C}$-代数であることを証明せよ。

[M1] では任意の 3 次元コンパクト複素多様体に対して標準環 $R(X)$ が有限生成 $\mathbb{C}$-代数であることが証明されている。その証明を参考にすれば $R(X, \Delta)$ の有限生成性も証明できると思う。詳しくは興味を持った読者に任せたいと思う。

4 完備だが非射影的な曲面について

ここで話題をかえよう。[F4] を書いていたときの素朴な疑問を説明したい。先ずは完備だが非射影的な代数曲面について色々と考えてみたい。簡単のため、この章では基礎体は複素数体 $\mathbb{C}$ とし、$\mathbb{Q}$-因子だけを扱うことにする。以下の有名な事実を思い出しておく。

定理 4.1 非特異完備な代数曲面は射影的である。

上の定理は非常に有名な結果である。これに関するよく知られた結果をいくつか述べておく。

定理 4.2 (永田, [N]) 完備だが射影的でない代数曲面が存在する。

永田の論文はスキーム論以前の言葉で記述されており、若い世代には解読は困難なように思われる。私自身も構成方法の細部までは理解していない。

定理 4.3 (広中) 非特異完備な 3 次元代数多様体で、非射影的なものが存在する。

広中の例はとても有名であり、具体的な記述も簡単である。ハーツホーンの教科書やシャファレビッチの教科書などでも取り上げられている。定理 4.1 のちょっとした一般化として以下の定理が証明できる。

定理 4.4 $\mathbb{Q}$-分解的な完備な曲面は射影的である。とくに有理特異点しか持たない完備な曲面は常に射影的である。

上の結果から、川又対数的端末特異点しか持たない完備な曲面は射影的であることがわかる。川又対数的端末特異点は有理特異点であることが知られており、そのような特異点しか持たない曲面は $\mathbb{Q}$-分解的であることが示せるからである。それでは、対数的標準特異点を持つ完備で非射影的な曲面は存在するのか？という素朴な疑問が生じる。

定理 4.5 (Kollár、藤田健人, [F4]) 完備で非射影的な対数的標準曲面 X で、飯高–小平次元 $\kappa(X, K_X) = 0$ なるものが存在する。

Kollár と藤田の例では $\kappa = 0$ であったが、$\kappa = -\infty$ の場合は以下の結果が知られている。

定理 4.6 (藤野, [F4]) (X, Δ) を完備な対数的標準曲面で $\kappa(X, K_X + \Delta) = -\infty$ であるとする。このとき、X は常に射影的である。

この定理は $\kappa = -\infty$ になる完備で非射影的な対数的標準曲面はないと主張しているのである。これは藤木のクラス $\mathcal{C}$ 曲面に対する極小モデル理論を論ずる際にキーとなった結果である。自然な流れとして以下の問題が考えられる。

問題 11 完備で非射影的な対数的標準曲面 (X, Δ) で、$\kappa(X, K_X + \Delta) = 1$ なるものを構成せよ。あるいは、そのようなものは存在しないことを示せ。

$\kappa = 2$ なる完備な対数的標準曲面は射影的になりそうな気がするのだが、今のところ証明はできていない。問題としては以下の通りである。

問題 12 完備な対数的標準曲面 (X, Δ) が $\kappa(X, K_X + \Delta) = 2$ を満たすとき、X は射影的であることを示せ。あるいは、射影的にならない例を構成せよ。

定理 4.4 によると、非射影的で完備な対数的標準曲面を構成するためには $\mathbb{Q}$-分解的でない曲面を探す必要がある。

問題 13 $\mathbb{Q}$-分解的でない完備な対数的標準曲面の具体例をいろいろ構成せよ。

問題 14* $\mathbb{Q}$-分解的でない完備な対数的標準曲面 (X, Δ) で X の極小特異点解消 $f\colon Y \to X$ の例外曲線が全て有理曲線であるものが構成できるか？

