単調正規空間の積の extent について

神奈川大学・工学部　平田　康史[*1]
Yasushi Hirata
Faculty of Engineering, Kanagawa University

神奈川大学，数学アートラボ　矢島　幸信
Yukinobu Yajima
Kanagawa University, Math Art Laboratory

1　はじめに

空間は正則な T_1-位相空間とする。

空間 X の部分集合 D が**閉離散** (**closed discrete**) であるとは, X の任意の点 x に対して, その近傍 U で, $|U \cap D| \leq 1$ となるものが存在することである。また,

X の任意の閉離散部分集合 D に対して, $|D| \leq \kappa$

という条件を満たす最小の無限基数 κ のことを空間 X の **extent** といい, それを $e(X)$ であらわす。明らかに,

事実 1.1 (folklore)**.** 空間 X が可算コンパクトかリンデレーフならば, $e(X) = \omega$ である。

今後, $e(X)$ を考えるときは, 空間 X は空でないものとする。よって，$e(X) \cdot e(Y) \leq e(X \times Y)$ はいつも成り立つ。

疑問 1.2. どのような積空間 $X \times Y$ に対して, 等式 $e(X) \cdot e(Y) = e(X \times Y)$, あるいは, 不等式 $e(X) \cdot e(Y) < e(X \times Y)$ が成り立つか?

X, Y が距離空間ならば, extent は weight と一致するので, 等式 $e(X) \cdot e(Y) = e(X \times Y)$

[*1] 本研究は科研費 (課題番号:19K03606) の助成を受けたものである.

が成り立つ。K がコンパクトならば, 任意の空間 X に対して $e(X) \cdot e(K) = e(X) = e(X \times K)$ が成り立つことはよく知られている。

一方, Novák の例 [8] ([1, Example 3.10.19] 参照) を modify することで, extent の等式が成り立たない次のような例が得られる (このことは大田先生に教えていただきました [9])。

事実 1.3 ([8])**.** 可算コンパクト Tychonoff 空間 X, Y の積空間 $X \times Y$ で, $e(X) \cdot e(Y) = \omega < 2^\omega = e(X \times Y)$ となるものが存在する。

また, Sorgenfrey 直線 $\mathbb{S}$ はリンデレーフであるが, よく知られているようにその積空間 $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ には連続体濃度の閉離散部分集合 $\{(r, -r) : r \in \mathbb{S}\}$ がある。よって,

事実 1.4 (folklore)**.** Sorgenfrey 直線 $\mathbb{S}$ に対して, 不等式 $e(\mathbb{S}) \cdot e(\mathbb{S}) = \omega < 2^\omega = e(\mathbb{S} \times \mathbb{S})$ が成り立つ。

リンデレーフ空間の積の extent について, Shelah は次のことを示した。

定理 1.5 ([10])**.** リンデレーフ空間 X, Y で, $2^\omega < e(X \times Y)$ となるものが存在することは consistent である。

大きい extent をもつリンデレーフ空間の積の consistent な例についてはその後, Gorelic [2] や Usuba [12] らによって研究が進められているが, 次の問題は未解決である。

定理 1.6 ([10])**.** リンデレーフ空間 X, Y で, $2^\omega < e(X \times Y)$ となるものの存在は ZFC から証明できるか?

2 順序数の部分空間, ほとんど離散な空間と積の extent

順序数の部分空間の積空間の extent については, 2020 年に次のような結果を得た。

定理 2.1 ([4])**.** 順序数の部分空間 A, B の積空間 $A \times B$ が可算パラコンパクトならば, 等式 $e(A \times B) = e(A) \cdot e(B)$ が成り立つ。

論文 [4] においては，さらに定理 2.1 を発展させて，順序数の部分空間による積空間 $A \times B$ が可算パラコンパクトとなるための必要十分条件を与えている。これによって，この種の積空間 $A \times B$ が可算パラコンパクトであるかどうかの判定が，極めて容易となった。

