

A weak comparison principle and asymptotic behavior of viscosity solutions to the mean curvature flow equation with discontinuous source terms

北海道大学・大学院理学研究院数学部門 浜向 直^{*}

Nao Hamamuki

Department of Mathematics, Faculty of Science, Hokkaido University

北海道大学・大学院理学院数学専攻 三栖 邦康[†]

Kuniyasu Misu

Department of Mathematics, Faculty of Science, Hokkaido University

1 序

方程式. 本稿では, 駆動力項, およびソース項 (外力項) 付きの平均曲率流方程式:

$$u_t(x, t) - \Delta_1 u(x, t) + \nu |\nabla u(x, t)| = c \chi_\Omega(x) \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0, \infty) \quad (1.1)$$

を, 初期条件:

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{in } \mathbf{R}^n \quad (1.2)$$

の下で考える. ここで未知関数は $u : \mathbf{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ で, $\nabla u = (u_{x_i})_{i=1}^n$ は空間変数 x についての勾配, $|\cdot|$ は通常のユークリッドノルムである. また $\nu, c > 0$ は正の定数, χ_Ω は空でない集合 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ の特性関数で, さらに,

$$\Delta_1 u(x, t) = \frac{|\nabla u(x, t)|}{n-1} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(x, t)}{|\nabla u(x, t)|} \right) \quad (1.3)$$

である. 初期値 $u_0 : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ は連続で台がコンパクト, すなわち $u_0 \in C_0(\mathbf{R}^n)$ と仮定する. 本稿では, この初期値問題の粘性解に対する弱比較定理と一意性, そして解の長時間的な挙動について, 論文 [11] で発表予定の結果の一部を紹介する.

^{*}E-mail: hnao@math.sci.hokudai.ac.jp

[†]E-mail: kuniyasu.misu@math.sci.hokudai.ac.jp

物理的背景. (1.1) は, 2次元核生成と呼ばれる結晶成長現象を記述する方程式である ([1, 14, 15]). これは, 結晶表面での核生成 (小さな丘の生成) をきっかけとして起きる結晶成長現象である. この核生成が起きる場所は, ステップ源とも呼ばれる. 核生成による垂直方向の成長と, 曲率・駆動力に依存する水平方向の成長との組み合わせで起きる成長を (1.1) は記述する.

方程式 (1.1) の導出を簡単に説明する. 図 1 も参照. 場所 $x \in \mathbf{R}^n$, 時刻 $t \in [0, \infty)$ における結晶表面の高さを $u(x, t)$ で表す. 結晶の水平方向の成長と垂直方向の成長について, それぞれ次の (A), (B) の成長法則を仮定する:

(A) 各 $l \in \mathbf{R}$ に対して, $u(\cdot, t)$ の l -等高面 $\Gamma_l(t) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid u(x, t) = l\}$ は, 曲面の発展方程式:

$$V = \kappa - \nu \quad \text{on } \Gamma_l(t) \quad (1.4)$$

に従って水平方向に成長する.

(B) 集合 Ω (ステップ源) 上では, u は速さ $c > 0$ で垂直方向に成長する.

(A) の記号について説明する. $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x, t) \in \mathbf{R}^n$ を, $x \in \Gamma_l(t)$ における $\Gamma_l(t)$ の単位法線ベクトルで, $\{x \in \mathbf{R}^n \mid u(x, t) > l\}$ から $\{x \in \mathbf{R}^n \mid u(x, t) < l\}$ へ向くものとする. そして $V = V(x, t)$ は $x \in \Gamma_l(t)$ における $\Gamma_l(t)$ の \mathbf{n} 方向への法速度, $\kappa = \kappa(x, t)$ は $x \in \Gamma_l(t)$ における $\Gamma_l(t)$ の \mathbf{n} 方向への平均曲率を表す. $\nu \in \mathbf{R}$ は駆動力と呼ばれる定数で, 今回は $\nu > 0$ の場合を考えている. 高さ関数 $u(x, t)$ を用いると, u が滑らかで $\nabla u \neq 0$ となる部分では, 法速度 V と平均曲率 κ は次のように表示される:

$$V = \frac{u_t(x, t)}{|\nabla u(x, t)|}, \quad \kappa = \frac{1}{n-1} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(x, t)}{|\nabla u(x, t)|} \right).$$

詳しい導出は [4, Chapter 1] を参照. これらを (1.4) に代入することで,

$$u_t(x, t) - \Delta_1 u(x, t) + \nu |\nabla u(x, t)| = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0, \infty) \quad (1.5)$$

が得られる. なお曲率 κ の符号について, 例えば等高面が図 1 右のようなとき, その上の凸な部分では $\kappa < 0$, 凹な部分では $\kappa > 0$ となる. 駆動力は今 $\nu > 0$ であるから, 法速度 (1.4) は等高面が凸な部分では必ず負となり, 水平方向には u は縮むことになる.

次に条件 (B) を考える. 垂直方向の成長速度は $u_t(x, t)$ で与えられるので, (B) は,

$$u_t(x, t) = c \chi_\Omega(x) \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0, \infty) \quad (1.6)$$

と記述される. 2次元核生成においては (A) と (B) が同時に起きると考えられるので, (1.5) と (1.6) を組み合わせた方程式, つまり両者の時間微分を加えた方程式として (1.1) を得る.

