球面とガウス空間上の固有値問題の関係

東京都立大学　高津 飛鳥

asuka@tmu.ac.jp

概要

球面とガウス空間上の固有値問題の既知の結果を復習した後に, ガウス空間の半空間上のディリクレ固有値問題を高次元球面の開球体上のディリクレ固有値問題で近似することの困難さを説明する.

1　記号

このノートでは, ユークリッド空間の標準内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と書き, $|\cdot|_2 := \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$ とおく. そしてユークリッド空間のラプラス作用素を Δ と書き, ユークリッド空間の微分可能な関数 f の勾配ベクトルを ∇f と記す. また, $\mathbb{N}_0$ は 0 以上の整数からなる集合を意味する.

以下, 断りのない限り,

$$n, N, j \in \mathbb{N} \qquad n, 2 \leq N, \qquad k, m \in \mathbb{N}_0, \qquad a, a_N, \alpha > 0, \qquad \theta_N \in (0,\pi), \qquad R \in \mathbb{R}$$

とする. さらに

$$\lim_{N\to\infty} \frac{a_N}{\sqrt{N-1}} = \alpha, \qquad \lim_{N\to\infty} a_N \cos\theta_N = \alpha R$$

を仮定する. また, $K = (K_i)_{i=1}^n \in \mathbb{N}_0^n$ および $k \in \mathbb{N}_0$ に対し,

$$|K| := \sum_{i=1}^n K_i, \qquad \mathbb{N}_0^n(k) := \{K \in \mathbb{N}_0^n \mid |K| = k\}$$

とおく. そして $k \in \mathbb{N}_0$ に対し, $[k]$ は k を超えない最大の自然数とし, I_n は n 次単位行列とする. また, $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N+1-n}$ に対し x を対応させる射影 p_n^N と記す.

本ノートの構成は以下の通りである.: まず, 2 章では球面とガウス空間上の閉固有値問題に対する既知の結果を復習する. とくに, 高次元球面上の閉固有値問題がガウス空間上の閉固有値問題を近似することを考察する. そして 3 章では, 球面の開球体とガウス空間の半空間上のディリクレ固有値問題に対する結果を見た後に, ガウス空間の半空間上のディリクレ固有値問題を高次元球面の開球体上のディリクレ固有値問題で近似することの困難さについて説明する.

2 閉固有値問題

2.1 球面上の閉固有値問題

半径が a である N 次元標準球面 $\mathbb{S}^N(a)$ のラプラス作用素を $\Delta_{\mathbb{S}^N(a)}$ と書く．実数 λ が $\mathbb{S}^N(a)$ 上の $\Delta_{\mathbb{S}^N(a)}$ に対する**固有値**であるとは,

$$\Delta_{\mathbb{S}^N(a)}\phi = -\lambda\phi \qquad \text{in } \mathbb{S}^N(a) \tag{1}$$

の非自明な解 $\phi \in C^2(\mathbb{S}^N(a))$ が存在することである．また, (1) の解を固有値 λ に対する $\mathbb{S}^N(a)$ の**固有関数**と呼ぶ．例えば, 定数関数は固有値 0 に対する $\mathbb{S}^N(a)$ の固有関数である．ここで $\mathbb{S}^N(a)$ の固有値がなす集合は離散的であり, そして狭義単調増加な発散する非負実数列をなす．この数列を

$$0 = \lambda_0(\mathbb{S}^N(a)) < \lambda_1(\mathbb{S}^N(a)) < \lambda_2(\mathbb{S}^N(a)) < \cdots < \lambda_k(\mathbb{S}^N(a)) < \cdots \uparrow \infty$$

と記し, $\lambda = \lambda_k(\mathbb{S}^N(a))$ に対する固有関数がなす線型空間を $E_k(\mathbb{S}^N(a))$ と記す．すると

$$\lambda_k(\mathbb{S}^N(a)) = \frac{k(k+N-1)}{a^2}$$

であり, 線型空間 $E_k(\mathbb{S}^N(a))$ は $\mathbb{R}^{N+1}$ の次数が k である斉次調和多項式 により張られる．よって,

$$\dim E_k(\mathbb{S}^N(a)) = \binom{N+k}{k} - \binom{N+k-2}{k-2}$$

が従う．ただし

$$\binom{N-2}{-2}, \ \binom{N-1}{-1} := 0$$

と約束する．これらのことは, 例えば [4, Chapter II.4] や [7, Section 2.2] を参照.

