増大作用素のリゾルベントに関する収束定理

千葉大学・社会科学研究院 青山耕治
Koji Aoyama
Graduate School of Social Sciences,
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H06, 47H09.
Keywords and phrases. 増大作用素, 零点, 非拡大写像, 不動点, 強収束。

概要

文献 [12] で得られた Banach 空間上の増大作用素のリゾルベントの収束に関連する結果を報告する。

1 はじめに

A を Banach 空間上の零点をもつ増大作用素, $\lambda > 0$, $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ を A のリゾルベント, $x \in E$ とする (これらの定義は次節で説明する)。本稿では, $\lambda \to \infty$ のとき, $J_\lambda x$ が収束するための十分条件に注目する。

Bruck [14] は, E が Hilbert 空間, A が極大単調作用素という仮定のもとで, $\lambda \to \infty$ のとき $J_\lambda 0$ が A の零点に収束することを示した [14, Lemma 1]。Reich [19–21] は, E が何らかの条件を満たす Banach 空間, A が m-増大作用素という仮定のもとで, $\lambda \to \infty$ のとき $J_\lambda x$ が A の零点に収束することを示した。その後, Takahashi-Ueda [25] は, Reich の結果の一つ [21, Theorem 1] を一般化した。これらの結果は, 本稿の第 3 節で紹介する。

Reich [21] および Takahashi-Ueda [25] に動機づけられ, 文献 [12] では, Takahashi-Ueda の定理 [25, Theorem 1] とは別の仮定のもとで, 同様な結論が得られることを示し, さらに, その結果を使って Banach 空間上の非拡大写像列の共通不動点問題に関する収束定理を得た。本稿の第 4 節および第 5 節において, これらの結果を紹介する。

2 準備

本稿では, E を実 Banach 空間, $\|\cdot\|$ を E またはその共役空間 E^* のノルム, $\langle x, x^* \rangle$ を $x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合とする。また, E の点列 $\{x_n\}$ が $x \in E$ に収束することを $x_n \to x$ で表す。

E の双対写像 (duality mapping) を J で表す。つまり, J は E から E^* への集合値写

像で, $x \in E$ のとき, $Jx = \left\{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\right\}$ である。

S_E を E の単位球面, つまり, $S_E = \{x \in E\colon \|x\| = 1\}$ とする。Banach 空間 E が狭義凸 (strictly convex) であるとは, $x, y \in S_E$, $x \neq y$ ならば $\|x + y\| < 2$ が成り立つときをいう。Banach 空間 E が一様凸 (uniformly convex) であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在し, $x, y \in S_E$, $\|x - y\| \geq \epsilon$ ならば $\|x + y\|/2 \leq 1 - \delta$ が成り立つときをいう。E が一様凸ならば, E は回帰的で狭義凸であることが知られている [23]。

S_E を再び E の単位球面とする。E のノルム $\|\cdot\|$ が Gâteaux 微分可能であるとは, すべての $x, y \in S$ に対して, 極限

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

が存在するときをいう。このとき, E は滑らか (smooth) であるという。E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるとは, 各 $y \in S$ に対して (2.1) が x に関して一様に収束するときをいう。E のノルムが一様に Fréchet 微分可能であるとは, (2.1) が $x, y \in S$ に関して一様に収束するときをいう。このとき, E は一様に滑らか (uniformly smooth) であるという。一様に滑らかな Banach 空間は, 回帰的であることが知られている [23]。E のノルムが Gâteaux 微分可能であることと, 双対写像 J が 1 価であることは同値になることが知られている。詳しくは, [23] を参照するとよい。

C を E の空でない部分集合, T を C から E への写像, $\mathrm{F}(T)$ を T の不動点の集合とする。つまり, $\mathrm{F}(T) = \{z \in C\colon z = Tz\}$ である。写像 T が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときをいう。K を C の空でない部分集合とし, Q を C から K の上への写像とする。Q が C から K の上への retraction であるとは, すべての $x \in K$ に対して $Qx = x$ が成り立つときをいう。Q が sunny であるとは,

$$x \in C,\ \lambda \geq 0,\ Qx + \lambda(x - Qx) \in C \Rightarrow Q\big(Qx + \lambda(x - Qx)\big) = Qx$$