定義 2.2. 空間 Y に非孤立点が高々 1 つしかないとき, Y は**ほとんど離散** (**almost discrete**) であるという。

例 2.3. λ は非可算基数とする。$e(\lambda)=\omega$ である。

(1) $\lambda+1$ の可算コンパクトな部分空間 A_λ と, リンデレーフな部分空間 B_λ で, 次の不等式を満たすものがある。

$$e(A_\lambda)\cdot e(B_\lambda)=\omega<\lambda=e(A_\lambda\times B_\lambda)$$

(2) ある無限基数 κ に対して, $\lambda=\kappa^+$ であったとすると, $\lambda+1$ のほとんど離散な部分空間 Y_λ で, 次の不等式を満たすものがある。

$$e(\lambda)\cdot e(Y_\lambda)=\kappa<\lambda=e(\lambda\times Y_\lambda)$$

実際, $\mathrm{Suc}=\{\eta+1:\eta<\lambda\}$ として, $A_\lambda=\{\alpha\in\lambda+1:\operatorname{cf}\alpha=\omega\}\cup\mathrm{Suc}$, $B_\lambda=\{\alpha\in\lambda+1:\operatorname{cf}\alpha>\omega\}\cup\mathrm{Suc}$, $Y_\lambda=\mathrm{Suc}\cup\{\lambda\}$ のようにとればよい。$\Delta=\{\langle\eta,\eta\rangle:\eta\in\mathrm{Suc}\}$ が $A_\lambda\times B_\lambda$ と $\lambda\times Y_\lambda$ の閉離散部分集合である。

上の例の (2) では, Y_λ としてほとんど離散なものをとっているが, 不等式の右辺 λ は, 左辺 κ よりは大きいものの, $\lambda=\kappa^+$ であるので, 両者の大きさにそれほど隔たりはない。一方, 順序数の部分空間でなくてもよければ, 不等式の両辺の大きさをもっと離すこともできる。実際, 任意の大きさの非可算基数 λ に対して, 濃度 λ の離散空間 $\mathbb{D}_\lambda$ の Čech-Stone コンパクト化 $\beta\mathbb{D}_\lambda$ の部分空間

$$X=\bigcup\{P:P\text{ は }\beta\mathbb{D}_\lambda\text{ の開集合で, }|P\cap\mathbb{D}_\lambda|\le\omega\}$$

をとると, 次のような例が得られる。

例 2.4 ([5])**.** 任意の非可算基数 λ に対して, 可算コンパクトな Tychonoff 空間 X と, ほとんど離散な空間 Y で, $e(X)\cdot e(Y)=\omega<\lambda=e(X\times Y)$ となるものが存在する。

ところが, 次の節で述べられるように, 順序数の部分空間 A とほとんど離散な空間 Y について, $e(A)\cdot e(Y)<e(A\times Y)$ にすることはできても, 左辺と右辺の間を, 基数 2 つ分以上離すことはできない。

3 単調正規空間とほとんど離散な空間の積

空間 X の任意の交わらない閉集合 E,F に対して, X の開集合 $M(E,F)$ を対応づけて,

(i) $E \subset M(E,F)$ かつ $F \cap \mathrm{Cl}_X(M(E,F)) = \emptyset$

となるようにできるとき, 空間 X は**正規 (normal)** であるという。さらに,

(ii) $E \subset E'$ かつ $F \supset F'$ ならば $M(E,F) \subset M(E',F')$

という条件も成り立つようにできるとき, 空間 X は**単調正規 (monotonically normal)** であるという。次の事実はよく知られている。

事実 3.1 ([3]). 空間 X が単調正規であるためには, X の任意の点 x とその開近傍 P に対して, X の開集合 $H(x,P)$ を対応づけて,

(iii) $H(x_0,P_0) \cap H(x_1,P_1) \neq \emptyset$ ならば, $x_0 \in P_1$ または $x_1 \in P_0$

となるようにできることが必要十分である。

このことから, 単調正規空間の部分空間がまた単調正規であることがわかる。

よく知られているように, 任意の距離空間 (X,d) は単調正規である。実際, (X,d) における任意の点 x とその開近傍 P に対して,

$$U(x,\varepsilon) := \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\} \subset P$$