2.2 ガウス空間上の閉固有値問題

平均が 0 かつ共分散行列が $\alpha^2 I_n$ である n 次元ガウス測度を γ_α^n と書く．すなわち, γ_α^n は n 次元ルベーグ測度に絶対連続な確率測度で, その密度関数 g_α^n は

$$g_\alpha^n(x) = (2\pi\alpha^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|_2^2}{2\alpha^2}\right)$$

で与えられる．そして確率測度空間 $(\mathbb{R}^n, \gamma_\alpha^n)$ を Γ_α^n と記す．さらに Γ_α^n のラプラス作用素 $\Delta_{\Gamma_\alpha^n}$ を $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$\Delta_{\Gamma_\alpha^n} f := \Delta f + \langle \nabla \log g_\alpha^n, \nabla f \rangle$$

と定めれば, $\mathbb{R}^n$ 上の適切な関数 f_1, f_2 に対し部分積分

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f_1(x), \nabla f_2(x) \rangle \, d\gamma_\alpha^n(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} f_1(x) \Delta_{\Gamma_\alpha^n} f_2(x) d\gamma_\alpha^n(x)$$

が成り立つ. また, $\Delta_{\Gamma_\alpha^n}$ は *Ornstein–Uhlenbeck* **作用素**とも呼ばれる.

実数 λ が Γ_α^n 上の $\Delta_{\Gamma_\alpha^n}$ に対する**固有値**であるとは,

$$\Delta_{\Gamma_\alpha^n} \phi = -\lambda \phi \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{2}$$

の非自明な解 $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ が存在することである. また, (2) の解を固有値 λ に対する Γ_α^n の**固有関数**と呼ぶ. 例えば, 定数関数は固有値 0 に対する Γ_α^n の固有関数である. ここで Γ_α^n の固有値がなす集合は離散的であり, そして狭義単調増加な発散する非負実数列をなす. この数列を

$$0 = \lambda_0(\Gamma_\alpha^n) < \lambda_1(\Gamma_\alpha^n) < \lambda_2(\Gamma_\alpha^n) < \cdots < \lambda_k(\Gamma_\alpha^n) < \cdots \uparrow \infty$$

と記し, $\lambda = \lambda_k(\Gamma_\alpha^n)$ に対する固有関数がなす線型空間を $E_k(\Gamma_\alpha^n)$ と記す. すると

$$\lambda_k(\Gamma_\alpha^n) = \frac{k}{\alpha^2}$$

であり, 線型空間 $E_k(\Gamma_\alpha^n)$ は

$$\left\{ x = (x_i)_{i=1}^n \mapsto \prod_{i=i}^n H_{K_i}(\alpha^{-1} x_i) \right\}_{K \in \mathbb{N}_0^n(k)}$$

で張られる. ただし H_k は

$$H_k(r) := (-1)^k e^{\frac{r^2}{2}} \frac{d^k}{dr^k} e^{-\frac{r^2}{2}}$$

の形で与えられるエルミートの多項式である. よって,

$$\dim E_k(\Gamma_\alpha^n) = \sharp \mathbb{N}_0^n(k) = \binom{n-1+k}{k}$$

が従う. これらのことは, 例えば [1, Chapter 1.3] や [7, Section 2.1] を参照.

2.3　2 つの閉固有値問題の関係

固有値については,

$$\lim_{N \to \infty} \lambda_k(\mathbb{S}^N(a_N)) = \lim_{N \to \infty} \frac{k(k+N-1)}{a_N^2} = \frac{k}{\alpha^2} = \lambda_k(\Gamma_\alpha^n)$$

が成り立つ．そして固有空間の関係は, 1922 年のリプリントである Lévy の著書 [6] や 1923 年の Wiener の論文 [10] に見られるように, 長く深い研究の歴史がある．

