Trudinger-Moser 不等式の最大化問題の境界非線形項

京都大学数理解析研究所 (RIMS)
中西賢次 (Kenji Nakanishi)

1. Trudinger-Moser 不等式とは

Sobolev 不等式 $H^{1,p}(\mathbb{R}^p) = W^{1,p}(\mathbb{R}^p) \subset L^q(\mathbb{R}^p)$ $(2 \le \forall p \le \forall q < \infty)$ と $H^1_p(\mathbb{R}^p) \not\subset L^\infty(\mathbb{R}^p)$ の狭間にある指数型不等式である。Moser('71) のバージョン (非線形項が最良の形) では、ある正定数 C_p に対して、$\mathbb{R}^p \supset \forall\Omega$:有界領域で

$$\text{(TM)} \quad \forall u \in H^{1,p}_0(\Omega), \quad \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \le B_p := p^{p-1}|S^{p-1}| \implies \int_\Omega \exp(u^{p'})dx \le C_p|\Omega|. \tag{1}$$

なお B_p は u の定数倍で任意の正数に変えられるが、それに応じて指数の $u^{p'}$ に係数が付く。

1.1. 本稿の主題.

(球体または全空間上で) 最大増大度を持つ一般の非線形項に対して、Trudinger-Moser (型) 不等式を等号にする関数 u (最良定数の最大化元) が存在するかどうかを、非線形項から決定する。[12] の解説だが、$p > 2$ への拡張と証明の改良も行う。

2. 全空間上の Trudinger-Moser 型不等式

上記の Moser の形のままでは $|\Omega| = \infty$ とくに $\Omega = \mathbb{R}^p$ で意味を持たないので、幾つかの修正バージョンが考えられている。(以下 $\|u\|_p$ は $L^p(\mathbb{R}^p)$ ノルム)

- 劣臨界型: Cao [4] $(p = 2)$, do Ó [8] $(p \ge 2)$.

$$\text{(C)} \quad \|\nabla u\|^p_p \le B_p, \quad \alpha < 1 \implies \int_{\mathbb{R}^p} \exp_{p-1}^{\alpha|u|^{p'}} dx \le C_{p,\alpha}\|u\|^p_p, \tag{2}$$

  ここで $\exp_k$ は k 次未満を除去した $\exp_k^t := \exp(t) - \sum_{j=0}^{k-1} t^j/j!$.
  但し、この形だと臨界指数 $\alpha = B_p$ では不成立 (Adachi-Tanaka [1])。
- 非斉次 Sobolev 型: Ruf [19] $(p = 2)$, Li-Ruf [14] $(p \ge 2)$.

$$\text{(R)} \quad \|\nabla u\|^p_p + \|u\|^p_p \le B_p \implies \int_{\mathbb{R}^p} \exp_{p-1}^{\alpha|u|^{p'}} dx \le C_p. \tag{3}$$

  但し、この形だとスケール不変性 $(u(x) \mapsto u(\lambda x))$ が失われている。
- 非線形最良型: Ibrahim-Masmoudi-Nakanishi [11] $(p = 2)$, Masmoudi-Sani [16] $(p \ge 2)$

$$\text{(IMN)} \quad M_E(f) := \sup_{\|\nabla u\|^p_p \le B_p} \int_{\mathbb{R}^p} \frac{f(u)}{\|u\|^p_p} dx < \infty \iff f(u) \lesssim \frac{e^{|u|^{p'}}}{|u|^{p'} + |u|^{-p}}. \tag{4}$$

  必要十分条件なので、同じ形の不等式は全て含む。
- L^p 依存指数型: do Ó-de Souza [9] $(p = 2)$, de Souza [7] $(p \ge 2)$.

$$\text{(OS)} \quad \|u\|^p_{W^{1,p}} \le B_p,\ \alpha < 1 \implies \int_{\mathbb{R}^p} \exp_{p-1}^{(1+\alpha\frac{\|u\|^p_p}{B_p})^{p'-1}|u|^{p'}} dx \le C_{p,\alpha}. \tag{5}$$

  なお有界領域バージョンは Adimurthi-Druet [2] による。

なお (C) $\Longleftarrow$ (R) $\Longleftarrow$ (OS) $\Longleftarrow$ (IMN) の順に導ける。最初 2 つはほとんど明らかなので最後だけ示すと、$\theta := 1 - \|u\|_p^p/B_p \in (0,1)$ として (IMN) を $\theta^{-1/p}u$ に適用すれば

$$\int_{\mathbb{B}^p} \frac{e^{\theta|u/\theta|^{p'}}}{|u/\theta|^{p'} + |u|^{-p}} dx \lesssim \|u\|_p^p = B_p(1-\theta). \tag{6}$$

$b := \theta|u/\theta|^{p'}$ とおくと被積分関数は

$$\frac{e^b}{(1-\theta)b(1+b^{-p})} \geq C_\alpha \frac{e^{[\theta+\alpha(1-\theta)\theta]^{p'-1}b}}{\theta + b^{1-p}} \tag{7}$$

これを上の不等式に代入すれば (OS) を得る。[11] では (IMN) $\Longrightarrow$ (R) を示しているが、上の証明の方が単純である。他方、有界領域バージョン (TM) を導出することも可能だが、上記ほど単純ではない ([12, Appendix C] を参照)。

Trudinger-Moser 不等式には他にも高階微分や空間領域など沢山の拡張があるが、本稿では言及せず、以下では最良形 (IMN) と (TM) のみを考える。

3. 基底状態解と (IMN) の最大化問題

非線形エネルギー関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が C^1 で $f'(0) = 0 \leq f'(s)$ を満たすとして、対応する $\mathbb{R}^2$ 上の定常非線形 Schrödinger 方程式

$$-\Delta Q + \omega Q = f'(Q) \quad (\omega > 0)$$

を考えると、任意の解 $Q \in H^1(\mathbb{R}^2)$ は Pohozaev 等式を満たす：

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(Q) dx = \omega \int_{\mathbb{R}^2} \frac{Q^2}{2} dx. \tag{8}$$