[6, Section 3.1] では, 2つの方程式 (1.5) と (1.6) とを短い時間 $\tau > 0$ ずつ交互に解き, その時間幅の極限 $\tau \rightarrow +0$ を取って (1.1) を得る, いわゆる Trotter-加藤の積公式に基づく導出も述べられている.

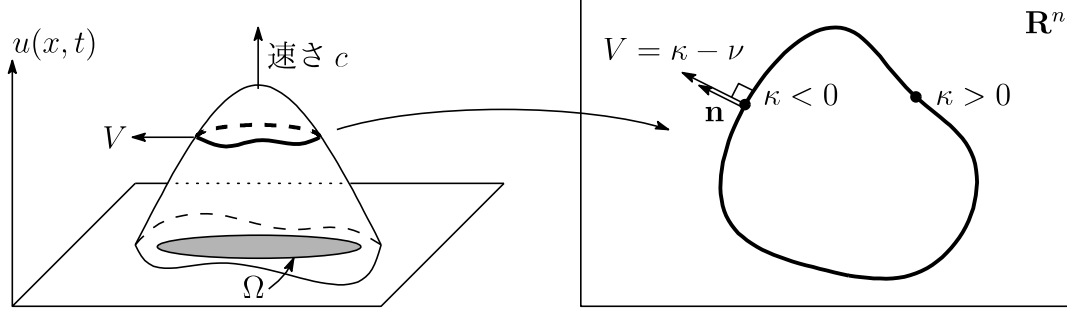


図 1: 成長法則について.

先行研究. 方程式が不連続である場合, 一般には粘性解に対する比較定理が期待できず, それ故, 解の一意性が問題になる. (1.1) の曲率項 $\Delta_1 u(x, t)$ が無い 1 階の方程式:

$$u_t(x, t) + \nu |\nabla u(x, t)| = c \chi_\Omega(x) \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0, \infty), \quad (1.7)$$

さらにより一般の, 不連続ソース項を持つハミルトン・ヤコビ方程式に対しては, 初期値問題が一意可解となるような適切な解概念が [5] で導入された. また [9] では, その解の長時間挙動を調べている.

2 階方程式 (1.1) に対しては, $\nu < 0$ の場合に, 最大粘性解の漸近速度を [6] で調べている. またソース項 $c \chi_\Omega(x)$ を連続関数 $f(x)$ で置き換えた場合の解の漸近挙動を, [7, 8] で明らかにしている. [8] では, 方程式 (1.1) の左辺を一般の退化放物型作用素としている.

2 粘性解

中心 x , 半径 $r > 0$ の開球を $B_r(x)$ で表す. まず, 半連続包の概念を導入する. 集合 $K \subset \mathbf{R}^N$ と関数 $h: K \rightarrow \mathbf{R}$ に対し, h の上半連続包 $h^*: \overline{K} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ と下半連続包 $h_*: \overline{K} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ を,

$$h^*(x) = \lim_{r \rightarrow +0} \sup \{h(y) \mid y \in B_r(x) \cap K\}, \quad h_*(x) = \lim_{r \rightarrow +0} \inf \{h(y) \mid y \in B_r(x) \cap K\}$$

($x \in \overline{K}$) で定義する.

n 次の実対称行列全体の集合を \mathbf{S}^n で表す. 関数 $F: (\mathbf{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{R}$ を,

$$F(p, X) = -\frac{1}{n-1} \text{trace} \left(\left(I - \frac{p \otimes p}{|p|^2} \right) X \right) \quad ((p, X) \in (\mathbf{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbf{S}^n) \quad (2.1)$$

で定める. ここで, ベクトル $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbf{R}^n$ に対して $p \otimes p = (p_i p_j)_{i,j=1}^n$ である. (2.1) は, (1.1) の $-\Delta_1 u(x, t)$ の項を表す関数である. すなわち, u が滑らかで $\nabla u(x, t) \neq 0$ となる点 (x, t) においては, $F(\nabla u(x, t), \nabla^2 u(x, t)) = -\Delta_1 u(x, t)$ である. ただし, $\nabla^2 u = (u_{x_i x_j})_{i,j=1}^n$ はヘッセ行列を表す.

注意 2.1. (2.1) の F は次の性質を満たす :

$$F \in C((\mathbf{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbf{S}^n), \quad (2.2)$$

$$\text{任意の } p \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \text{ と } X \geq Y \text{ を満たす } X, Y \in \mathbf{S}^n \text{ に対して, } F(p, X) \leq F(p, Y), \quad (2.3)$$

$$-\infty < F_*(0, O) = F^*(0, O) < \infty, \quad (2.4)$$

$$\text{任意の } (p, X) \in (\mathbf{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbf{S}^n \text{ と } r > 0 \text{ に対して, } F(rp, X) = F(p, X). \quad (2.5)$$

粘性解の概念を定義しよう. 粘性解の基本性質などは [2, 4] を参照のこと. 以下, $C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times (0, \infty))$ は, x について C^2 級, t について C^1 級の関数 $\phi = \phi(x, t)$ の集合を表すとする.