となるように $\varepsilon = \varepsilon(x,P) > 0$ をとって, $H(x,P) = U(x,\varepsilon/2)$ とすれば, (iii) の条件が成り立つことは容易に確かめることができる。

順序数の空間は全順序位相空間であり, よって, その部分空間は一般順序空間の特殊なものであるが, 任意の一般順序空間もまた単調正規であることはよく知られている。一方, 任意の距離空間がパラコンパクトであるのに対して，順序数（の部分空間）はかならずしもそうではない。実際, 正則非可算基数はパラコンパクトでないことはよく知られている。しかしながら，パラコンパクトを弱めた被覆性のひとつであるオーソコンパクト性は, 任意の一般順序空間ももっている。

空間の部分集合による族 $\mathcal{U}$ が**内部保存 (interior preserving)** であるとは, その任意の部分族 $\mathcal{U}'$ に対して, 共通部分 $\bigcap \mathcal{U}'$ が開集合になることである。空間 X の任意の開被覆が内部保存な開細分をもつとき, X は**オーソコンパクト (orthocompact)** であるという。

前の節の最後で述べた通り, 順序数の部分空間 A とほとんど離散な空間 Y について, $e(A) \cdot e(Y)$ と $e(A \times Y)$ の間を, 基数 2 つ分以上離すことはできない。より一般に, 次の

結果が得られた。

定理 3.2 ([5])**.** X は単調正規空間, Y はほとんど離散な空間とする。このとき, 不等式 $e(X \times Y) \le e(X) \cdot (e(Y)^+)$ が成り立つ。

4 正規な積空間

順序数の部分空間 A, B の積空間 $A \times B$ が正規ならば, $A \times B$ は可算パラコンパクトであることが知られているので（[7] 参照), 定理 2.1 から次の系が得られる。

系 4.1. 順序数の部分空間 A, B について, $A \times B$ が正規ならば, $e(A \times B) = e(A) \cdot e(B)$ である。

順序数の部分空間 A とほとんど離散な空間 Y (こちらは順序数の部分空間でなくてよい) についても, $A \times Y$ が正規ならば, 等式 $e(A \times Y) = e(A) \cdot e(Y)$ が成り立つ。より一般に, 次の結果が得られた。

定理 4.2 ([6])**.** X はオーソコンパクトな単調正規空間, Y はほとんど離散な空間とする。もし $X \times Y$ が正規ならば, $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ である。

この定理から X のオーソコンパクト性の仮定を除去できるかという疑問が生じる。

疑問 4.3. X は単調正規空間, Y はほとんど離散な空間とする。もし $X \times Y$ が正規ならば, 等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つか?

これに対し, 著者たちは次の結果を得た。

定理 4.4 ([6])**.** 単調正規空間 X とほとんど離散な空間 Y で, その積空間 $X \times Y$ が正規になり, $e(X) \cdot e(Y) = \omega < e(X \times Y)$ であるような consistent な例がある。

われわれは当初, この定理の X, Y の存在が $\diamondsuit$ から導けることに気づいたが, より分析を重ねた結果, そのような X, Y の存在は, ZFC から無矛盾かつ独立なある集合論的な公理と同値であることをつきとめた。次の節ではそのことについて述べる。

5 partition property

λ は正則非可算基数で, $A \subset \lambda$ に対して, $[A]^2 = \{\langle \beta, \alpha \rangle : \beta < \alpha < \lambda\}$ とする。$f : [\lambda]^2 \to 2$ は関数, $i \in 2$ とする。次の (ア) の条件を満たすような A があるとき, そのような A を f に関する **unbounded i-homogeneous set** とよび, (イ) の条件を満たすような $A, \mathcal{F}$ があるとき, そのような $\langle A, \mathcal{F} \rangle$ を f に関する **unbounded i-subhomogeneous pair** とよぶことにする。

(ア) A は λ の unbounded な部分集合で, 任意の $\langle \beta, \alpha \rangle \in [A]^2$ に対して $f(\beta, \alpha) = i$.