が成り立つときをいう。K が C の sunny nonexpansive retract であるとは, C から K の上への sunny nonexpansive retraction [18] が存在するときをいう。

A を E から E への集合値写像とする。このとき, A とそのグラフを同一視し, $A \subset E \times E$ と表す。A の定義域を $\mathrm{D}(A)$ で, A の値域を $\mathrm{R}(A)$ で, A の零点の集合を $A^{-1}0$ で表す。つまり, $\mathrm{D}(A) = \{x \in E : Ax \neq \emptyset\}$, $\mathrm{R}(A) = \bigcup_{x \in \mathrm{D}(A)} Ax$ および $A^{-1}0 = \{x \in \mathrm{D}(A) : 0 \in Ax\}$ である。集合値写像 $A \subset E \times E$ が増大 (accretive) 作用素であるとは, $x, y \in \mathrm{D}(A)$, $u \in Ax$ および $v \in Ay$ に対して, $\langle u - v, j \rangle \geq 0$ となる $j \in J(x - y)$ が存在するときをいう。

注 1. [16, Lemma 1.1] または [26, 補助定理 3.6.1] より, $A \subset E \times E$ が増大作用素であることと, 条件

$$\lambda \geq 0,\, y_1 \in Ax_1,\, y_2 \in Ax_2 \Rightarrow \|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|$$

は同値であることがわかる。なお, [26, 補助定理 3.6.1] の証明の中のネット $\{g_\lambda\}$ の有効集合 $(0, \infty)$ の関係 $\leqq$ は, $\alpha \leqq \beta \Leftrightarrow \alpha \geq \beta$ で定義されていると読めばよい (ここで, $\geq$ は実数の不等号)。

$A \subset E \times E$ を増大作用素, I を E 上の恒等写像とする。このとき, 任意の $\lambda > 0$ に対して,

$$\overline{\mathrm{D}(A)} \subset \mathrm{R}(I + \lambda A)$$

が成り立つならば, A は値域条件 (range condition) を満たすという。ここで, $\overline{\mathrm{D}(A)}$ は $\mathrm{D}(A)$ の閉包である。増大作用素 $A \subset E \times E$ が m-増大であるとは, すべての $\lambda > 0$ に対して $\mathrm{R}(I + \lambda A) = E$ が成り立つときをいう。$A \subset E \times E$ を増大作用素, I を E 上の恒等写像, λ を正の数とする。このとき, $(I + \lambda A)^{-1}$ は $\mathrm{R}(I + \lambda A)$ から $\mathrm{D}(A)$ の上への 1 価写像であることが知られており, 写像 $(I + \lambda A)^{-1}$ を A のレゾルベント (resolvent) といい, J_λ で表す。J_λ は非拡大であり, $\mathrm{F}(J_\lambda) = A^{-1}0$ となることが知られている。詳しくは [23] を参照するとよい。

3 増大作用素のリゾルベントに関する収束定理 (先行研究)

ここでは, 増大作用素のリゾルベントに関する収束定理のうち, 本稿の主結果に関係するものを四つ紹介する。いずれも Hilbert 空間上の極大単調作用素のリゾルベントに関する Bruck [14] の結果 [14, Lemma 1] の一般化である。

定理 3.1 ([19, Theorem]). E を滑らかで回帰的な Banach 空間, $A \subset E \times E$ を零点をもつ m-増大作用素とし, E の双対写像 J は weakly sequentially continuous, つまり, E の点列 $\{x_n\}$ が x に弱収束するとき, $\{J(x_n)\}$ が $J(x)$ に weak*で収束すると仮定する。このとき, 任意の $x \in E$ に対して, $\lim_{\lambda \to \infty} J_\lambda x$ は存在し, その極限は $A^{-1}0$ に属する。