定義 2.2 (粘性解). $u : \mathbf{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ を局所有界な関数とする. 次の (i), (ii) が成り立つとき, u を (1.1)–(1.2) の粘性劣解 (resp. 粘性優解) と言う :

$$(i) \quad \mathbf{R}^n \text{ 上で } u^*(\cdot, 0) \leq u_0 \text{ (resp. } u_*(\cdot, 0) \geq u_0).$$

$$(ii) \quad \text{任意の } (x_0, t_0) \in \mathbf{R}^n \times (0, \infty) \text{ と } \phi \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times (0, \infty)) \text{ に対し, } u^* - \phi \text{ (resp. } u_* - \phi) \text{ が } (x_0, t_0) \text{ で極大 (resp. 極小) を取るならば,}$$

$$\begin{aligned} & \phi_t(x_0, t_0) + F_*(\nabla \phi(x_0, t_0), \nabla^2 \phi(x_0, t_0)) + \nu |\nabla \phi(x_0, t_0)| \leq c(\chi_\Omega)^*(x_0) \\ & \text{(resp. } \phi_t(x_0, t_0) + F^*(\nabla \phi(x_0, t_0), \nabla^2 \phi(x_0, t_0)) + \nu |\nabla \phi(x_0, t_0)| \geq c(\chi_\Omega)_*(x_0)). \end{aligned}$$

u が粘性劣解かつ粘性優解であるとき, u を粘性解と呼ぶ.

注意 2.3. $(\chi_\Omega)^* = \chi_{\bar{\Omega}}$, $(\chi_\Omega)_* = \chi_{\Omega^\circ}$ である. ここで, Ω° は Ω の内部を表す.

後に楕円型方程式の粘性解も考えるが, 定義は同様なので省略する.

本稿ではコンパクトな台を持つ初期値 u_0 を考えるため, 粘性劣解, 粘性優解のクラスとして次を定めておく :

$$\begin{aligned} \text{SUB} &:= \left\{ u \left| \begin{array}{l} u \text{ は (1.1)–(1.2) の粘性劣解, かつ全ての } T > 0 \text{ に対して,} \\ \text{ある } R > 0 \text{ が存在して, } B_R(0)^c \times [0, T] \text{ 上で } u \leq 0 \end{array} \right. \right\}, \\ \text{SUP} &:= \left\{ u \left| \begin{array}{l} u \text{ は (1.1)–(1.2) の粘性優解, かつ全ての } T > 0 \text{ に対して,} \\ \text{ある } R > 0 \text{ が存在して, } B_R(0)^c \times [0, T] \text{ 上で } u \geq 0 \end{array} \right. \right\}. \end{aligned}$$

ここで, c は補集合を表す. また, $\text{SOL} := \text{SUB} \cap \text{SUP}$ と定める.

例 2.4 (Ω が球のときの解). $\Omega = B_R(0)$ ($R > 0$) の場合を, 初期条件 $u_0 \equiv 0$ の下で考える. まず, (1.1) の時間微分項 $u_t(x, t)$ を除いて得られる楕円型方程式 :

$$-\Delta_1 U(x) + \nu |\nabla U(x)| = c \quad \text{in } B_R(0) \quad (2.6)$$

に, ディリクレ境界条件 :

$$U(x) = 0 \quad \text{on } \partial B_R(0) \quad (2.7)$$

を課した境界値問題を解いてみる．方程式 (2.6) は $B_R(0)$ 上でのみ考えるため，右辺は $c\chi_{B_R(0)} = c$ となる．それ故，不連続性が消えていることに注意しておく．今，滑らかな解 $U(x)$ が存在して球対称 $U(x) = \psi(|x|)$ と仮定すると，(2.6) と (2.7) よりそれぞれ，

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r}\psi'(r) + \nu|\psi'(r)| &= c \quad \text{in } (0, R), \\ \psi(R) &= 0 \end{aligned}$$

が分かる． $(0, R)$ 上で $\psi' \leq 0$ と仮定してこの常微分方程式を解けば，

$$\psi(r) = \frac{c}{\nu}(R - r) + \frac{c}{\nu^2} \log \frac{\nu r + 1}{\nu R + 1} \quad (0 \leq r \leq R)$$

を得る．そして，

$$U(x) := \psi(|x|) = \frac{c}{\nu}(R - |x|) + \frac{c}{\nu^2} \log \frac{\nu|x| + 1}{\nu R + 1} \quad (|x| \leq R) \quad (2.8)$$

と定めると，これは (2.6)–(2.7) の粘性解である．実際 $U \in C^2(\overline{B_R(0)})$ であり， $B_R(0) \setminus \{0\}$ 上では， U は (2.6) を古典的な意味で満たす．原点 $x = 0$ では，

$$\nabla U(0) = 0, \quad \nabla^2 U(0) = -cI$$

であり，これより $F_*(0, -cI) = F^*(0, -cI) = -c$ となる．従って $x = 0$ においても， U は粘性解の定義の条件を満たすことが分かる．

さて，(2.8) の U を用いて，

$$u(x, t) := \begin{cases} \min\{U(x), ct\} & (x \in B_R(0)), \\ 0 & (x \notin B_R(0)) \end{cases} \quad (2.9)$$

と定めると， u は (1.1)–(1.2) の粘性解となる．(理由はここでは省略する．) グラフは図 2 のようになる． u は，最初のうちは，時間経過と共に平らな面が垂直方向に速さ c で動きつつ，周囲からは U のグラフが現れてくる，という挙動を示す (図 2 左)．結晶が $B_R(0)$ 上で垂直方向の供給を受けつつ，水平方向には削れながら降り積もっている，とも理解できる．しばらくして，高さ ct が U の最大値を超えると，それ以降は，解は動かず定常形となる (図 2 右)．これは，垂直方向の供給と，水平方向に縮む動きとが釣り合った平衡状態と思える．この定常形に達する時刻 t_0 は，

$$M_0 = \max_{\overline{B_R(0)}} U = U(0) = \frac{cR}{\nu} + \frac{c}{\nu^2} \log \frac{1}{\nu R + 1}$$