(イ) A は λ の unbounded な部分集合, $\mathcal{F}$ は λ の空でない有限部分集合からなる pairwise disjoint な族で, $|\mathcal{F}| = \lambda$, であり, 任意の $\beta \in A$ と $F \in \mathcal{F}$ に対して, $\beta < \min F$ ならば, $f(\beta, \alpha) = i$ となる $\alpha \in F$ が存在する.

- 「任意の関数 $f : [\lambda]^2 \to 2$ に対して, f に関する unbounded 0-homogeneous set か unbounded 1-homogeneous set が存在する」という主張を

$$\lambda \longrightarrow (\lambda)^2_2$$

であらわす。

- 「任意の関数 $f : [\lambda]^2 \to 2$ に対して, f に関する unbounded 0-homogeneous set か unbounded 1-subhomogeneous pair が存在する」という主張を

$$\lambda \longrightarrow (\lambda, (\lambda; \mathrm{fin}\ \lambda))^2$$

であらわす。

- 「任意の関数 $f : [\lambda]^2 \to 2$ に対して, f に関する unbounded 0-subhomogeneous pair か unbounded 1-subhomogeneous pair が存在する」という主張を

$$\lambda \longrightarrow (\lambda; \mathrm{fin}\ \lambda)^2_2$$

であらわす。

A が f に関する i-homogeneous set ならば, $\mathcal{F} = \{\{\alpha\} : \alpha \in A\}$ と置けば $\langle A, \mathcal{F} \rangle$ は f に関する i-subhomogeneous pair になるので, 次の implication が成り立つ。

$$\lambda \longrightarrow (\lambda)^2_2 \quad \Rightarrow \quad \lambda \longrightarrow (\lambda, (\lambda; \mathrm{fin}\ \lambda))^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda \longrightarrow (\lambda; \mathrm{fin}\ \lambda)^2_2$$

Todorčević は次のことを証明した。

定理 5.1 ([11, Theorem 1,6])**.**

(1) ZFC が無矛盾ならば, ZFC $+$ $\omega_1 \longrightarrow (\omega_1, (\omega_1; \mathrm{fin}\ \omega_1))^2$ も無矛盾である。

(2) $\clubsuit$ を仮定すると, $\omega_1 \longrightarrow (\omega_1; \mathrm{fin}\ \omega_1)^2_2$ の否定が証明できる。

最近の研究で, 著者たちは次の結果を得た。

定理 5.2 ([6])**.** 単調正規空間 X とほとんど離散な空間 Y で, その積空間 $X \times Y$ が正規になり, $e(X) \cdot e(Y) = \omega < e(X \times Y)$ であるようなものが存在するためには, $\omega_1 \longrightarrow (\omega_1; \mathrm{fin}\ \omega_1)^2_2$ の否定が成り立つことが必要十分である。

定理 5.2 と 5.1 とから, 次の系が得られる。

系 5.3 ([6])**.** 単調正規空間 X とほとんど離散な空間 Y で, その積空間 $X \times Y$ が正規になり, $e(X) \cdot e(Y) = \omega < e(X \times Y)$ であるようなものが存在するかどうかは, ZFC だけでは決定できない。

定理 5.2 は次のように一般化することもできる。

定理 5.4 ([6])**.** κ は無限基数で, $\lambda = \kappa^+$ とする。単調正規空間 X とほとんど離散な空間 Y で, その積空間 $X \times Y$ が正規になり, $e(X) \cdot e(Y) = \kappa < e(X \times Y)$ であるようなものが存在するためには, $\lambda \longrightarrow (\lambda; \mathrm{fin}\ \lambda)^2_2$ の否定が成り立つことが必要十分である。

この定理は λ が successor cardinal の場合に関するものであるが, 次節では, λ が limit cardinal のときも考慮の対象となるような一般化について述べる。

6 limit cardinal の場合

λ は無限基数とする。空間 X に濃度 λ の閉離散部分集合が存在しないとき, X は **λ-extensive** であるということにする。successor cardinal $\lambda = \kappa^+$ の場合は明らかに次の 3 条件は同値である。

- X は λ-extensive,
- $e(X) < \lambda$,
- $e(X) \leq \kappa$.