論文 [9, Theorem 1.1] では, $\mathbb{S}^N(a_N)$ の固有関数と射影 p_n^N の合成を考え, $N \to \infty$ における漸近挙動を描写した．この結果を述べるために,

$$E_k^n(\mathbb{S}^N(a)) := \left\{ \Phi \in E_k(\mathbb{S}^N(a)) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \text{ 上の多項式 } Q \text{ が存在して} \\ Q \circ p_n^N = \Phi \text{ が } \mathbb{S}^N(a) \text{ 上成立} \end{array} \right\}$$

とおく．そして $\Delta_{\mathbb{R}^n}^0 := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}, C_0(m) := 1$ および

$$\Delta_{\mathbb{R}^n}^j := \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)^j, \qquad c_j(m) := -\frac{1}{2j(m+2j-1)}, \qquad C_j(m) := \prod_{l=1}^j c_l(m)$$

と定め, そして $K = (K_i)_{i=1}^n \in \mathbb{N}_0^n$ と $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$x^K := \prod_{i=1}^n x_i^{K_i}$$

と定める．ただし $0^0 := 1$ と約束する．さらに

$$P_{N,n,K}(x,y) := \sum_{j=0}^{[|K|/2]} C_j(N-n)|y|_2^{2j} \Delta_{\mathbb{R}^n}^j x^K$$

と定めれば, $\{P_{N,n,K}|_{\mathbb{S}^N(a)}\}_{K \in \mathbb{N}_0^n(k)}$ は $E_k^n(\mathbb{S}^N(a))$ の基底になる．よって

$$\dim E_k^n(\mathbb{S}^N(a)) = \sharp \mathbb{N}_0^n(k) = \dim E_k(\Gamma_\alpha^n)$$

が成り立つ．また, $\mathbb{R}^n$ 上の多項式を

$$Q_{N,n,K}(x) := \sum_{j=0}^{[|K|/2]} C_j(N-n)(a_N^2 - |x|_2^2)^j \Delta_{\mathbb{R}^n}^j x^K$$

と定めれば,

$$Q_{N,n,K} \circ p_n^N = P_{N,n,K}$$

が $\mathbb{S}^N(a_N)$ 上で成り立ち, さらに $N \to \infty$ のとき, $Q_{N,n,K}$ は

$$Q_{n,K}(x) := \sum_{j=0}^{[k/2]} (-1)^j \frac{\alpha^{2j}}{2^j j!} \Delta_{\mathbb{R}^n}^j x^K$$

に $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合上で一様に, かつ $L^2(\mathbb{R}^n, \gamma_\alpha^n)$-強収束する．そして $\{Q_{n,K}\}_{K \in \mathbb{N}_0^n(k)}$ は $E_k(\Gamma_\alpha^n)$ の基底をなす．

3　ディリクレ固有値問題

3.1　球面の開球体上のディリクレ固有値問題

$\mathbb{S}^N(a_N)$ のリーマン距離関数を d_N と書き, $a_N e_1^{N+1}$ を中心とした半径 $a_N\theta_N$ の $\mathbb{S}^N(a_N)$ の開球体を Ω_N と記す．すなわち

$$\begin{aligned}\Omega_N &= \left\{z \in \mathbb{S}^N(a_N) \mid d_N(a_N e_1^{N+1}, z) < a_N\theta_N\right\}\\ &= \left\{z \in \mathbb{S}^N(a_N) \mid \langle e_1^{N+1}, z\rangle > a_N \cos\theta_N\right\}\end{aligned}$$

である．実数 λ が Ω_N 上の $\Delta_{\mathbb{S}^N(a_N)}$ に対する**ディリクレ固有値**であるとは,

$$\begin{cases}\Delta_{\mathbb{S}^N(a_N)}\phi = -\lambda\phi & \text{in } \Omega_N\\ \phi = 0 & \text{on } \partial\Omega_N\end{cases} \tag{3}$$

の非自明な解 $\phi \in C^2(\Omega_N) \cap C^0(\overline{\Omega_N})$ が存在することである．また, (3) の解を固有値 λ に対する Ω_N の**ディリクレ固有関数**と呼ぶ．すると Ω_N 上のディリクレ固有値問題は, Sturm–Liouville 問題

$$(\mathrm{D}_k^N)\quad \begin{cases}\varphi''(\theta) + (N-1)\dfrac{\cot\frac{\theta}{a_N}}{a_N}\varphi'(\theta) + \left(\lambda - \dfrac{\lambda_k(\mathbb{S}^{N-1}(1))}{a_N^2 \sin^2\frac{\theta}{a_N}}\right)\varphi(r) = 0 & \text{in } (0, a_N\theta_N)\\ \varphi(a_N\theta_N) = 0\end{cases}$$