定理 3.2 ([20, Theorem 5.1]). E を滑らかで一様凸な Banach 空間, $A \subset E \times E$ を零点をもつ m-増大作用素とし, E の双対写像 J は 0 で weakly sequentially continuous, つまり, E の点列 $\{x_n\}$ が 0 に弱収束するとき, $\{J(x_n)\}$ が 0 に weak*で収束すると仮定する。このとき, 任意の $x \in E$ に対して, $\lim_{\lambda \to \infty} J_\lambda x$ は存在し, その極限は $A^{-1}0$ に属する。

文献 [20] には, 定理 3.2 の仮定「E が一様凸」を「Opial 条件」に置き換えられると書かれている。Opial 条件について詳しくは, [26, p.41] を参照されたい。

定理 3.3 ([21, Theorem 1])**.** E を一様に滑らかな Banach 空間, $A \subset E \times E$ を零点をもつ m-増大作用素とする。このとき, 任意の $x \in E$ に対して, $\lim_{\lambda\to\infty} J_\lambda x$ は存在し, その極限は $A^{-1}0$ に属する。

文献 [21] には次のような指摘があるが, その証明は書かれていない。

- 定理 3.3 の仮定「E が一様に滑らか」を次の (1) かつ (2) に弱められる。
  (1) E が回帰的で, そのノルムが一様 Gâteaux 微分可能であり,
  (2) E のすべての弱コンパクトな凸集合が非拡大写像に関して不動点性をもつ, つまり, D が E の弱コンパクトな凸部分集合, $T\colon D \to D$ が非拡大写像ならば, T は不動点をもつ。
- 定理 3.3 の仮定「A が m-増大作用素」を次の (1) かつ (2) に弱められる。
  (1) $\overline{\mathrm{D}(A)}$ が凸であり,
  (2) A が値域条件を満たす。

次の四つ目の定理は, これらの指摘を含め, 定理 3.3 を一般化したものである。

定理 3.4 ([25, Theorem 1])**.** E を回帰的な Banach 空間, $A \subset E \times E$ を値域条件を満たし零点をもつ増大作用素とし, E のノルムは一様に Gâteaux 微分可能であり, E のすべての弱コンパクトな凸部分集合は非拡大写像に関して不動点性をもつとする。C を E の閉凸部分集合で, ある $\lambda > 0$ に対して, $C \subset \mathrm{R}(I + \lambda A)$ および $J_\lambda(C) \subset C$ が成り立つと仮定する。このとき, 任意の $x \in C$ に対して, $\lim_{\lambda\to\infty} J_\lambda x$ は存在し, その極限は $A^{-1}0$ に属する。

定理 3.4 は, [25, Theorem 1] を著者が訳したものだが, 仮定の「ある $\lambda > 0$ に対して, $C \subset \mathrm{R}(I + \lambda A)$」の部分は「すべての $\lambda > 0$ に対して, $C \subset \mathrm{R}(I + \lambda A)$」と読まねばならないかもしれない。定理 3.4 については, [26, 定理 4.1.3] も参照されたい。

4 増大作用素のリゾルベントに関する収束定理 (主結果)

前節で紹介した文献 [21] には, さらに次のような指摘がある。

E が狭義凸かつ回帰的, ノルムが一様 Gâteaux 微分可能ならば, 定理 3.3 と同じ結

論が得られる。

本節では, この指摘と定理 3.4 を踏まえた増大作用素のリゾルベントに関する収束定理 ([25, Theorem 1] の変異型), および, それから直接得られる結果を紹介する。