$M_E(f)$ を (IMN) で与えられる不等式の最良定数とすれば、

- $0 < \omega < 2M_E(f)$ なら $\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 < 4\pi$ を満たす基底状態解が存在する。
- $\omega = 2M_E(f)$ なら全ての解は $\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \geq 4\pi$ を満たす。
- $\omega > 2M_E(f)$ なら $\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq 4\pi$ を満たす解は存在しない。

もし $\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 4\pi$ の（基底状態）解が有れば、$M_E(f)$ の最大化元。

逆に、(IMN) の商の最大化元 $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ が有れば、適当なスケール変換 $Q(x) = u(\lambda x)$ で $\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 4\pi$ の基底状態解を得る。

4. 最大化元の存在・非存在

以下では、Trudinger-Moser 型不等式の非線形積分を最大化する関数 u の存在・非存在を一般の非線形項 f に対して調べる。変分直接法で直ちに最大化元が得られないのは、エネルギー集約によるコンパクト性の喪失が起こり得る場合なので、その場合を考える。

球体領域 $\mathbb{B}^p = \{x \in \mathbb{R}^p \mid |x| < 1\}$ での Trudinger-Moser (TM) に対しては、Carleson-Chang [5] が最大化元の存在を示した。証明は、集約列では最良定数に到達できないことを示す。それ以降、様々なバージョンに対して最大化元の存在証明がなされている。

エネルギー臨界の変分問題では、非線形項の増大度は同じでも、低階項の摂動に依り存在・非存在が変わることが知られている (Sobolev 不等式の場合は Brezis-Nirenberg [3])。即ちここで考える問題は、存在・非存在を低階摂動から決定することである。

5. 最大化の境界非線形項

Carleson-Chang の議論から、低階摂動が非線形項を大きくする方が最大化列のエネルギー集約を阻止できる（⇒最大化元の存在）ことが分かる。そこで、存在と非存在の境目になるような非線形項を求める。その具体形として、[12] は以下を示した。

円盤 $\mathbb{B}^2$ 上の Trudinger-Moser (TM) $(p=2)$ の場合、境界非線形項は

$$f(u) = e^{u^2}[1 - u^{-2} - \mathbf{c_D}\, u^{-4} + O(u^{-6})] \ (u \to \infty) \quad \mathbf{c_D} := \tfrac{3}{2} + 2\zeta(3), \tag{9}$$

ただし $\zeta(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-s}$ はゼータ関数。これより特に、元々の非線形項 e^{u^2} は存在側に属することが分かる。他方、全平面 $\mathbb{R}^2$ 上の最良型 (IMN) $(p=2)$ の場合の境界は

$$f(u) = u^{-2}e^{u^2}[1 - \mathbf{c_E}\, u^{-4} + O(u^{-6})] \ (u \to \infty) \quad \mathbf{c_E} := 5 + 2\zeta(3). \tag{10}$$

こちらは第２項 (u^{-2}) が無いため、(IMN) の非線形項は (TM) の場合より境界に近い事がわかる。実際、$u^{-2}e^{u^2}$ が精密な漸近形ならやはり存在側に属するが、$\frac{e^{u^2}}{u^2+cu^{-2}}$ の形では $c = \mathbf{c_E}$ が境目となる。

正確には、非線形項を $u \gg 1$ にカットする必要がある。$\forall L > 0$ に対して

$$\mathbb{e}_L^s := e^s \cdot 1_{s>L} \tag{11}$$

とおく。まず円盤 $\mathbb{B}^2$ の場合、$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ は連続で以下を満たすとする。

$$\lim_{u\to\infty} e^{-u^2} f(u) = 1,\ f(0) = 0, \quad M_D(f) := \sup_{u\in H_0^1(\mathbb{B}^2),\ \|\nabla u\|_2^2 \le 4\pi} \int_{\mathbb{B}^2} f(u)dx < \infty. \tag{12}$$

Theorem 1. $0 < \forall p < 6,\ p < \forall q < \infty,\ \forall a > 0,\ \forall b \in \mathbb{R}$,
[存在条件] $\forall L > 1,\ \forall \delta > 0$,
(1) $f(s) \ge \mathbb{e}_L^{s^2}[1 - s^{-2} - \mathbf{c_D}\, s^{-4} + as^{-p}]$ なら $M_D(f)$ は達成される。
(2) $f(s) \ge \mathbb{e}_L^{s^2}[1 - s^{-2} - \mathbf{c_D}\, s^{-4} + bs^{-q}] + as^p$ なら $M_D(f)$ は達成。
[非存在条件] $\exists L > 1$
(3) $f(s) \le \mathbb{e}_L^{s^2}[1 - s^{-2} - \mathbf{c_D}\, s^{-4} - as^{-p}]$ なら $M_D(f)$ は非達成。
(4) $f(s) \le \mathbb{e}_L^{s^2}[1 - s^{-2} - \mathbf{c_D}\, s^{-4} + bs^{-q}] - as^p$ なら $M_D(f)$ は非達成。
また $M_D(f) \ge e$ で、非達成なら等号。なお $f(s)$ の不等式は全ての $s \in \mathbb{R}$ で成り立つとする。

全平面 $\mathbb{R}^2$ の場合、$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ は連続で以下を満たすとする。

$$\lim_{u\to\infty} u^2 e^{-u^2} f(u) = 1, \quad \lim_{u\to 0} u^{-2} f(u) = 0, \quad M_E(f) < \infty. \tag{13}$$