に帰着する．さらに (D_k^N) の非自明な解 $\varphi \in C^2((0, a_N\theta_N)) \cap C([0, a_N\theta_N])$ が存在する実数 λ がなす集合は離散的であり, 狭義単調増加な発散する正数数列をなす．この数列を

$$0 < \lambda_{k,1}(\Omega_N) < \lambda_{k,2}(\Omega_N) < \cdots < \lambda_{k,j}(\Omega_N) < \cdots \uparrow \infty$$

と書けば, Ω_N のディリクレ固有値のなす集合は

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} \{\lambda_{k,j}(\Omega_N) \mid j \in \mathbb{N}\}$$

と一致する．そして $(r_N, \theta_N) : \mathbb{S}^N(a_N) \setminus \{\pm a_N e_1^{N+1}\} \to (0,\pi) \times \mathbb{S}^{N-1}(1)$ を $a_N e_1^{N+1}$ まわりの $\mathbb{S}^N(a_N)$ の極座標とする．すると $\lambda = \lambda_{k,j}(\Omega_N)$ に対する (D_k^N) の非自明な解 $\varphi_{N,k,j}$ と $\Phi \in E_{\lambda_k}(\mathbb{S}^{N-1}(1))$ に対し, $\Omega_N \setminus \{a_N e_1^{N+1}\}$ 上の関数 $\phi_{N,k,j}(\Phi; \cdot)$ を

$$\phi_{N,k,j}(\Phi; z) := \varphi_{N,k,j}(r_N(z))\Phi(\theta_N(z)) \tag{4}$$

と定めれば, $\phi_{N,k,j}(\Phi; \cdot)$ は $z = a_N e_1^{N+1}$ に滑らかに拡張可能で, 拡張された関数は固有値 $\lambda_{k,j}(\Omega_N)$ に対する Ω_N のディリクレ固有関数になる．ここで $E_{k,j}(\Omega_N)$ を (4) の形で与え

られる固有値 $\lambda_{k,j}(\Omega_N)$ に対する Ω_N のディリクレ固有関数 $\phi_{N,k,j}(\Phi;\cdot)$ がなす線形空間だとすれば,

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0, j\in\mathbb{N}} E_{k,j}(\Omega_N)$$

の $L^2(\Omega_N)$-閉包は $L^2(\Omega_N)$ と一致する. ここで $\lambda=\lambda_{k,j}(\Omega_N)$ に対する (D_k^N) の解がなす線型空間は 1 次元線型空間であり, そして

$$\dim E_{k,j}(\Omega_N)=\dim E_k(\mathbb{S}^{N-1}(1))$$

が成り立つ. また, $(k,j)\neq(0,1)$ である任意の $(k,j)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}$ に対し

$$\lambda_{0,1}(\Omega_N)<\lambda_{k,j}(\Omega_N)$$

であるが, 相異なる $(k,j),(k',j')\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}$ に対し, $\lambda_{k,j}(\Omega_N)=\lambda_{k',j'}(\Omega_N)$ となり得る. これらのことは, 例えば [4, Section II.5] 参照.

3.2 ガウス空間の開半空間上のディリクレ固有値問題

射影 p_n^N による Ω_N の像の N に関する上極限の内点集合を Ω と記す. すなわち

$$\begin{aligned}\Omega&=\mathrm{Int}\left(\limsup_{N\to\infty} p_n^N(\Omega_N)\right)\\&=\mathrm{Int}\left(\limsup_{N\to\infty}\left\{x\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; |x|_2\le a_N,\ \langle e_1^{N+1},x\rangle>a_N\cos\theta_N\right\}\right)\\&=\left\{x\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \langle e_1^n,x\rangle>\alpha R\right\}\end{aligned}$$

である. 実数 λ が Ω 上の $\Delta_{\Gamma_\alpha^n}$ に対する**ディリクレ固有値**であるとは,

$$\begin{cases}\Delta_{\Gamma_\alpha^n}\phi=-\lambda\phi & \text{in } \Omega\\ \phi=0 & \text{on } \partial\Omega\end{cases}\tag{5}$$