定理 4.1 ([12, Theorem 3.1])**.** E を狭義凸で回帰的な Banach 空間, $A \subset E \times E$ を零点をもつ増大作用素, C を E の空でない閉凸部分集合とする。さらに, E のノルムは一様に Gâteaux 微分可能であり, $J_\eta(C) \subset C$ となる $\eta > 0$ が存在し, 任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\mathrm{D}(A) \subset \mathrm{R}(I + \lambda A) \text{ および } C \subset \mathrm{R}(I + \lambda A) \tag{4.1}$$

が成り立つと仮定する。 このとき, 各 $x \in C$ に対して $\lim_{\lambda\to\infty} J_\lambda x$ が存在し, その極限は $A^{-1}0 \cap C$ に属する。さらに, 写像 $Q\colon C \to A^{-1}0 \cap C$ を, $x \in C$ に対して $Qx = \lim_{\lambda\to\infty} J_\lambda x$ で定義すると, 以下が成り立つ。

- 任意の $x \in C$ および $z \in A^{-1}0 \cap C$ に対して $\langle x - Qx, J(z - Qx)\rangle \le 0$;
- Q は C から $A^{-1}0 \cap C$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

註 2. 文献 [12] において, Theorem 3.1 (上の定理 4.1) の証明に使う Lemma 3.3 の Banach limit の説明が曖昧であるが, 任意の Banach limit に対して Lemma 3.3 の結論が得られる。

定理 4.1 より, 次の系が得られる。

系 4.2 ([12, Corollary 3.5])**.** E を定理 4.1 と同じとし, $A \subset E \times E$ を零点をもつ m-増大作用素, $x \in E$ とする。このとき, $\lim_{\lambda\to\infty} J_\lambda x$ が存在し, その極限は $A^{-1}0$ に属する。また, その極限 w とするとき, 任意の $z \in A^{-1}0$ に対して $\langle x - w, J(z - w)\rangle \le 0$ が成り立つ。

証明. $C = E$ とすると, 明らかに C は E の閉凸部分集合である。A は m-増大作用素だから, 任意の $\lambda > 0$ に対して $J_\lambda(C) \subset C$ および (4.1) が成り立つ。ゆえに, 定理 4.1 より結論が得られる。 $\square$

定理 4.1 より, 非拡大写像に関する次の系も得られる。同様な結果が文献 [15,19,21,23] にもある。

系 4.3 ([12, Corollary 3.6])**.** E を狭義凸で回帰的な Banach 空間とし, E のノルムは一様に Gâteaux 微分可能とする。C を E の空でない閉凸部分集合, $T\colon C \to C$ を不動点をもつ非拡大写像, $u \in C$, z_s を $s \in (0,1)$ に対して $z_s = su + (1-s)Tz_s$ を満たす C の

点とする。このとき, $\lim_{s\downarrow 0} z_s = Qu$ である。ここで, Q は C から $\mathrm{F}(T)$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

証明. $A = I - T$ とおく。 このとき, [26, 定理 3.6.4] より, A は増大作用素であり, 任意の $\lambda > 0$ に対して $C = \mathrm{D}(A) \subset \mathrm{R}\big(I + \lambda A\big)$ が成り立つことがわかる。さらに, 任意の $s \in (0,1)$ に対して, $t = 1/s - 1$ とおけば, $J_t = (I + tA)^{-1} = z_s$ である。$A^{-1}0 = \mathrm{F}(T)$ であり, $t \to \infty$ のとき $s \downarrow 0$ であるから, 定理 4.1 より, 結論が得られる。 □

5 非拡大写像列の共通不動点問題への応用

ここでは, 前節の系 4.3 を使って, 非拡大写像列の共通不動点問題に関する結果を導く。その前に, 少し準備が必要である。

C を E の部分集合, $\{S_n\}$ を C から C への写像の列とする。$\{S_n\}$ が強非拡大性をもつ, または, 強非拡大列 (strongly nonexpansive sequence) であるとは, 次の 2 条件が成り立つときをいう [6,7]。