Theorem 2. $0 < \forall p < 6,\ p < \forall q < \infty,\ \forall a > 0,\ \forall b \in \mathbb{R}$,
[存在条件] $\forall L > 1,\ \forall \delta > 0$,
(1) $f(s) \ge s^{-2}\mathbb{e}_L^{s^2}[1 - \mathbf{c_E}\, s^{-4} + as^{-p}]$ なら $M_E(f)$ は達成される。
(2) $f(s) \ge s^{-2}\mathbb{e}_L^{s^2}[1 - \mathbf{c_E}\, s^{-4} + bs^{-q}] + as^{2+p}$ なら $M_E(f)$ は達成。
[非存在条件] $\exists L > 1$
(3) $f(s) \le s^{-2}\mathbb{e}_L^{s^2}[1 - \mathbf{c_E}\, s^{-4} - as^{-p}]$ なら $M_E(f)$ は非達成。
(4) $f(s) \le s^{-2}\mathbb{e}_L^{s^2}[1 - \mathbf{c_E}\, s^{-4} + bs^{-q}] - as^{2+p}$ なら $M_E(f)$ は非達成。
また $M_E(f) \ge e^{2-2\gamma}$（γ は *Euler* 定数）で、非達成なら等号成立。

6. 存在境界に関する関連研究

Carleson-Chang 以来、存在結果は数多いが、非存在は比較的少ない。

- Pruss [18]: 抽象的な存在・非存在を $M_D(f)$ に適用。
- Ishiwata [13]: (R) を $e^{\alpha|u|^{p'}}$, $0 < \alpha < 1$ に対する存在・非存在。
- Mancini-Thizy [15]: Adimurthi-Druet 型の $0 < \alpha < 1$ に対する存在・非存在。
- Thizy [20]: (TM) $(p = 2)$ の境界非線形項を第 2 項まで決定。

$$f(u) = e^{u^2}[1 - (1 + \tfrac{2}{e})u^{-2} + o(u^{-2})] \quad (u \to \infty). \tag{14}$$

ここで [12] との係数のズレ $+\frac{2}{e}$ は、$f(u)$ 内の $u^2(u \to 0)$ を残しているため。

- Hashizume [10], Chen-Lu-Zhu [6]: $e^{u^2} - \alpha u^2$, $\alpha > 0$ に対する存在・非存在。([10] は $\mathbb{B}^2$ の (TM)、[6] は $\mathbb{R}^2$ の非斉次型 (R))

7. $\mathbb{B}^p, \mathbb{R}^p$ $(p \geq 3)$ での境界非線形項

[12] の結果と証明は $p \geq 3$ の場合へ拡張でき、境界非線形項は

$$U := u^{p'}, \quad f(u) = \begin{cases} e^U[1 + c_1^B U^{-1} + c_2^B U^{-2} + O(U^{-3})], & (\mathbb{B}^p) \\ U^{-1}e^U[1 + c_1^E U^{-1} + c_2^E U^{-2} + O(U^{-3})], & (\mathbb{R}^p) \end{cases} \tag{15}$$

の形になる。係数 c_1^* は p に依存する具体的な有限和で表せる有理数になり、c_2^* は更に $\zeta(3)$ を加えた形 $(\mathbb{Q} \oplus \zeta(3)\mathbb{Q})$ になる。その際、多重調和数が必要となる：

$$\sum_{1 \leq k_1 \leq \cdots \leq k_n \leq p-1} \frac{1}{k_1 \cdots k_n} \quad (n \leq 2^k). \tag{16}$$

[12] の証明の特に第 3 項展開はあまりにも見通しが悪いため、$p \geq 3$ でも同様に計算できるか全然明らかでないが、本稿で以下紹介する改良版は一般の p に適用できる。

8. 証明の大まかな流れ

8.1. **対数座標.** まず再配分により、考える関数 $u(x)$ は球対称減衰として、対数座標

$$u(x) = u(r), \quad r = |x| = e^{-t/p}, \quad t := \log(|x|^{-p}), \quad \dot{u} = -\tfrac{r}{p}u_r(r) \geq 0 \tag{17}$$

に移行すると、最大化問題は次の形になる。

$$M(f) := \sup_u \langle f(u)|e^{-t}\rangle, \tag{18}$$

ただし $\langle\cdot|\cdot\rangle$ は $L^2(\mathbb{R})$ の内積で、$u(t) : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ の条件は

$$0 \leq \dot{u}, \quad \|\dot{u}\|_p^p \leq 1, \quad \begin{cases} u(0) = 0 & (\mathbb{B}^p) \\ 1 = \langle |u|^p | e^{-t}\rangle & (\mathbb{R}^p). \end{cases} \tag{19}$$

元の座標で $|x| \to 0$ への集約は $t \to \infty$ に対応する。

対数座標へ移行したときに、斉次 Sobolev ノルム $(\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^p)})$ が再び斉次 Sobolev ノルム $(\|\dot{u}\|_{L^p(\mathbb{R})})$ に移るのが Trudinger-Moser の場合、即ち Sobolev と Hardy が破綻する場合の特徴である。(Sobolev と Hardy が成立する場合は、非斉次ノルムに移るためエネルギー集約は無くなり、平行移動不変性だけになる。）従って、$u(t)$ のエネルギー分布について平行移動（元の座標のスケール変換）以上の情報を引き出す必要がある。

8.2. **集約パラメータによる問題の分解.** 最大化を考える関数集合 X において、集約状態を表すパラメータ $h\to\infty$ を導入し、$h>0$ 毎に最大化問題を考える：

$$X=\bigcup_{h>0}X(h),\quad M(f)=\sup_{h>0}M(f,h),\quad M(f,h):=\max_{u\in X(h)}\langle f(u)|e^{-t}\rangle. \tag{20}$$

$X(h)$ では集約不能ゆえ $M(f,h)$ は最大化され、問題は $\sup_{h>0}$ になる：

$$\lim_{h\to\infty}M(f,h)\begin{cases}\le M(f,h)\ (\exists h) \iff \text{最大化元が存在}\\ > M(f,h)\ (\forall h) \iff \text{最大化元は非存在}\end{cases} \tag{21}$$