少なくとも現在知られている $\mathbb{Q}$-分解的でない完備な対数的標準曲面は、楕円曲線を点につぶすことによって構成されたものばかりだと思う。

注意 4.7 永田の非射影的な完備な曲面の構成では明らかではないが、藤田の構成方法をよく観察すると、$\overline{\mathbb{F}_p}$ 以外の任意の代数閉体上で非射影的な完備な曲面を構成することができる。$\overline{\mathbb{F}_p}$ 上定義された完備な曲面が常に射影的であることは Artin によって証明されている。現代流に見ると、$\overline{\mathbb{F}_p}$ 上の曲面は常に $\mathbb{Q}$-分解的になるので、定理 4.4 によって完備なら射影的になるのである。

注意 4.8 完備だが非射影的な代数多様体の例をたくさん構成する手っ取り早い方法の一つは、トーリック多様体論を使うことである。実際、クライマンの判定法が適用できない完備だが非射影的な代数多様体、クライマン–森コーンが全空間になる非特異完備な多様体などは、トーリック多様体論を使えば簡単に構成できる。また、トーリック幾何学では様々な事柄が組み合わせ論的な話に翻訳できるので、任意の基礎体上で例を構成できる。

ここでもう一度標準環の話に戻ろう。次の定理はよく知られた結果である。頑張れば証明できるレベルの話である。難しい極小モデル理論などは不要である。

定理 4.9 X を正規で射影的なゴレンシュタイン曲面とする。このとき、標準環

$$R(X) = \bigoplus_{m\geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$$

は有限生成 $\mathbb{C}$-代数である。

似たような結果としては以下の定理がある。

定理 4.10 X を $\mathbb{Q}$-分解的な射影曲面とする。このとき、標準環 $R(X)$ は有限生成 $\mathbb{C}$-代数である。

この定理の証明はそれほど明らかではない。対数的曲面についての極小モデル理論を使って証明された比較的新しい結果である。詳しくは [F1] を参照していただきたい。これらの結果を眺めると、以下の問題が思いつく。

問題 15* X を正規で射影的な $\mathbb{Q}$-ゴレンシュタインな曲面とする。このとき標準環 $R(X)$ が有限生成 $\mathbb{C}$-代数であることを示すか、有限生成 $\mathbb{C}$-代数にならない例を構成せよ。

この問題は以前かなり真剣に考えたのだが、少なくとも当時の私には有限生成性を証明することも反例を見つけることもできなかった記憶がある。

ここでは主に複素数体上で考えたが、曲面の一般論は一般の体上で確立されているので、上で述べた様々な話題を一般の体上で考えることも面白いであろう。興味のある読者は色々と考えて欲しいと思う。

5 数値的非負性について

最近研究していて引っかかった問題を取り上げてみたい。内容的には古い話である。

問題 16*$f\colon X \to Y$ を複素数体上定義された代数多様体の間の射影射とする。D を X 上のカルティエ因子とする。このとき

$$\mathfrak{N} := \{y \in Y \mid D|_{X_y} \text{ は数値的非負}\}$$

が Y のザリスキ開集合にならない例を構成せよ。

上の問題の設定で

$$\mathfrak{A} := \{y \in Y \mid D|_{X_y} \text{ は豊富 }\}$$

なる Y の部分集合が Y のザリスキ開集合であることはよく知られている。また、Y の基礎体の標数が正のときは $\mathfrak{N}$ がザリスキ開集合にならない具体例が知られている。[M2] では、曲線上の階数 2 の半安定ベクトル束のフロベニウス射での引き戻しを使って $\mathfrak{N}$ がザリスキ開集合にならない例を構成している。比較的最近の結果で、D が $\mathbb{R}$-カルティエ因子の場合に $\mathfrak{N}$ がザリスキ開集合にならない具体例が構成された。詳しくは [Le] を見て欲しい。ただ、D がカルティエ因子の場合は $\mathfrak{N}$ がザリスキ開集合にならない具体例は構成されていないように思われる。

この章の最初に述べた最近研究していて引っかかった問題というのは以下の通りである。細かい定義は省略するが、必要な定義を各自補うことは難しくないと思う。

問題 17** $f\colon X \to Y$ を正規解析空間の間の射影射でファイバーは連結とする。(X, Δ) は対数的標準対とする。このとき、$(K_X + \Delta)|_{X_{y_0}}$ が数値的非負なら y_0 の開近傍 U が存在し、任意の $y \in U$ に対して $(K_X + \Delta)|_{X_y}$ が数値的非負となることを証明せよ。