X が可算コンパクトであることは, X が ω-extensive であることと同値である。一方, $e(X) = \lambda$ が ω か limit cardinal の場合, その情報だけでは X が λ-extensive かどうかは

判断できない。

X が単調正規空間で, Y がほとんど離散な空間の場合は, successor cardinal $\lambda = \kappa^+$ に対して, 次の 3 条件が同値であることが定理 3.2 からわかる。

- $e(X) \cdot e(Y) = \kappa < e(X \times Y)$,
- $e(X) \cdot e(Y) < \lambda = e(X \times Y)$,
- X, Y は λ-extensive であるが, $X \times Y$ は λ-extensive でない.

よって, 定理 5.4 は次のように書き換えることができる。

系 6.1 ([6])**.** λ は successor cardinal とする。積空間 $X \times Y$ が正規になるような単調正規空間 X とほとんど離散な空間 Y で, X と Y は λ-extensive であるが, $X \times Y$ が λ-extensive ではないようなものが存在するためには, $\lambda \longrightarrow (\lambda; \mathrm{fin}\ \lambda)^2_2$ の否定が成り立つことが必要十分である。

そして, succerssor cardinal の部分は, 任意の正則基数に一般化することもできる。

定理 6.2 ([6])**.** λ は正則基数とする。積空間 $X \times Y$ が正規になるような単調正規空間 X とほとんど離散な空間 Y で, X と Y は λ-extensive であるが, $X \times Y$ が λ-extensive ではないようなものが存在するためには, $\lambda \longrightarrow (\lambda; \mathrm{fin}\ \lambda)^2_2$ の否定が成り立つことが必要十分である。

定理 5.1 (2) と同様に, 次のことも示すことができる。

(3) 正則非可算基数 λ の non-reflecting な stationary set S で, $\clubsuit(S)$ が成り立つものが存在すれば, $\lambda \longrightarrow (\lambda; \mathrm{fin}\ \lambda)^2_2$ の否定が成り立つ。

系 6.3. 無限基数 λ について, 次の条件 (a) から条件 (b) が導かれる。$V = L$ ならば, (a) と (b) は同値である。

(a) $\lambda = \omega$ か λ は弱コンパクト基数である。

(b) 積空間 $X \times Y$ が正規になるような任意の単調正規空間 X とほとんど離散な空間 Y について, X と Y が λ-extensive ならば, $X \times Y$ も λ-extensive である。

参考文献

[1] R. Engelking, *General Topology*. Heldermann Verlag, Berlin (1989).

[2] I. Gorelic, *On powers of Lindelöf spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. **35** (1994), 383–401.
[3] R. W. Heath, D. Lutzer and P. Zenor, *Monotonically normal spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **178** (1973), 481–493.
[4] Y. Hirata and Y. Yajima, *A characterization of the countable paracompactness for products of ordinals*, Topology Appl. **282** (2020), 107325 (10 pages).
[5] Y. Hirata and Y. Yajima, *Inequality and equality for the extent of products with a special factor*, Topology Proc. **59** (2022), 223–241.
[6] Y. Hirata and Y. Yajima, *Undecidability for the extent of products of a monotonically normal space and a special factor*, preprint.
[7] N. Kemoto, H. Ohta and K. Tamano, *Products of spaces of ordinal numbers*, Topology Appl. **45** (1992), 245–260.
Math. Ann. **154** (1964), 365–382.
[8] J. Novák, *On the Cartesian product of two compact spaces*, Fund. Math. **40** (1953), 106–112.
[9] H. Ohta, Private communications.
[10] S. Shelah, On some problems in general topology, Contempt. Math. **192**, (1996), 91–101.
[11] S. Todorčević, *Forcing positive partition relations*, Trans. Amer. Math. Soc. **280** (1983), 703–720.
[12] T. Usuba, *G_δ-topology and compact cardinals*, Fund. Math. **246** (2019), 71–87.

Faculty of Engineering, Kanagawa University
Yokohama 221-8686, JAPAN
E-mail address: hirata-y@kanagawa-u.ac.jp

Kanagawa University
Yokohama 221-8686, JAPAN
E-mail address: yajimy01@kanagawa-u.ac.jp, mathartlab@gmail.com