具体的に h は、運動エネルギーを半分に分ける高さで定める：

$$\exists T\in\mathbb{R},\quad \|\dot u\|^p_{L^p(t<T)}\le\tfrac12\ge\|\dot u\|^p_{L^p(t>T)},\quad u(T)=h. \tag{22}$$

外部領域 $(t<T)$、内部領域 $(t>T)$ はそれぞれ劣臨界状態になる。

8.3. **外部 $(t<T)$ と内部 $(t>T)$ に分割したメリット.** $h\to\infty$ のとき漸近的に、最大化問題 $M(f,h)$ を各領域で別々の問題として扱うことができ、しかもその近似誤差は $h\to\infty$ で指数的に小さい。 現象的理由：非線形項 $f(u)$ は境界 $t=T$ よりずっと内側に集約して、質量項 $|u|^p$ は境界よりずっと外側に集約し、境界周辺は殆ど運動エネルギーの影響のみで等速度運動になるため。

この結果、分割された近似問題はそれぞれ

- 外部：非線形項は無視し、高さ $h=u(T)$ を最大化 (T を最小化)。
- 内部：質量は無視し、非線形項を最大化。(h は外部問題で与える)

外部問題は $\mathbb{B}^p$ の場合は（質量が無いので）自明になる（等速度運動)。内部問題は質量が無いので、$\mathbb{B}^p$ と $\mathbb{R}^p$ の違いが無く、結論の差は $h=u(T)$ の外部最大化のみから来る。

8.4. **内部・外部問題の漸近展開.** 各最大化問題について、$h\to\infty$ での挙動を第 3 項まで展開する。どちらも Euler-Lagrange 方程式 (EL) に基づく。

- 外部：EL の対数微分により自励系を得るので、ヘテロクリニック軌道の漸近挙動を求めれば良い。原理的には何項でも展開可能。また、質量項は異なる冪 $|u|^q$ でも、$p,q>1$ は非整数でも可能。
- 内部：EL から非線形項の局在化が従う。そこで非線形項の phase $u^{p'}$ を線形近似 ($u^{p'}\approx c_1u+c_2$) すると、Liouville 方程式になって解ける。スケール変換後 $(t\mapsto(p-1)t)$、近似方程式とその解は

$$\begin{aligned}&v=-\log(1+e^{-t}),\quad \dot v=\frac{1}{1+e^t},\quad \ddot v=\frac{-1}{(1+e^t)(1+e^{-t})}\\ &\implies -\partial_t(\dot v)^{p-1}=(p-1)e^{pv-(p-1)t},\quad \ddot v=\dot v(\dot v-1).\end{aligned} \tag{23}$$

となる。つまり、$\ddot v$ はソリトン（スパイク)、$\dot v$ はキンク（フロント）にあたる。

結論の漸近展開の第 1 項はソリトンの位置、第 2 項はソリトンの形状、第 3 項はソリトンからのズレで与えられる。ズレは線形化作用素を使って求める。

9. 集約パラメータ ($h\to\infty$) に対する漸近展開

以下、$M(f,h)$ の $h\to\infty$ での挙動を調べ、$M(f,\infty)$ の方が大きくなる条件 (非存在) を求める。なお小さな h に対する情報は得られないので、非線形項のカットオフで排除する。

$u(T)=h\to\infty$ のとき、外部 $t<T$ では非線形項を無視して上昇効率を最大化し、内部 $t>T$ では質量項を無視して非線形項を最大化できる。基本的な道具は、Trudinger-Moser 不等式 ($\mathbb{B}^p$ 上) と、Trudinger-Moser 型の球対称 Sobolev 不等式 (各点評価) で、後者は外部問題（最速上昇）と同値になる。

以下、$U:=u^{p'}$, $H:=h^{p'}$, $\kappa:=2^{p'-1}=(2^{1/p})^{p'}$ とおく。臨界非線形増大度は

$$f(u)=U^{-\rho}e^U,\quad \rho:=\begin{cases}0 & (\mathbb{B}^p\text{ 上の場合}),\\ 1 & (\mathbb{R}^p\text{ 上の場合}).\end{cases} \tag{24}$$

また、指数的に小さい誤差量を次の記号で表す。$t_\pm:=\max(\pm t,0)$ として

$$x(t)=\otimes_t \iff \exists c,C>0\ (\text{定数}),\quad |x|\le Ce^{-ct_+^c}. \tag{25}$$

対数座標変換から来る指数重み関数を

$$\mathfrak{e}:=e^{-t} \tag{26}$$

とおく。後の方で使う $\mathbf{e}$ とは指数が異なるので要注意。

10. 外部（最速上昇）問題と指数型球対称 Sobolev 不等式

$h\to\infty$ で外部 $t<T$ では非線形項が無視できるので、h を最大化・T を最小化する問題になる。これは外部質量の最小化とも見なせて、

$$\mu_{p,q}(h):=\inf\{\langle |u|^q|\mathfrak{e}\rangle_{t<0}\mid u(0)=h,\quad \|\dot u\|^p_{L^p(t<0)}\le 1/2\} \tag{27}$$

を求める事になる。ただし質量の冪 を $q>1$ に一般化した。漸近展開は

$$\begin{gathered}\mu_{p,q}(h)=H^{-q/p}e^{\kappa H+c_{p,q}}[1+c_1(\kappa H)^{-1}+c_2(\kappa H)^{-2}+O(H^{-3})]\quad (h\to\infty),\\ \kappa H=2^{p'-1}H=(2^{1/p}h)^{p'},\quad c_1:=-\tfrac{q^2/p}{2},\quad c_2:=\tfrac{q^4/p^2}{8}-\tfrac{q^3/p+q^4/p^2}{6}.\end{gathered} \tag{28}$$