の非自明な解 $\phi\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ が存在することである. また, (5) の解を固有値 λ に対する Ω の**ディリクレ固有関数**と呼ぶ. すると Ω_N 上のディリクレ固有値問題同様に, Ω 上のディリクレ固有値問題は,

$$\begin{cases}\Delta_{\gamma_\alpha^1}h=-\left(\lambda-\dfrac{k}{\alpha^2}\right)h & \text{in } (\alpha R,\infty)\\ h(\alpha R)=0\end{cases}\tag{P$_k$}$$

すなわち, $(\alpha R,\infty)$ 上の $\Delta_{\Gamma_\alpha^1}$ に対するディリクレ固有値問題に帰着することができる. さらに (P_k) の非自明な解 $h\in C^2((\alpha R,\infty))\cap C([\alpha R,\infty))$ が存在する実数 λ がなす集合は離散的であり, 狭義単調増加な発散する正数数列をなす. この数列を

$$0<\lambda_{k,1}(\Omega)<\lambda_{k,2}(\Omega)<\cdots<\lambda_{k,j}(\Omega)(\Omega)<\cdots\uparrow\infty$$

と書けば, Ω のディリクレ固有値のなす集合は

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}\{\lambda_{k,j}(\Omega)\mid j\in\mathbb{N}\}$$

と一致する．そして $\lambda=\lambda_{k,j}(\Omega)$ に対する (P_k) の非自明な解 $h_{k,j}$ と $K\in\mathbb{N}_0^{n-1}(k)$ に対し, $x=(x_1,x')\in\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$ 上の関数 $\psi_{K,j}$ を

$$\psi_{K,j}(x_1,x'):=\begin{cases}h_{k,j}(x_1) & \text{if } n=1\\ h_{k,j}(x_1)Q_{n-1,K}(x') & \text{if } n\geq 2\end{cases} \tag{6}$$

と定めれば, $\psi_{K,j}(\Phi;\cdot)$ は $z=a_Ne_1^{N+1}$ は $\lambda_{k,j}(\Omega)$ に対する Ω のディリクレ固有関数になる．さらに $E_{k,j}(\Omega)$ を (6) の形で与えられる固有値 $\lambda_{k,j}(\Omega)$ に対する Ω のディリクレ固有関数 $\psi_{K,j}$ がなす線形空間だとすれば,

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0,j\in\mathbb{N}}E_{k,j}(\Omega)$$

の $L^2(\Omega,\gamma_\alpha^n)$-閉包は $L^2(\Omega,\gamma_\alpha^n)$ と一致する．ここで $\lambda=\lambda_{k,j}(\Omega)$ に対する (P_k) の解がなす線型空間は 1 次元線型空間であり, そして

$$\dim E_{k,j}(\Omega)=\dim E_k(\Gamma_\alpha^{n-1})$$

である．また, $(k,j)\neq(0,1)$ を満たすである任意の $(k,j)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}$ に対し

$$\lambda_{0,1}(\Omega)<\lambda_{k,j}(\Omega)$$

であるが, 相異なる $(k,j),(k',j')\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}$ に対し, $\lambda_{k,j}(\Omega)=\lambda_{k',j'}(\Omega)$ となり得る.

3.3 ディリクレ固有値問題に対する考察

閉固有値問題の場合とは異なり, ディリクレ固有値 $\{\lambda_{k,j}(\Omega_N)\}_{N\geq 2}$ の $N\to\infty$ における漸近挙動は著者が知る限りでは未明な部分が多い．既知のこととしては, $\{\lambda_{0,1}(\Omega_N)\}_{N\geq 2}$ の有界性が [5, Theorem 2] から従う ([9, Lemma 4.2] 参照．また [3, p.218] も参照).