- 各 S_n は非拡大である。
- $\{x_n - y_n\}$ が有界で $\|x_n - y_n\| - \|S_n x_n - S_n y_n\| \to 0$ となる C の任意の点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ に対して, $x_n - y_n - (S_n x_n - S_n y_n) \to 0$ となる。

写像列 $\{S_n\}$ が写像 $T\colon C \to C$ について NST 条件 (I) を満たすとは, 次の条件が成り立つときをいう [17,24]。

> $\mathrm{F}(T) \subset \bigcap_n \mathrm{F}(S_n)$ であり, さらに, $\{y_n\}$ が C の有界点列で, $y_n - S_n y_n \to 0$ ならば, $y_n - Ty_n \to 0$ である。

註 3. 強非拡大性をもつ写像列について詳しくは, 文献 [4,6,7,10,11,28] を参照されたい。また, 文献 [1–3,5,8,9] でも, 写像列の強非拡大性を扱っている。

註 4. $\{S_n\}$ が T について NST 条件 (I) をみたすとき, $\mathrm{F}(T) = \bigcap_n \mathrm{F}(S_n)$ である [11, Remark 2.4]。

系 4.3 および [11, Lemma 3.3] を使うと, 強非拡大列に関する次の収束定理が得られる。

定理 5.1 ([12, Theorem 4.1 の一部])**.** E を狭義凸で回帰的な Banach 空間, C を E の空でない閉凸部分集合, $\{S_n\}$ を C から C への強非拡大性をもつ写像の列, F を $\{S_n\}$ の共

通不動点の集合, $\{\alpha_n\}$ を $(0,1]$ の数列とし, C の点列 $\{x_n\}$ を $u \in C$, $x_1 \in C$ および任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n) S_n x_n$$

で定義する。さらに, E のノルムは一様 Gâteaux 微分可能であり, $F \neq \emptyset$, $\alpha_n \to 0$, $\sum_n \alpha_n = \infty$ であり, $\{S_n\}$ は非拡大写像 $T \colon C \to C$ について NST 条件 (I) を満たすと仮定する。このとき, $\{x_n\}$ は $Qu \in F$ に強収束する。ここで, Q は C から F の上への sunny nonexpansive retraction である。

証明. T は非拡大であるから, 任意の $s \in (0,1)$ に対して, $z_s = su + (1-s)Tz_s$ を満たす C の点 z_s が存在する。系 4.3 より, $s \downarrow 0$ のとき $z_s \to Qu$ である。ゆえに, [11, Lemma 3.3] より結論が得られる。 □

註 5. [11, Theorem 3.1] の仮定の一つ「E は非拡大写像に関して不動点性をもつ」を, 「E は狭義凸」に置き換えたものが, 定理 5.1 である。

一様凸な Banach 空間は, 回帰的かつ狭義凸だから, 定理 5.1 から次の系が得られる。

系 5.2 ([11, Corollary 3.4]). E を一様凸な Banach 空間とし, E のノルムは一様 Gâteaux 微分可能であると仮定する。また, C, $\{S_n\}$, T, $\{\alpha_n\}$, u, $\{x_n\}$ および Q は定理 5.1 と同じとする。このとき, $\{x_n\}$ は Qu に強収束する。

系 5.2 の応用については, [10, Theorem 3.1], [11, Theorems 4.1, 4.5] および [27] を参照されたい。

最後に, 強非拡大写像に関する結果を述べる。C を Banach 空間 E の空でない部分集合とするとき, 写像 $T \colon C \to E$ が強非拡大 (strongly nonexpansive) であるとは, 次の 2 条件が成り立つときをいう [13]。

- T は非拡大である。
- $\{x_n - y_n\}$ が有界で $\|x_n - y_n\| - \|Tx_n - Ty_n\| \to 0$ となる C の任意の点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ に対して, $x_n - y_n - (Tx_n - Ty_n) \to 0$ となる。

写像 T が不動点をもつ強非拡大写像のとき, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $S_n = T$ とおくと, $\{S_n\}$ は強非拡大列であり, $\{S_n\}$ は T に関して NST 条件 (I) を満たす。ゆえに, 定理 5.1 より, 次の系が得られる。