これを平行移動すれば、今の設定に適用すると ($\kappa:=2^{p'-1}$)

$$u(T)=h\gg 1,\ \|\dot u\|^p_{L^p(t<T)}\le 1/2 \implies H^{-1}e^{\kappa H-T}\lesssim \langle |u|^p|\mathfrak{e}\rangle_{t<T}\le 1. \tag{29}$$

$u(0)=0$ ($\mathbb{B}^p$ 上の問題) の場合は単純に Hölder より

$$h\le \|\dot u\|_{L^p(t<T)}T^{1/p'}\le 2^{-1/p}T^{1/p'} \implies \kappa H\le T. \tag{30}$$

つまりどちらの場合も次の球対称 Sobolev 評価を得る：

$$(\mathrm{RS})\quad e^{\kappa H-T}\lesssim H^\rho. \tag{31}$$

11. 内部領域の質量無視と非線形集中

内部質量が (指数的誤差として) 無視できるのは、非線形項の指数増大と積分有界性から容易に従う。他方、内部非線形項は $u = 2h$ に集中する。これは一様凸性不等式

$$\forall p > 1, \quad \forall a, b \geq 0, \quad (\tfrac{a+b}{2})^p \leq \tfrac{a^p+b^p}{2} - C_p(a-b)^2(a+b)^{p-2} \tag{32}$$

と (TM), (RS) から従う。実際、$V := (u-h)_+^{p'}$ とおくと

$$\begin{aligned} &U + C(u-2h)^2 U/u^2 \leq \kappa(V+H), \quad \|\dot{v}\|_p^p \leq 1, \\ &\langle U^{-\rho} e^{U+C(u-2h)^2U/u^2} | \mathfrak{e} \rangle_{t>T} \leq \langle H^{-\rho} e^{\kappa(V+H)} | \mathfrak{e} \rangle_{t>T} \lesssim H^{-\rho} e^{\kappa H - T} \lesssim 1. \end{aligned} \tag{33}$$

$(u-2h)^2$ の因子より、$|u-2h| > h^\delta$ の寄与は $\otimes_h$ $(\forall \delta > 0)$。

更に、もし T が大きいと内部非線形項が消えてしまうが、その場合、$u(t > T)$ を定数にして稼いだ運動エネルギーを使って外側非線形項を増幅する変形が可能なので、最大値の考慮からは除外して

$$e^{\kappa H - T} \sim H^\rho \tag{34}$$

に限定して良い。つまり T の位置は最速上昇と $O(1)$ しか違わない。

12. 外部領域の非線形項

$u(T_1) = 1$ で T_1 を定め、$\delta := \|\dot{u}\|_{L^p(t<T_1)}^p$ とおくと、Hölder より

$$\begin{aligned} &h - 1 \leq \|\dot{u}\|_{(T_1,T)} |T - T_1|^{1/p'} \leq (1/2 - \delta)^{1/p} |T - T_1|^{1/p'}, \\ &\therefore T - T_1 \geq \kappa H (1 - 1/h)^{p'} (1 - 2\delta)^{1-p'}. \end{aligned} \tag{35}$$

$\mathbb{B}^p$ 上では $T_1 > 0$. $\mathbb{R}^p$ 上の場合、(RS) より

$$1 \geq \langle |u|^p | \mathfrak{e} \rangle_{t<T_1} \gtrsim \delta^{p'} e^{\delta^{1-p'} - T_1} \therefore T_1 \geq \delta^{1-p'} + p' \log \delta \gtrsim -1. \tag{36}$$

$T = \kappa H + O(\log H)$ と上の評価を合わせると、どちらの場合も

$$\delta \lesssim 1/h. \quad \therefore T_1 \gtrsim h^{p'-1}. \tag{37}$$

ゆえに (TM) より

$$\langle e^U | \mathfrak{e} \rangle_{(T_1,T)} \lesssim e^{-T_1} \lesssim e^{-Ch^{p'-1}} = \otimes_h. \tag{38}$$

つまり外部非線形項においては $u > 1$ の寄与が指数的に小さい。従って、[12] のように、$f(u)$ の $u < 1$ 部分をカットすれば外部非線形項は無視できる。

しかし、[12] 以外の（通常）設定では、非線形項をカットしていない。この場合は、$u \to +0$ (外部領域) の寄与も入れる必要がある。$\mathbb{B}^p$ の場合、v を $t < T$ での最速上昇とすると

$$v = (2T)^{-1/p} \min(t_+, T), \quad \|\dot{v}\|_{L^p(t<T)}^p = 1/2, \quad \hat{h} := v(T) = 2^{-1/p} T^{1/p'}. \tag{39}$$

$T=\kappa H+\tau$ とおくと $(0,T)$ 上の Hölder の剰余項より、

$$\begin{aligned}&F:=|\dot u|^p/\|\dot u\|_p^p=2|\dot u|^p,\quad G:=1/\|1\|_{p'}^{p'}=2|\dot v|^p \implies\\&\|\tfrac{(F-G)^2}{F+G}\|_1\lesssim 1-\tfrac{\langle \dot u|1\rangle}{\|\dot u\|_p\|1\|_{p'}}=1-2^{1/p}hT^{-1/p'}\lesssim \tau/T,\\&\|\tfrac{(F-G)^2}{F+G}\|_1\sim \||\dot u-\dot v|^2[|\dot u|+|\dot v|]^{p-2}\|_1\gtrsim \|\dot u-\dot v\|_2^2T^{-1+2/p}\\&\therefore |u-v|\lesssim \|\dot u-\dot v\|_2t^{1/2}\lesssim (\tau T^{-2/p}t)^{1/2}.\end{aligned}\tag{40}$$