固有空間の収束を論じるために, 線型空間 $E_k^n(\mathbb{S}^N(a))$ の対応物とし

$$E_{k,j}^n(\Omega_N):=\left\{\phi\in E_{k,j}(\Omega_N)\;\middle|\;\begin{array}{l}\phi(x,y)=\phi(x,|y|_2e_1^{N+1-n})\text{ が}\\ (x,y)\in\Omega_N\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{N+1-n}\text{ 上成立}\end{array}\right\}$$

と定める．すると線型空間 $E_{k,j}^1(\Omega_N)$ が非自明になるのは, $k=0$ の場合に限る．そして $E_{0,j}^1(\Omega_N)$ は

$$\{\phi_{N,0,j}(\mathbb{1}_{\mathbb{S}^{N-1}(1)};\cdot)\}$$

で張られる 1 次元線型空間である. 一方, $n \geq 2$ の場合, 線型空間 $E_{k,j}^n(\Omega_N)$ は

$$\{\phi_{N,k,j}(\Phi;\cdot)\}_{\Phi\in E_k^{n-1}(\mathbb{S}^{N-1}(1))}$$

で張られ, その次元は $\sharp\mathbb{N}_0^{n-1}(k) = \dim E_k(\Gamma_\alpha^{n-1})$ である ([9, Proposition 5.1] 参照).

以下, 1.3 節と同様の議論をするために, $n \geq 2$ かつ $K \in \mathbb{N}_0^n(k)$ とし,

$$\phi_{N,k,j}(P_{N-1,n-1,K}|_{\mathbb{S}^{N-1}(1)};z) = \varphi_{N,k,j}(r_N(z))P_{N-1,n-1,K}(\theta_N(z))$$

を書き下すことを考える. まずは $a_N e_1^{N+1}$ まわりの $\mathbb{S}^N(a_N)$ の極座標 (r_N,θ_N) を計算すると, $z=(z_i)_{i=1}^{N+1}\in\mathbb{S}^N(a_N)$ に対し

$$r_N(z) = d_N(ae_1^{N+1},z) = a_N\cdot\arccos\frac{z_1}{a_N}$$

が成り立ち, さらに $z \neq \pm ae_1^{N+1}$ ならば

$$\theta_N(z) = \frac{(z_i)_{i=2}^N}{\sqrt{a_N^2 - z_1^2}}$$

となる. また, $x=(x_1,x')\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$ という表記を用いて $\mathbb{R}^n$ の多項式を

$$R_{N,n,K}(x_1,x') := \sum_{j=0}^{[k/2]}(a_N^2 - |x|_2^2)^j C_j(N-n)\Delta_{\mathbb{R}^{n-1}}^j x'^K$$

と定めれば, $z=(x_1,x',y)\in\mathbb{S}^N(a_N)\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^{N+1-n}$ に対し

$$P_{N-1,n-1,K}(\theta_N(z)) = a_N^{-\frac{k}{2}}\left(1-\frac{x_1^2}{a_N^2}\right)^{-\frac{k}{2}}R_{N,n,K}(x_1,x')$$

が成り立つ. 以上より, $z=(x_1,x',y)\in\Omega\setminus\{a_Ne_1^{N+1}\}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^{N+1-n}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\phi_{N,k,j}(P_{N-1,n-1,K}|_{\mathbb{S}^{N-1}(1)};z)\\
=&\varphi_{N,k,j}(r_N(z))P_{N-1,n-1,K}(\theta_N(z))\\
=&\varphi_{N,k,j}\left(a_N\cdot\arccos\left(\frac{x_1}{a_N}\right)\right)\cdot a_N^{-\frac{k}{2}}\left(1-\frac{x_1^2}{a_N^2}\right)^{-\frac{k}{2}}R_{N,n,K}(x_1,x')
\end{aligned}$$

となる. そこで $I_N := (a_N\cos\theta_N, a_N)$ 上の関数を

$$h_{N,k,j}(r) := \varphi_{N,k,j}\left(a_N\cdot\arccos\left(\frac{r}{a_N}\right)\right)$$

と定義し, $\{\phi_{N,k,j}(P_{N-1,n-1,K}|_{\mathbb{S}^{N-1}(1)};\cdot)\}_{N\geq 2}$ の $N\to\infty$ における漸近挙動を考えるために, $\{R_{N,n,K}\}_{N\geq 2}$ と $\{h_{N,k,j}\}_{N\geq 2}$ の $N\to\infty$ における漸近挙動を調べる.