とおくとき， $t_0 = M_0/c$ で与えられる．

後の定理 4.3 で，より一般の Ω と初期値の場合でも，解が同様に定常形に達すること，そして特に初期値が 0 であれば，解が (2.9) のように表示されることを示す．

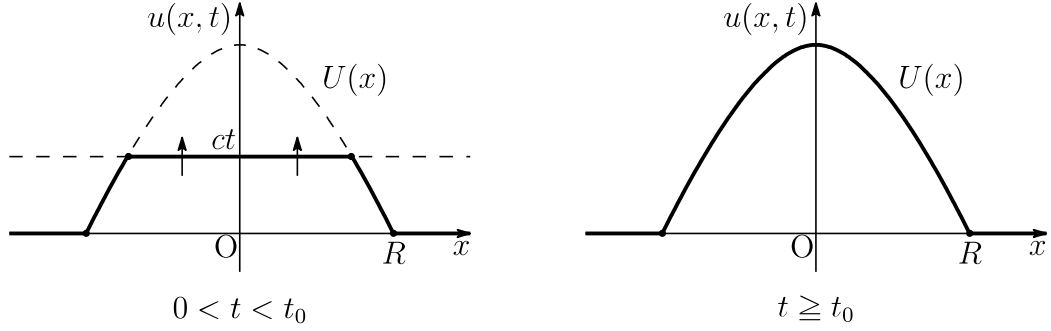


図 2: 解 $u(x, t)$ のグラフ.

3 弱比較定理

初期値問題の粘性解に対する通常の比較定理は、粘性劣解 u と粘性優解 v が \mathbf{R}^n 上で $u^*(\cdot, 0) \leq v_*(\cdot, 0)$ を満たすとき、

$$u^* \leq v_* \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0, \infty) \quad (3.1)$$

が成立することを主張する．この比較定理の下で、粘性解の一意性と、一意解の連続性が導かれる．またこのような比較定理は、方程式に適当な連続性を課して証明される ([2]). 一方、(1.1) や (1.7) のようなソース項が不連続な方程式に対しては、初期値問題の粘性解は一意とは限らず、また不連続解も存在し得る ([5, 6]). それ故、(3.1) を結論とする比較定理は一般には期待できない．そこで今回は、(3.1) よりも弱い、

$$(u^*)_* \leq v_*, \quad u^* \leq (v_*)^* \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0, \infty) \quad (3.2)$$

という形の不等式を導く．半連続包の定義より $(u^*)_* \leq u^*, v_* \leq (v_*)^*$ であるので、(3.2) の主張は、(3.1) の主張よりも実際に弱い．この (3.2) を結論とする比較定理を、ここでは、弱比較定理と呼ぶことにする．

(3.2) は、 Ω が原点に関して星型、すなわち、

$$\text{任意の } \lambda > 1 \text{ に対して、 } \bar{\Omega}/\lambda \subset \Omega^\circ \quad (3.3)$$

という仮定の下で示す．ここで、 $\bar{\Omega}/\lambda = \{x/\lambda \mid x \in \bar{\Omega}\}$ である．証明では、粘性劣解 u 、粘性優解 v の一方をスケール変換する．そのため、集合 Ω をスケール変換したときの情報として (3.3) を用いる．弱比較定理を示すために、このようなスケール変換をする手法は、[13, Appendix C] で楕円型方程式に対して用いられている．不連続粘性解に対する弱い意味での比較定理の結果として、[3] も挙げておく．

定理 3.1 (弱比較定理). 有界集合 Ω は星型 (3.3) であると仮定する． $u \in \text{SUB}, v \in \text{SUP}$ とする．このとき、(3.2) が成り立つ．

証明の概略. 簡単のため、 u^*, v_* をそれぞれ u, v で表す． $u_* \leq v$ の方を示そう．

1. $\lambda > 1$ とし、粘性劣解 u を次のようにスケール変換する：

$$u_\lambda(x, t) = \frac{1}{\lambda^2} u(\lambda x, \lambda^2 t).$$

このとき u_λ は,

$$u_t(x, t) + F(\nabla u(x, t), \nabla^2 u(x, t)) + \nu \lambda |\nabla u(x, t)| = c \chi_{\Omega/\lambda}(x) \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0, \infty) \quad (3.4)$$

の粘性劣解である．ただし F の性質 (2.5) を用いた．定数 c_λ を,

$$c_\lambda := \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \left| \frac{1}{\lambda^2} u_0(\lambda x) - u_0(x) \right|$$

と定める．初期値について $u_0 \in C_0(\mathbf{R}^n)$ なので, $\lim_{\lambda \rightarrow 1+0} c_\lambda = 0$ となる．ここで,

$$\tilde{u}_\lambda(x, t) := u_\lambda(x, t) - c_\lambda$$

とおく． \tilde{u}_λ もやはり (3.4) の粘性劣解である．さらに c_λ の定義より, \mathbf{R}^n 上で $\tilde{u}_\lambda(\cdot, 0) \leq v(\cdot, 0)$ が成り立つ．