非線形項が $u\to 0$ で $f(u)\approx u^k$ $(k\in\mathbb{N})$ とすると、

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad |\langle u^k-v^k|\mathfrak{e}\rangle_{t<T}|\lesssim \tau^{1/2}T^{-k/p}\langle t^{k/2}+t^k|\mathfrak{e}\rangle_{t>0}\lesssim \tau^{1/2}H^{-k/p}.\tag{41}$$

他方、最速上昇の積分は具体的に

$$\langle v^k|\mathfrak{e}\rangle_{t<T}=(2T)^{-k/p}\langle t^k|\mathfrak{e}\rangle_{(0,T)}=(2T)^{-k/p}k!+\otimes_H\tag{42}$$

より、$\widetilde v$ を高さ h への最速上昇とするとその位置は $\kappa H=T-\tau$ だから

$$|\langle v^k|\mathfrak{e}\rangle_{t<T}-\langle \widetilde v^k|\mathfrak{e}\rangle_{t<\kappa H}|\lesssim T^{-k/p-1}\tau.\tag{43}$$

従って、u を同じ高さ h の最速上昇にしたとき外部のズレは

$$|\langle u^k|\mathfrak{e}\rangle_{t<T}-\langle \widetilde v^k|\mathfrak{e}\rangle_{t<\kappa H}|\lesssim \tau^{1/2}H^{-k/p}+\tau T^{-k/p-1}\lesssim \tau^{1/2}H^{-k/p}.\tag{44}$$

その一方で、内部非線形項は τ の平行移動により $\sim\tau$ 増える。ゆえに u が最速上昇に勝るには、$\tau^{1/2}H^{-k/p}\gtrsim\tau$ すなわち $\tau\lesssim H^{-2k/p}$ が必要で、このとき積分値のズレも $\lesssim H^{-2k/p}$ となる。これは $k>p/2$ の場合、展開第 2 項より小さいので、第 2 項を求めるには最速上昇で十分。特にこれから [12] と [20] の係数のズレ $2/e$ が特定できる。$k>p$ の場合は第 3 項展開でも最速上昇が採用される。

13. 内部非線形項の最大化（漸近展開）

以下、内部非線形積分の最大化を考える。外部最速上昇で与えられる $T\sim H^{-\rho}e^{\kappa H}$ を $t=0$ へ平行移動・リスケールすると

$$\begin{aligned}m(h):=\max_u\langle f(u)|\mathbf{e}\rangle_{t>0},\quad u(0)=h,\quad \|\dot u\|_{L^p(t>0)}^p\le 1,\quad \mathbf{e}:=e^{-(p-1)t},\\ f(u)=e^{\theta(u)},\quad \theta(u)=(p-1)(U-\kappa H)-\rho\log(U/H)+O(U^{-1}).\end{aligned}\tag{45}$$

ここで $t\mapsto(p-1)t$ とスケール変更したのは極限ソリトンの正規化の為である（$p=2$ なら同じ）。対応する Euler-Lagrange 方程式は

$$(\mathrm{EL})\quad \exists\lambda>0,\quad -\lambda\partial_t[\dot u]^{p-1}=f'(u)\mathbf{e},\quad u(0)=h,\quad \dot u(0)=:a.\tag{46}$$

初期速度 $a>0$ は未知だが h で漸近展開できる。実際、まず (EL) に $\dot u,1,u$ を掛けて積分等式を出し、(TM) と $u=2h$ への集中を使えば、$a\sim h/H$, $\lambda\sim H$ が分かる。更に、$T_a>0$ を

$$\dot u(T_a)=a/2\tag{47}$$

で定めれば、(EL) と $u=2h$ への集中より、$f(u)\mathbf{e}$ が $t=T_a+O(1)$ に指数的局在することが分かる。

14. ソリトン近似

非線形項の指数的局在化により、以下の漸近形が分かる。

$$\begin{aligned} &u(0)=h, \quad \dot{u}(T_a)=a/2, \quad \dot{u}(0)=a=h/H[1+O(H^{-1})], \quad H=h^{p'}, \\ &u=h+a[\min(t,T_a)+C\{t>T_a\}+\otimes_{|t-T_a|}], \end{aligned} \tag{48}$$

但し定数 C はこの時点では不明。(EL) の対数微分より、

$$\begin{aligned} w:=\dot{u}/a, \quad \ell(u):=\theta'(u)+\theta''/\theta' \implies \dot{w}=w(w-1)+R, \\ R:=w^{2-p}\int_t^\infty [1-\tfrac{a}{p}\ell(u)]\partial_t w^p dt=O(H^{-1}w^2(1-w)). \end{aligned} \tag{49}$$

これを積分してソリトン近似を得る：

$$\begin{aligned} &w=\mathbf{w}_0(t-T_a)+H^{-1}\otimes_{|t-T_a|}, \quad \dot{w}=\dot{\mathbf{w}}_0(t-T_a)+H^{-1}\otimes_{|t-T_a|}, \\ &u=h+a[\mathbf{v}_0(t-T_a)+T_a+H^{-1}\otimes_{T_a-t}], \\ &\mathbf{v}_0(t):=-\log(1+e^{-t}), \quad \mathbf{w}_0:=\dot{\mathbf{v}}_0=(1+e^t)^{-1}, \quad \dot{\mathbf{w}}_0=\mathbf{w}_0(\mathbf{w}_0-1). \end{aligned} \tag{50}$$

更に、これで非線形積分 $\langle f(u)|\mathbf{e}\rangle_{t>0}$ を第２項まで展開できる。

15. 線形化近似

第３項はソリトン周りの線形化方程式を用いて計算できるが、第２項までは全て初等関数で計算できるのに対し、u の次の展開は重対数関数を含み、具体的に計算できない項が多く出てくる。以下では一般の p の場合に [12] と異なる手順を示す。ポイントは

(1) ソリトン中心を T_a から平行移動してエネルギー制約を満たす形にする。新しい中心 T_* は a から (ほぼ) 明示的に決まる。このソリトン近似を u_0 とすると、u が条件付き最大であることから、u_a からの誤差は２次になり、しかもその２次項は線形化作用素で与えられる。
(2) 上の２次項の計算は、線形化方程式に対する解作用素を使えば、u の第２近似を求めなくても、$\mathbf{w}_0, \mathbf{v}_0$ だけで実行できる。最終的に $\langle (1-\mathbf{w}_0)^2|\mathbf{v}_0^2\rangle$ から $\zeta(3)$ が出てくる。これは $\mathbf{w}_0, \mathbf{v}_0$ の多項式の２乗積分で有理数にならない最も単純な形。
(3) u_0 による近似値から１次展開が出るが、その係数を求める際に a に対する最大化を使うと、a と h の関係式を高次展開しなくて済む。

15.1. ソリトン中心の移動調整.