まず, 任意の $(x_1, x') \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ に対し,

$$\lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{x_1^2}{a_N^2}\right)^{-\frac{k}{2}} R_{N,n,K}(x_1, x') = Q_{n-1,K}(x') \tag{7}$$

が成り立つ. 次に $h_{N,k,j}$ が満たす方程式を考える. そのために, $(-a_N, a_N)$ 上の関数を

$$s_N(r) := 1 - \frac{r^2}{a_N^2}$$

と定めると,

$$\begin{aligned} h'_{N,k,j}(r) &= -\varphi'_{N,k,j}\left(a_N \cdot \arccos\left(\frac{r}{a_N}\right)\right) \cdot s_N(r)^{-\frac{1}{2}}, \\ h''_{N,k,j}(r) &= \varphi''_{N,k,j}\left(a_N \cdot \arccos\left(\frac{r}{a_N}\right)\right) s_N(r)^{-1} \\ &\quad - \varphi'_{N,k,j}\left(a_N \cdot \arccos\left(\frac{r}{a_N}\right)\right) \cdot s_N(r)^{-\frac{3}{2}} \cdot a_N^{-2} r \end{aligned}$$

が成り立つ. よって, (D_k^N) より $h_{N,k,j}$ が満たすべき方程式は,

$$\begin{cases} s_N(r)h''(r) - \dfrac{Nr}{a_N^2}h'(r) + \left(\lambda_{k,j}(\Omega_N) - \dfrac{k(k+N-2)}{a_N^2 s_N(r)}\right)h(r) = 0 \text{ in } I_N \\ h(a_N \cos\theta_N) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

だと分かる. ここでもし, $\{\lambda_{k,j}(\Omega_N)\}_{N\geq 2}$ が $N \to \infty$ のときにある実数 $\lambda_{k,j}$ に収束すれば, $s_N \mathbb{1}_{I_N}$ が $\mathbb{R}$ 上の各点で 1 に収束するので, 形式的には方程式 (8) は

$$\begin{cases} h''(r) - \dfrac{r}{\alpha^2}h'(r) + \left(\lambda_{k,j} - \dfrac{k}{\alpha^2}\right)h(r) = 0 \text{ in } (\alpha R, \infty) \\ h(\alpha R) = 0 \end{cases}$$

に帰着する. この式は (P_k) の $\lambda = \lambda_{k,j}$ の場合に対応するので, $\{h_{N,k,j}\}_{N\geq 2}$ は $(\alpha R, \infty)$ 上の $\Delta_{\Gamma_\alpha^1}$ に対するディリクレ固有値関数に収束することが見込まれる. このことと, (6) および (7) を併せると, $L^2(\Omega, \gamma_\alpha^n)$ の関数列

$$\left\{x \mapsto \varphi_{N,k,j}\left(a_N \cdot \arccos\left(\frac{x_1}{a_N}\right)\right) \cdot a_N^{-\frac{k}{2}} \left(1 - \frac{x_1^2}{a_N^2}\right)^{-\frac{k}{2}} R_{N,n,K}(x) \cdot \mathbb{1}_{I_N}\right\}_{N\geq 2}$$

(に類するもの) は Ω 上の $\Delta_{\Gamma_\alpha^n}$ に対するディリクレ固有値関数 $\psi_{K,j}$ に収束することが期待できる. これらが成り立つ場合, $\lambda_{k,j}(\Omega_N)$ の j に関する単調性より

$$\lim_{N\to\infty} \lambda_{k,j}(\Omega_N) = \lambda_{k,j} = \lambda_{k,j}(\Omega)$$

となり, そして $\{h_{K,j}\}_{K\in\mathbb{N}_0^{n-1}(k)}$ は $E_{k,j}(\Omega)$ の基底となることも見込める.

上記のことをこの方針で証明するためには, $\{\lambda_{k,j}(\Omega_N)\}_{N\geq 2}$ の $N\to\infty$ における漸近挙動を考察する必要がある. ここで $\lambda_{k,j}(\Omega_N)$ の値は第 1 種ルジャンドルの陪関数の零点と密接に関連していることが知られている (例えば [4, Chapter XII.5] 参照).