2. $\mathbf{R}^n \times (0, \infty)$ 上で $u_* \leq v$ であることを示すには, 各 $T > 0$ に対して,

$$\liminf_{\lambda \rightarrow 1+0} \tilde{u}_\lambda \leq v \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0, T) \quad (3.5)$$

であることを示せば十分である．結論を否定すれば, ある点 $(x_0, t_0) \in \mathbf{R}^n \times (0, T)$ で,

$$\liminf_{\lambda \rightarrow 1+0} \tilde{u}_\lambda(x_0, t_0) - v(x_0, t_0) > 0$$

となるものが存在する．ここで「変数倍化」を行う． $\lambda > 1$ ($\lambda \approx 1$) とし, 関数 $\Psi : \mathbf{R}^n \times [0, T) \times \mathbf{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ を,

$$\begin{aligned} \Psi(x, t, y, s) &:= \tilde{u}_\lambda(x, t) - v(y, s) - \phi(x, t, y, s), \\ \phi(x, t, y, s) &:= \frac{|x - y|^4}{\varepsilon} + \frac{|t - s|^2}{\varepsilon} + \frac{\sigma}{T - t} \end{aligned}$$

で定める．ここで $\varepsilon, \sigma > 0$ であり, σ は λ に依存させず十分小さく取ること,

$$\Psi(x_0, t_0, x_0, t_0) > 0 \quad (3.6)$$

とできる．

3. (3.6) と, 粘性解に対する比較定理の証明における標準的な議論で, 次が分かる :

- Ψ は最大点 $Z_\varepsilon = (x_\varepsilon, t_\varepsilon, y_\varepsilon, s_\varepsilon)$ を持つ．特に $\phi_1(x, t) := \phi(x, t, y_\varepsilon, s_\varepsilon)$, $\phi_2(y, s) := -\phi(x_\varepsilon, t_\varepsilon, y, s)$ とするとき,

$$\tilde{u}_\lambda - \phi_1 \text{ は点 } (x_\varepsilon, t_\varepsilon) \text{ で最大, } v - \phi_2 \text{ は点 } (y_\varepsilon, s_\varepsilon) \text{ で最小.} \quad (3.7)$$

- 最大点 $\{Z_\varepsilon\}$ は, λ と ε について一様に有界．
- 各 $\lambda > 1$ に対し, 必要なら部分列を取ること, ある $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbf{R}^n \times (0, T)$ に対し,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} Z_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (x_\varepsilon, t_\varepsilon, y_\varepsilon, s_\varepsilon) = (\bar{x}, \bar{t}, \bar{x}, \bar{t}).$$

4.

$$p_\varepsilon := \nabla_x \phi(Z_\varepsilon) = -\nabla_y \phi(Z_\varepsilon) = \frac{4}{\varepsilon} |x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2 (x_\varepsilon - y_\varepsilon),$$

$$\tau_\varepsilon := \phi_t(Z_\varepsilon) - \frac{\sigma}{(t_\varepsilon - T)^2} = -\phi_s(Z_\varepsilon) = \frac{2}{\varepsilon} (t_\varepsilon - s_\varepsilon)$$

と定める. ここで $\lambda > 1$ は固定して, 以下の場合分けをする.

Case 1: 部分列 $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty \subset (0, 1]$ で, $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$ かつ $p_{\varepsilon_k} \neq 0$ ($k \in \mathbb{N}$) を満たすものが存在する場合. (添字の k は以降省略する.) このとき, Crandall-石井の補題 ([2, Theorem 8.3]) により, ある $X_\varepsilon, Y_\varepsilon \in \mathbf{S}^n$ で $X_\varepsilon + Y_\varepsilon \leq O$ を満たすものが存在して,

$$\tau_\varepsilon + \frac{\sigma}{(t_\varepsilon - T)^2} + F(p_\varepsilon, X_\varepsilon) + \nu\lambda|p_\varepsilon| \leq c\chi_{\bar{\Omega}/\lambda}(x_\varepsilon),$$

$$\tau_\varepsilon + F(p_\varepsilon, -Y_\varepsilon) + \nu|p_\varepsilon| \geq c\chi_{\Omega^\circ}(y_\varepsilon)$$

が成り立つ. なお $p_\varepsilon \neq 0$ なので, $F_*(p_\varepsilon, X_\varepsilon) = F(p_\varepsilon, X_\varepsilon)$, $F^*(p_\varepsilon, -Y_\varepsilon) = F(p_\varepsilon, -Y_\varepsilon)$ となることを用いた. 上記の2つの不等式の差を取る. (2.3) より $F(p_\varepsilon, X_\varepsilon) \geq F(p_\varepsilon, -Y_\varepsilon)$ であることに注意すると,

$$\frac{\sigma}{T^2} + \nu(\lambda - 1)|p_\varepsilon| \leq c\chi_{\bar{\Omega}/\lambda}(x_\varepsilon) - c\chi_{\Omega^\circ}(y_\varepsilon). \quad (3.8)$$

そして今, $\nu > 0$ かつ $\lambda > 1$ であるから,

$$\frac{\sigma}{T^2} \leq c\chi_{\bar{\Omega}/\lambda}(x_\varepsilon) - c\chi_{\Omega^\circ}(y_\varepsilon) \quad (3.9)$$

となる.