この問題は複素解析空間の間の射影射に極小モデル理論の一般化が確立できるのなら絶対に正しいはずである。また、複素解析空間の間の射影射に極小モデル理論の一般化を展開しようとすると絶対に避けることのできない問題のようにも思える。

6 極小モデル理論の解析化

この章ではかなりマニアックな話をしたいと思う。川又対数的端末対はホッジ理論的に見れば純ホッジ構造を持つ場合に対応する。ざっくりと書くと以下の通りである。

$$\boxed{\text{川又対数的端末対}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{純ホッジ構造}} \tag{1}$$

この対応を念頭において色々と考えると、右側の純ホッジ構造の部分を混合ホッジ構造に一般化するとどうなるか？という自然な疑問が生じる。この考えを押し進めると quasi-log schemes の理論に到達する。

$$\boxed{\text{quasi-log schemes}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{混合ホッジ構造}} \tag{2}$$

上の述べ方は少し不正確だが、大体上の対応が成り立っていると考えてもらってよいと思う。quasi-log schemes の理論は [A] によって導入された。そこでは極小モデル理論の混合化という扱いではなかったし、ホッジ理論的な取り扱いには問題があったのだが、色々と考え直すと極小モデル理論の混合化を目指していたと見做せる。quasi-log schemes の理論を使うことにより、極小モデル理論の基本的な枠組みは、対数的標準対や半対数的標準対について一般化されている。quasi-log scehemes の理論については、[F3, Chapter 6] や [F5] を見ていただきたい。一方、よく知られているように、解析的な観点からは以下の対応が成り立っている。

$$\boxed{\text{川又対数的端末対}} \Longleftrightarrow \boxed{L^2 \text{ 条件}} \tag{3}$$

この対応を元に色々と考えを巡らせると、[BCHM] で展開されたような川又対数的端末対についての極小モデル理論は解析的な設定でも成り立つべきだという考えに到達する。これは [F6] で実現されていると思う。複素解析空間の間の射影射に対して然るべき条件のもとで極小モデル理論を論ずることに成功しているはずである。ここでいくつかの問題が生じる。(1) の対応は、純ホッジ構造の理論の一般化にあたる混合ホッジ構造の理論が存在したので、(2) のように一般化することが可能であった。ところが、(3) の対応の右辺の L^2 条件の一般化にあたるものがはっきりとしない。したがって、(3) の一般化にあたる対応がなんなのかさっぱりわからないのである。

問題 18 *** 上の (3) の対応を一般化する対応を見つけよ。

この問題の答えがよくわからないので研究が行き詰まっているのである。上の問題がスッキリと理解できるようになると、次の問題の答えも自然に見つかるかもしれない。

問題 19 *** quasi-log schemes の理論の解析化を実現せよ。つまり、複素解析空間の間の射影射に対して quasi-log schemes の理論を展開せよ。

quasi-log schemes の理論は混合ホッジ構造の理論に大きく依存しており、代数多様体に対する理論である。複素解析空間の間の射影射に対しても混合ホッジ構造の話を展開するのか、全く異なる方法で理論を展開する必要があるのか、いまいちよくわからない状態である。上の問題は欲張りすぎていると考えるなら、次の問題を考えるべきであろう。

問題 20 *** 対数的標準対でも利用可能な解析的手法を確立せよ。

通常レベルの極小モデル理論を目指すなら、扱う対象は対数的標準対で十分であろう。quasi-log schemes なる大掛かりな一般論を展開する必要はないと思われる。対数的標準対は L^2 条件を満たさないが、L^2 条件を満たす対象物の極限（あるいは、L^2 条件が壊れるギリギリの対象物）と見做せるので、従来の L^2 理論の少しの拡張で対数的標準対の解析的取り扱いが可能かもしれない。いずれにせよ、この章で述べた話に関してはほとんど手付かずと言ってよいと思う。