$\dot{u}$ の中心を T_a から $T_* \in \mathbb{R}$ に調整して、近似関数

$$\dot{u}_0:=a\mathbf{w}_0(t-T_*), \quad u_0:=h+\int_0^t \dot{u}_0(s)ds, \tag{51}$$

がエネルギー制約条件を満たすように取る。つまり

$$1=\|\dot{u}_0\|_{L^p(t>0)}^p=a^p\|\mathbf{w}_0\|_{L^p(t>-T_*)}^p=a^p[-H_{p-1}+T_*+\otimes_{T_*}], \tag{52}$$

ただし $H_k:=\sum_{j=1}^k 1/j$ は調和数。$a^{-p}=H+O(1)$ より

$$T_*=a^{-p}+H_{p-1}+\otimes_H. \tag{53}$$

T_a でも近似的に条件を満たしていたことから $T_*=T_a+O(H^{-1})$ で、この平行移動は u に対する近似精度 $(O(H^{-1}))$ には影響しない。

15.2. **非線形積分の２次展開.** $u=u_a+u_1$ とおいて非線形積分を２次展開すると、

$$\langle f(u)|\mathbf{e}\rangle=\langle f(u_0)|\mathbf{e}\rangle+\langle f'(u)\mathbf{e}|u_1\rangle-\tfrac{1}{2}\langle f''(u)\mathbf{e}|u_1^2\rangle+O(H^{-3}) \tag{54}$$

１次項は (EL) により $\dot{u},\dot{u}_1$ の p 次積分に変わり、エネルギー制約条件からその主要項は０。つまり１次項も２次のオーダーになり、元の２次項と併せて極限ソリトンで近似すると、

$$\langle f(u)|\mathbf{e}\rangle=\langle f(u_0)|\mathbf{e}\rangle+C\langle Lu_1|u_1\rangle+O(H^{-3}). \tag{55}$$

線形作用素 L はソリトン T_* を中心とする座標で書けば

$$L:=-\partial_t\mathbf{w}_0^{p-2}\partial_t+p\mathbf{w}_0^{p-2}\dot{\mathbf{w}}_0. \tag{56}$$

これは $\mathbf{v}_0$ の満たす方程式

$$-\partial_t[\dot{\mathbf{v}}_0]^{p-1}=(p-1)e^{p\mathbf{v}_0-(p-1)t} \tag{57}$$

の線形化作用素である。なお [12] では $\dot{u}$ に対する方程式の線形化を使っているのでこの作用素 L は出てこない。

Lv_1 に対する近似は (EL) をソリトン近似で展開すれば

$$v_1(t+T_*)=H^{-1}\mathbf{v}_1(t-T_*)+O(H^{-2}),\quad L\mathbf{v}_1=\mathbf{w}_0^{p-2}\dot{\mathbf{w}}_0P_2(\mathbf{v}_0)=:g, \tag{58}$$

但し以下、k 次多項式は P_k で表す (行により異なる)。この解は

$$\begin{aligned}&\mathbf{v}_1=Rg:=\int_{-\infty}^t\begin{vmatrix}\mathbf{k}_0(t)&\mathbf{k}_0(t)\\\mathbf{k}_1(t)&\mathbf{k}_1(s)\end{vmatrix}g(s)ds,\quad\mathrm{span}\{\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_1\}=\mathrm{Ker}(L),\\&\mathbf{k}_0:=p\mathbf{w}_0-(p-1),\quad\mathbf{k}_1:=c+(t+F)\mathbf{k}_0,\quad F=\mathbf{w}_0^{2-p}P_{p-2}(\mathbf{w}_0).\end{aligned} \tag{59}$$

$\mathbf{k}_0g=:\dot{G}$ とおくと $\langle g|\mathbf{k}_0\rangle=0$ より $G\in L^1_t$, 部分積分で

$$\begin{aligned}&G=P_2(\mathbf{v}_0)(\mathbf{w}_0^{p-1}-\mathbf{w}_0^p)-\tfrac{1}{p}P_2'(\mathbf{v}_0)(\mathbf{w}_0^p-1)+\tfrac{1}{p}P_2''(\mathbf{w}_0^p/p+\cdots+\mathbf{w}_0),\\&\langle Lv_1|v_1\rangle=\langle g|Rg\rangle=-2\langle G\dot{G}|t+F\rangle-2c\langle G|g\rangle=\langle G|G\rangle-2\langle G|\mathbf{k}_0gF+cg\rangle.\end{aligned} \tag{60}$$

$gF=\dot{\mathbf{w}}_0P_2(\mathbf{v}_0)P_{p-2}(\mathbf{w}_0)$ だから被積分関数は $\mathbf{v}_0,\mathbf{w}_0$ の多項式だが、$\dot{\mathbf{w}}_0=\mathbf{w}_0(\mathbf{w}_0-1)$ の因子があれば積分は多重調和数 $\in\mathbb{Q}$ になる。その因子が無いのは G^2 内の $[P_2'(\mathbf{v}_0)(\mathbf{w}_0-1)]^2$ のみで、これが $\zeta(3)$ を与える。