Case 2: 十分小さい全ての $\varepsilon > 0$ に対して $p_\varepsilon = 0$ である場合. このとき, (3.7) の関数 ϕ_1 と ϕ_2 は,

$$\nabla \phi_1(x_\varepsilon, t_\varepsilon) = \nabla \phi_2(y_\varepsilon, s_\varepsilon) = 0, \quad \nabla^2 \phi_1(x_\varepsilon, t_\varepsilon) = \nabla^2 \phi_2(y_\varepsilon, s_\varepsilon) = O$$

を満たす. 従って粘性解の定義により,

$$\tau_\varepsilon + \frac{\sigma}{(t_\varepsilon - T)^2} + F_*(0, O) \leq c\chi_{\bar{\Omega}/\lambda}(x_\varepsilon),$$

$$\tau_\varepsilon + F^*(0, O) \geq c\chi_{\Omega^\circ}(y_\varepsilon).$$

これらの差を取れば, (2.4) より再び (3.9) を得る.

最後に (3.9) で $\varepsilon \rightarrow +0$ として,

$$\frac{\sigma}{T^2} \leq c\chi_{\bar{\Omega}/\lambda}(\bar{x}) - c\chi_{\Omega^\circ}(\bar{x}).$$

Ω が星型であるという仮定 (3.3) より右辺は0以下なので, これは矛盾である. \square

上記の定理 3.1 の証明では, (3.8) の部分で, $\nu > 0$ であることを用いて $\nu(\lambda - 1)|p_\varepsilon|$ を非負の項として切り捨てた. 一方で $\nu < 0$ の場合には, 同様の処理はできない. しかし, 粘性劣解 u と粘性優解 v のどちらか一方が空間変数 x についてリプシッツ連続であれば, $\{p_\varepsilon\}$ が λ と ε について一様に有界となるので, $\varepsilon \rightarrow +0, \lambda \rightarrow 1 + 0$ の順に極限を取って, 同様に矛盾を得ることができる.

リプシッツ連続性について, 具体的には, u または v に対して次を仮定する:

$$\begin{cases} \text{全ての } T > 0 \text{ に対して, ある } L > 0 \text{ が存在して,} \\ \text{全ての } x, y \in \mathbf{R}^n \text{ と } t \in [0, T] \text{ に対して, } |w(x, t) - w(y, t)| \leq L|x - y|. \end{cases} \quad (3.10)$$

定理 3.2 (弱比較定理 2). 有界集合 Ω は星型 (3.3) であると仮定する. $\nu < 0$ と仮定する. $u \in \text{SUB}, v \in \text{SUP}$ とする. さらに, u または v の少なくとも一方は (3.10) を満たすと仮定する. このとき, (3.2) が成り立つ.

証明の概略. 定理 3.1 の証明の記号を引き続き用いる. u または v のリプシッツ連続性 (3.10) により, $\{p_\varepsilon\}$ は λ と ε について一様有界となる. よって各 $\lambda > 1$ に対し,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} p_\varepsilon = \bar{p}_\lambda \in \mathbf{R}^n$$

と仮定してよい. このとき, (3.8) で $\varepsilon \rightarrow +0$ とし, (3.3) を用いると,

$$\frac{\sigma}{T^2} + \nu(\lambda - 1)|\bar{p}_\lambda| \leq c\chi_{\bar{\Omega}/\lambda}(\bar{x}) - c\chi_{\Omega^0}(\bar{x}) \leq 0.$$

$\{\bar{p}_\lambda\}$ は λ について有界である. また, σ は λ に依存しないのであった. 従って $\lambda \rightarrow 1 + 0$ として, 矛盾を得る. \square

注意 3.3. 証明を振り返ると, 定理 3.1, 3.2 は, 次のように方程式を一般化しても成り立つことが分かる.

- $F : (\mathbf{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{R}$ は (2.1) に限らず, (2.2)–(2.5) を満たすものであればよい.
- (1.1) の右辺は $c\chi_\Omega(x)$ に限らず, 関数 $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ で,

$$\text{任意の } \lambda > 1 \text{ と } x \in \mathbf{R}^n \text{ に対して, } f^*(\lambda x) \leq f_*(x)$$

を満たすものであればよい.

弱比較定理 3.1 の下では, 次の一意性の結果が得られる:

系 3.4 (一意性). 有界集合 Ω は星型 (3.3) であると仮定する. $u, v \in \text{SOL}$ とする.

- (1) $\mathbf{R}^n \times [0, \infty)$ 上で $u^* = v^*, u_* = v_*$ が成り立つ.
- (2) u, v の一方が $\mathbf{R}^n \times [0, \infty)$ 上で連続ならば, $\mathbf{R}^n \times [0, \infty)$ 上で $u = v$ が成り立つ.

注意 3.5. 系 3.4 の (1) は, 上半連続な粘性解, 下半連続な粘性解が, それぞれ一意であることを主張している. また (2) は, 連続な粘性解がもし存在するならば (何らかの方法で連続な粘性解が見つければ), それ以外には解が無いことを保証する.