最後に, $|K|=0$ かつ $j=1$ の場合という特別な場合を考える. すると前述の通り $\{\lambda_{0,1}(\Omega_N)\}_{N\geq 2}$ は有界であり, そして $R_{N,n,K}$ は定数関数である. さらに Ω のディリクレ固有関数が Ω 上定符号ならば, それは $E_{0,1}(\Omega)$ に属する. この特性を用いることによって,

$$\sup_{N\geq 2}\frac{a_N^2-\alpha^2(N-2)}{a_N}<\infty,\qquad a_N\cos\theta_N\geq \alpha R$$

と仮定をし, $\varphi_{N,0,1}$ を非負値かつ

$$\int_0^{a_N\theta_N}\varphi_{N,0,1}(r)^2\sin^{N-1}\left(\frac{r}{a_N}\right)dr=\int_{-a_N}^{a_N}s_N(r)^{\frac{N}{2}-1}dr$$

を満たすものとして選べば, $H_0^1(\Omega,\gamma_\alpha^n)$ の関数列

$$\left\{\psi_{N,0,1}(x_1,x'):=\varphi_{N,0,j}\left(a_N\cdot\arccos\left(\frac{x_1}{a_N}\right)\right)\cdot s_N(x_1)\cdot\sqrt{\frac{w_N(x_1)}{w_\infty(x_1)}}\cdot\mathbb{1}_{I_N}\right\}_{N\geq 2}$$

が $\|\psi\|_{L^2(\Omega,\gamma_\alpha^n)}=1$ となる $\lambda_{0,1}(\Omega)$ に対する Ω のディリクレ固有関数 ψ に $H_0^1(\Omega,\gamma_\alpha^n)$-強収束することを示せる ([9, Theorem 1.2] 参照). ただし w_N は

$$w_N(r):=s_N(r)^{\frac{N}{2}-1}\cdot\left(\int_{-a_N}^{a_N}s_N(\rho)^{\frac{N}{2}-1}d\rho\right)^{-1}$$

と定義される $(-a_N,a_N)$ 上の関数, w_∞ は

$$w_\infty(r):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha}e^{-\frac{r^2}{2\alpha^2}},$$

と定義される $\mathbb{R}$ 上の関数である. ここで $\{w_N\mathbb{1}_{(-a_N,a_N)}\}_{N\geq 2}$ は $N\to\infty$ のとき w_∞ に $\mathbb{R}$ 上各点で収束し, 2 つの数列

$$\left\{\sup_{r\in(-a_N,a_N)}\frac{w_N(r)}{w_\infty(r)}\right\}_{N\geq 2},\qquad\left\{\frac{a_N^2-\alpha^2(N-2)}{a_N}\right\}_{N\geq 2}$$

の有界性は同値である.

また, 体積が与えられた値になる球面 (あるいはガウス空間) の凸領域の中で, ディリクレ第 1 固有値が最小になるものは開球体 (あるいは半空間) であることが知られている. この事実は Brunn–Minkowski 不等式から従い, 1974 年の Sudakov と Cirel′son の論文 [8] や 1975 年の Borell の論文 [2] では, ガウス空間上の Brunn–Minkowski 不等式は球面上の Brunn–Minkowski 不等式を用いて導出されている.

参考文献

[1] V. I. Bogachev, *Gaussian measures*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 62, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[2] C. Borell, *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space*, Invent. Math. **30** (1975), 207–216.

[3] L. Caffarelli and S. Salsa, *A geometric approach to free boundary problems*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 68, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[4] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Pure and Applied Mathematics, vol. 115, Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1984. Including a chapter by Burton Randol; With an appendix by Jozef Dodziuk.

[5] S. Friedland and W. K. Hayman, *Eigenvalue inequalities for the Dirichlet problem on spheres and the growth of subharmonic functions*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), 133–161.

[6] P. Lévy, *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Avec un complément sur les fonctionnelles analytiques par F. Pellegrino*, Gauthier-Villars, Paris, 1951 (French). 2d ed.

[7] E. Milman, *Spectral estimates, contractions and hypercontractivity*, J. Spectr. Theory **8** (2018), 669–714.

[8] V. N. Sudakov and B. S. Cirel′son, *Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures*, Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **41** (1974), 14–24, 165 (Russian). Problems in the theory of probability distributions, II.

[9] A. Takatsu, *Spectral convergence of high-dimensional spheres to Gaussian spaces*, to appear J. Spectr. Theory.

[10] N. Wiener, *Differential-space*, J. Math. and Phys. **2** (1923), 131–174.