6.1 (解析的 BCHM について) [F6] の結果について少しだけ言及しておく。$\pi\colon X \to Y$ を複素解析空間の間の射影射とする。W を Y のスタインコンパクト部分集合で $\Gamma(W, \mathcal{O}_Y)$ がネーター環になるものとする。さらに (X, Δ) を川又対数的端末対とする。このとき、W の近傍の上で (X, Δ) に相対的スケール付き極小モデルプログラムを走らせることができる。さらに、Δ が π-巨大なら、スケール付き極小モデルプログラムは必ず停止する。もう少し詳しくいうと、[BCHM] で証明された定理 A、B、C、D、E、F が然るべき修正を施せば複素解析空間の間の射影射についても証明できる。

7 おわびなど

今回の報告書はなんとなく不満の残るものになってしまった。個人的には日本語で講演の報告書を書くことは好きなのだが、今回は全く筆が進まなかった。また、私は [F6] のよ

うに準備中のものについて言及することは嫌いなのであるが、[F6] の完成も予定より遅れてしまい、このような形になってしまった。準備中の原稿に巨大なギャップが見つかったらどうしよう！と不安になり、眠れない日々を過ごすことになるのだろうか？なんでもコロナ禍のせいにするのはよくないが、コロナのせいで研究活動や生活スタイルが激変し、なんとなくやる気が出ない日々を過ごしている。

最後に、研究集会の世話人である高山茂晴さん、小池貴之さん、野村亮介さんに感謝します。

参考文献

[A] F. Ambro, Quasi-log varieties, Tr. Mat. Inst. Steklova **240** (2003), Biratsion. Geom. Lineĭn. Sist. Konechno Porozhdennye Algebry, 220–239; reprinted in Proc. Steklov Inst. Math. 2003, no. 1(240), 214–233.

[BCHM] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon, J. M^cKernan, Existence of minimal models for varieties of log general type, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 2, 405–468.

[BDPP] S. Boucksom, J.-P. Demailly, M. Păun, T. Peternell, The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension, J. Algebraic Geom. **22** (2013), no. 2, 201–248.

[F1] O. Fujino, Minimal model theory for log surfaces, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **48** (2012), no. 2, 339–371.

[F2] O. Fujino, Some remarks on the minimal model program for log canonical pairs, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **22** (2015), no. 1, 149–192.

[F3] O. Fujino, *Foundations of the minimal model program*, MSJ Memoirs, **35**. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2017.

[F4] O. Fujino, Minimal model theory for log surfaces in Fujiki's class $\mathcal{C}$, Nagoya Math. J. **244** (2021), 256–282.

[F5] O. Fujino, On quasi-log schemes, preprint (2021). arXiv:2107.04757 [math.AG]

[F6] O. Fujino, Minimal model program for projective morphisms between complex analytic spaces, in preparation.

[FG] O. Fujino, Y. Gongyo, On log canonical rings, *Higher dimensional algebraic geometry—in honour of Professor Yujiro Kawamata's sixtieth birthday*, 159–169, Adv. Stud. Pure Math., **74**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2017.

[H] K. Hashizume, On the non-vanishing conjecture and existence of log minimal models, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 54 (2018), no. 1, 89–104.

[KM] J. Kollár, 森重文, 双有理幾何学, 岩波書店 (2008).

[LT] V. Lazić, N. Tsakanikas, On the existence of minimal models for log canonical pairs, to appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci.

[Le] J. Lesieutre, The diminished base locus is not always closed, Compos. Math. **150** (2014), no. 10, 1729–1741.

[M1] A. Moriwaki, Semi-ampleness of the numerically effective part of Zariski decomposition. II, *Algebraic geometry and commutative algebra*, Vol. I, 289–311, Kinokuniya, Tokyo, 1988.

[M2] A. Moriwaki, A criterion of openness of a family of nef line bundles, Manuscripta Math. **75** (1992), no. 3, 327–331.

[N] M. Nagata, On the imbeddings of abstract surfaces in projective varieties, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A. Math. **30** (1957), 231–235.

[W] P. M. H. Wilson, On the canonical ring of algebraic varieties, Compositio Math. **43** (1981), no. 3, 365–385.