4 解の漸近形

例 2.4 では、 Ω が球のとき、解は Ω 上での垂直方向の成長と、水平方向に縮む動きとを組み合わせた挙動をすることを観察した。また解は、有限時刻で定常形に達した。このようなことが、一般の Ω に対しても成り立つことを示そう。解が水平方向に縮むためには、(1.4) で与えられる成長速度 V が負であればよい。そこで、 Ω の形状に関して、次の条件を一時的に考える：

$$\kappa_{\partial\Omega} < \nu \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (4.1)$$

ここで $\kappa_{\partial\Omega} = \kappa_{\partial\Omega}(x)$ は、 $x \in \partial\Omega$ における、 Ω から Ω^c の方向への $\partial\Omega$ の平均曲率を表す。このとき、等高面が $\partial\Omega$ に一致すれば $V = \kappa - \nu < 0$ となるため、 Ω 上で垂直方向に積もった結晶が、 $\partial\Omega$ から縮んでいくことが期待される。全ての等高面で縮むことは自明ではないものの、解が例 2.4 のものと同様の挙動をすることを、実際に示すことができる。

以降、 $\partial\Omega$ の滑らかさを要求する曲率の条件 (4.1) の代わりに、対応する外部球条件を考える。すなわち、半径が $1/\nu$ より大きい外部球が存在する、という次の条件を課す：

$$\begin{cases} \text{任意の } z \in \partial\Omega \text{ に対して、ある } x_0 \in \Omega^c \text{ と } r > \frac{1}{\nu} \text{ が存在して、} \\ B_r(x_0) \text{ が } z \text{ における } \Omega \text{ の外部球となる。} \end{cases} \quad (4.2)$$

ここで、球 $B_r(x_0)$ が $z \in \partial\Omega$ における Ω の外部球であるとは、 $B_r(x_0) \subset \Omega^c$ かつ $z \in \partial B_r(x_0)$ であることを意味する。

解の定常形を得るため、例 2.4 と同様、(1.1) に対応する楕円型方程式の境界値問題：

$$-\Delta_1 U(x) + \nu |\nabla U(x)| = c \quad \text{in } \Omega, \quad (4.3)$$

$$U(x) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (4.4)$$

を考える。未知関数は $U : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}$ で、 Ω は開集合としておく。方程式 (4.3) は Ω 上で考えるので、不連続性はやはり消えていることに注意しよう。なお境界条件 (4.4) は、いわゆる粘性解の意味 ([2, Section 7]) ではなく通常の意味、つまり「全ての $x \in \partial\Omega$ で $U(x) = 0$ 」という条件として以下扱う。

(4.3)–(4.4) の粘性解は一意的に存在する。

定理 4.1 (楕円型問題の解の一意的存在). 有界開集合 Ω は外部球条件 (4.2) を満たすと仮定する。このとき、(4.3)–(4.4) の粘性解 U が一意的に存在する。また U は、 $\bar{\Omega}$ 上で非負かつ連続である。

証明の概略. 1. 粘性解の一意性と連続性は、比較定理より導かれる。この比較定理は、方程式 (4.3) の左辺の同次性を利用することで、1 階のアイコナル方程式に対する比較定理 ([12]) と同様の方法で証明できる。

2. 粘性解の存在は、ペロンの方法で示す。そのために、境界条件 (4.4) を満たす粘性劣解 W^- と粘性優解 W^+ が必要になる。粘性劣解としては、定数関数 $W^- \equiv 0$ を用いればよい。なおこれより、解の非負性が分かる。一方で粘性優解を構成するために、外部球条件

(4.2) を用いる．具体的には，各 $z \in \partial\Omega$ に対応する (4.2) の外部球 $B_r(x_0)$ に対し，その境界 $\partial B_r(x_0)$ を 0-等高面とする錐状の関数：

$$l_z(x) := \frac{c}{\nu - (1/r)}(|x - x_0| - r)$$

をまず考える．各 l_z は (4.3) の粘性優解であることが，直接計算で分かる．また $\bar{\Omega}$ 上で $l_z \geq 0$ かつ $l_z(z) = 0$ を満たす．そこで，

$$W^+(x) := \inf_{z \in \partial\Omega} l_z(x)$$

と定めれば，粘性解の安定性により W^+ は (4.3) の粘性優解となる．さらに W^+ は，境界条件 (4.4) も満たしている． \square

注意 4.2. 外部球条件 (4.2) は，より一般的な次の条件に置き換えられる：

$$\text{任意の } z \in \partial\Omega \text{ に対して, } \inf_{r > 1/\nu} \frac{c}{\nu - (1/r)}(\text{dist}(z, \Omega_r) - r) = 0.$$

ここで， $\Omega_r = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \overline{B_r(x)} \subset \Omega^c\}$ である．この条件を用いると，境界 $\partial\Omega$ 上の点で，外部球の半径がちょうど $1/\nu$ となる点も，場合によっては許せることが分かる．詳しくは [11] を参照．

定理 4.1 で得た一意解 U が，(1.1)–(1.2) の粘性解の定常形を与える．有限時刻で U に達することも証明できる．

定理 4.3 (解の漸近形). 有界開集合 Ω は星型 (3.3) で，外部球条件 (4.2) を満たすと仮定する． U を (4.3)–(4.4) の粘性解とし， $t_0 := (\max_{\bar{\Omega}} U)/c$ と定める．

(1) \mathbf{R}^n 上で $u_0 \equiv 0$ と仮定する．このとき，

$$u(x, t) = \begin{cases} \min\{U(x), ct\} & (x \in \Omega), \\ 0 & (x \notin \Omega) \end{cases} \quad (4.5)$$