15.3. **近似積分の初速に対する最大化.** 近似積分 $\langle f(u_0)|\mathbf{e}\rangle$ の第１次係数は２次精度が必要なので、単純に展開すると $a=\dot{u}(0)$ と $h=u(0)$ の関係式を更に展開する必要が出てくる。[12] ではこの為にも u の２次近似を使ったが、これは以下で回避できる。

上の議論では最大化元 u に対して $a:=\dot{u}(0)$ と定めていたが、$a\sim h/H$ を独立パラメータとしても制約条件を指数誤差で満たす。そこで $h=a^{1-p}+a\hat{h}$ とおいて、$\hat{h}=O(1)$ を独立パラメータと見れば、

$$\langle f(u_0)|\mathbf{e}\rangle=-e^{H_{p-1}}\langle\mathbf{w}_0^{p-2}\dot{\mathbf{w}}_0|1+\varepsilon P_2(\mathbf{v}_0,\hat{h})+\varepsilon^2P_4(\mathbf{v}_0,\hat{h})\rangle+O(\varepsilon^3), \tag{61}$$

と展開できる。但し $\varepsilon:=a^p=H^{-1}[1+p'\hat{h}H^{-1}+O(H^{-2})]$. 積分すると

$$\langle f(u_0)|\mathbf{e}\rangle=C+\varepsilon P_2(\hat{h})+\varepsilon^2P_4(\hat{h})+O(\varepsilon^3). \tag{62}$$

真の $a = \dot{u}(0)$ は最大化元だから、$P_2(\hat{h})$ の最大点を h_0 とすると $\hat{h} = h_0 + O(\varepsilon)$ で、この誤差は上の展開に影響しない。つまり

$$\langle f(u_0)|\mathbf{e}\rangle = C + \varepsilon \max P_2 + \varepsilon^2 P_4(\hat{h}) + O(\varepsilon^3) \tag{63}$$

なので a と h の関係式は $\hat{h}$ まで求めれば十分で、これはソリトン近似から (比較的容易に) 得られる。

References

[1] Shinji Adachi, Kazunaga Tanaka, *Trudinger type inequalities in $\mathbb{R}^N$ and their best exponents.* Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 7, 2051–2057.

[2] Adimurthi, O. Druet, *Blow-up analysis in dimension 2 and a sharp form of Trudinger-Moser inequality.* Comm. Partial Differential Equations **29** (2004), no. 1-2, 295–322.

[3] Haïm Brézis, Louis Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents.* Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), no. 4, 437–477.

[4] D. M. Cao, D. M. *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in $\mathbb{R}^2$.* Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), no. 3-4, 407–435.

[5] Lennart Carleson, Sun-Yung A. Chang, *On the existence of an extremal function for an inequality of J.Moser*, Bull. Sci. Math. (2) **110** (1986), no. 2, 113–127.

[6] Lu Chen, Guozhen Lu, Maochun Zhu, *Existence and nonexistence of extremals for critical Adams inequalities in $\mathbb{R}^4$ and Trudinger-Moser inequalities in $\mathbb{R}^2$.* Adv. Math. **368** (2020), 107143, 61 pp.

[7] Manassés de Souza, *Some sharp inequalities related to Trudinger-Moser inequality.* J. Math. Anal. Appl. **467** (2018), no. 2, 981–1012.

[8] João Marcos B. do Ó, *N-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with critical growth.* Abstr. Appl. Anal. **2** (1997), no. 3-4, 301–315.

[9] João Marcos do Ó, Manassés de Souza, *Trudinger-Moser inequality on the whole plane and extremal functions.* Commun. Contemp. Math. **18** (2016), no. 5, 1550054, 32 pp.

[10] Masato Hashizume, *Maximization problem on Trudinger-Moser inequality involving Lebesgue norm.* J. Funct. Anal. **279** (2020), no. 2, 108513, 30 pp.

[11] Slim Ibrahim, Nader Masmoudi, Kenji Nakanishi, *Trudinger-Moser inequality on the whole plane with the exact growth condition.* J. Eur. Math. Soc. **17** (2015), no. 4, 819–835.

[12] Slim Ibrahim, Nader Masmoudi, Kenji Nakanishi, Federica Sani, *Sharp threshold nonlinearity for maximizing the Trudinger-Moser inequalities.* J. Funct. Anal. **278** (2020), no. 1, 108302, 52 pp.

[13] Michinori Ishiwata, *Existence and nonexistence of maximizers for variational problems associated with Trudinger-Moser type inequalities in $\mathbb{R}^N$.* Math. Ann. **351** (2011), no. 4, 781–804.

[14] Yuxiang Li, Bernhard Ruf, *A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in $\mathbb{R}^n$.* Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), no. 1, 451–480.

[15] Gabriele Mancini, Pierre-Damien Thizy, *Non-existence of extremals for the Adimurthi-Druet inequality.* J. Differential Equations **266** (2019), no. 2-3, 1051–1072.

[16] Nader Masmoudi, Federica Sani, *Trudinger-Moser inequalities with the exact growth condition in $\mathbb{R}^N$ and applications.* Comm. Partial Differential Equations **40** (2015), no. 8, 1408–1440.

[17] J. Moser, *A sharp form of an inequality of N. Trudinger.* Indiana Univ. Math. J. **20** (1971) 1077–1092.

[18] Alexander R. Pruss, *Nonexistence of maxima for perturbations of some inequalities with critical growth.* Canad. Math. Bull. **39** (1996), no. 2, 227–237.

[19] Bernhard Ruf, *A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in $\mathbb{R}^2$.* J. Funct. Anal. **219** (2005), no. 2, 340–367.

[20] Pierre-Damien Thizy, *When does a perturbed Moser-Trudinger inequality admit an extremal?* Anal. PDE **13** (2020), no. 5, 1371–1415.