が (1.1)–(1.2) の一意解となる．特に，

$$u(x, t) = \begin{cases} U(x) & (x \in \Omega), \\ 0 & (x \notin \Omega), \end{cases} \quad (t \geq t_0) \quad (4.6)$$

が成り立つ．

(2) Ω 上で $u_0 \geq 0$ ， Ω^c 上で $u_0 \equiv 0$ と仮定する．このとき，任意の $u \in \text{SOL}$ に対して，(4.6) が成り立つ．

証明の概略. (1) (4.5) の u が解であることの証明は省略する． u は $\mathbf{R}^n \times [0, \infty)$ 上で連続なので，系 3.4 (2) によりこれが一意解となる．

(2) (4.5) の関数を u^- で表すことにすると, $u^- \in \text{SUB}$ となる. 一方で,

$$u^+(x, t) := \begin{cases} U(x) & (x \in \Omega, U(x) \leq ct), \\ ct + \sup_{\mathbf{R}^n} |u_0| & (x \in \Omega, U(x) > ct), \\ 0 & (x \notin \Omega) \end{cases} \quad (4.7)$$

と定めると, $u^+ \in \text{SUP}$ であることが証明できる. すると弱比較定理 3.1 より, $\mathbf{R}^n \times [0, \infty)$ 上で $u^- \leq u \leq u^+$ となる. u^\pm は (4.6) を満たすので, u も (4.6) を満たす. \square

5 おわりに

論文 [11] では, 定常形の決定以外に, [13] に基づく方法で初期値問題 (1.1)–(1.2) に対する離散ゲーム解釈を与え, 値関数の極限としての解の表示を導いている. 方程式のソース項 $c\chi_\Omega(x)$ は, ゲームのランニングコストとして解釈される. さらにその公式を応用して, ある Ω の場合に, 非自明解 u の存在と, その漸近速度 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)/t$ を求めている. ゲームの各プレイヤーの戦略を解析することで, 値関数を評価して示している.

2次元核生成による結晶成長は, ステップ源の位置が, ある領域 $U \subset \mathbf{R}^n$ の境界 ∂U とみなせる場合, 初期値・境界値問題としても記述できる. このとき, 方程式にソース項を付ける代わりに, 領域境界で, 解の成長速度を指定する動的境界条件:

$$u_t(x, t) = c \quad \text{on } \partial U \times (0, \infty) \quad (5.1)$$

を課す. このような動的境界値問題の粘性解の一意存在を, U が半空間の場合に [10] で示している. 動的境界条件 (5.1) の下での粘性解は, ディリクレ境界条件:

$$u(x, t) = ct + u_0(x) \quad \text{on } \partial U \times (0, \infty)$$

の下での粘性解とは一般に異なるので注意したい.

参考文献

- [1] W. K. Burton, N. Cabrera, F. C. Frank, *The growth of crystals and the equilibrium structure of their surfaces*, Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. **243** (1951), 299–358.
- [2] M. G. Crandall, H. Ishii, P.-L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **27** (1992), 1–67.
- [3] Y. Giga, *Viscosity solutions with shocks*, Comm. Pure Appl. Math. **55** (2002), 431–480.
- [4] Y. Giga, *Surface evolution equations: A level set approach*, Monographs in Mathematics **99**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

- [5] Y. Giga, N. Hamamuki, *Hamilton-Jacobi equations with discontinuous source terms*, Comm. Partial Differential Equations **38** (2013), 199–243.
- [6] Y. Giga, H. Mitake, H. V. Tran, *On asymptotic speed of solutions to level-set mean curvature flow equations with driving and source terms*, SIAM J. Math. Anal. **48** (2016), 3515–3546.
- [7] Y. Giga, H. Mitake, H. V. Tran, *Remarks on large time behavior of level-set mean curvature flow equations with driving and source terms*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **25** (2020), 3983–3999.
- [8] Y. Giga, H. Mitake, T. Ohtsuka, H. V. Tran, *Existence of asymptotic speed of solutions to birth-and-spread type nonlinear partial differential equations*, Indiana Univ. Math. J. **70** (2021), 121–156.
- [9] N. Hamamuki, *On large time behavior of Hamilton-Jacobi equations with discontinuous source terms*, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. **36** (2013), Nonlinear Analysis in Interdisciplinary Sciences, 83–112.
- [10] N. Hamamuki, *Uniqueness and existence of viscosity solutions under a degenerate dynamic boundary condition*, preprint, Hokkaido University Preprint Series in Mathematics, <https://eprints.lib.hokudai.ac.jp/dspace/handle/2115/77215>
- [11] N. Hamamuki, K. Misu, *Asymptotic shape of solutions to the mean curvature flow equation with discontinuous source terms*, in preparation.
- [12] H. Ishii, *A simple, direct proof of uniqueness for solutions of the Hamilton-Jacobi equations of eikonal type*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 247–251.
- [13] R. V. Kohn, S. Serfaty, *A deterministic-control-based approach to motion by curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **59** (2006), 344–407.
- [14] M. Ohara, R. C. Reid, *Modeling Crystal Growth Rates from Solution*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
- [15] G. Sazaki, S. Zepeda, S. Nakatsubo, E. Yokoyama, Y. Furukawa, *Elementary steps at the surface of ice crystals visualized by advanced optical microscopy*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **107** (2010), 19702–19707.