系 5.3. E, C, $\{\alpha_n\}$ および u を定理 5.1 と同じとし, $T \colon C \to C$ を不動点をもつ強非拡

大写像, $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$ および任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) T x_n$$

で定義される点列とする。このとき, $\{x_n\}$ は Qu に強収束する。ここで Q は C から $\mathrm{F}(T)$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

系 5.3 は, [22, Theorem 4] の一般化である [11, Remark 3.7]。

参考文献

[1] K. Aoyama, *Asymptotic fixed points of sequences of quasi-nonexpansive type mappings*, Banach and function spaces III (ISBFS 2009), 2011, pp. 343–350.

[2] ———, *Viscosity approximation method for quasinonexpansive mappings with contraction-like mappings*, Nihonkai Math. J. **27** (2016), 168–180.

[3] ———, *Uniformly nonexpansive sequences*, Linear Nonlinear Anal. **3** (2017), 179–187.

[4] K. Aoyama and Y. Kimura, *Strong convergence theorems for strongly nonexpansive sequences*, Appl. Math. Comput. **217** (2011), 7537–7545.

[5] K. Aoyama, Y. Kimura, and F. Kohsaka, *Strong convergence theorems for strongly relatively nonexpansive sequences and applications*, J. Nonlinear Anal. Optim. **3** (2012), 67–77.

[6] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *On a strongly nonexpansive sequence in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 471–489.

[7] ———, *Strongly nonexpansive sequences and their applications in Banach spaces*, Fixed point theory and its applications, 2008, pp. 1–18.

[8] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Strongly relatively nonexpansive sequences generated by firmly nonexpansive-like mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:95, 13.

[9] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 201–224.

[10] K. Aoyama and M. Toyoda, *Approximation of zeros of accretive operators in a Banach space*, Israel J. Math. **220** (2017), 803–816.

[11] ———, *Approximation of common fixed points of strongly nonexpansive sequences in a Banach space*, J. Fixed Point Theory Appl. **21** (2019), Art. 35, 16.

[12] ———, *Approximation of zeros of an accretive operator and fixed points of nonexpansive mappings in a Banach space*, Linear Nonlinear Anal. **6** (2020), 303–313.

[13] R. E. Bruck and S. Reich, *Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Houston J. Math. **3** (1977), 459–470.

[14] R. E. Bruck Jr., *A strongly convergent iterative solution of* $0 \in U(x)$ *for a maximal monotone operator* U *in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **48** (1974), 114–126.

[15] K. Goebel and S. Reich, *Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 83, Marcel Dekker, Inc., New York, 1984.

[16] T. Kato, *Nonlinear semigroups and evolution equations*, J. Math. Soc. Japan **19** (1967), 508–520.

[17] K. Nakajo, K. Shimoji, and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 11–34.

[18] S. Reich, *Asymptotic behavior of contractions in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **44** (1973), 57–70.

[19] ———, *Approximating zeros of accretive operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **51** (1975), 381–384.

[20] ———, *Extension problems for accretive sets in Banach spaces*, J. Functional Analysis **26** (1977), 378–395.

[21] ———, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **75** (1980), 287–292.

[22] S. Saejung, *Halpern's iteration in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **73** (2010), 3431–3439.

[23] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000. Fixed point theory and its applications.

[24] ———, *Viscosity approximation methods for countable families of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **70** (2009), 719–734.

[25] W. Takahashi and Y. Ueda, *On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators*, J. Math. Anal. Appl. **104** (1984), 546–553.

[26] 高橋渉, 非線形関数解析学 — 不動点定理とその周辺 (現代数学ゼミナール), 近代科学社, 1988.

[27] 青山耕治, 強非拡大性をもつ写像列の不動点近似について, 京都大学数理解析研究所講究録, 投稿中.

[28] ———, 強非拡大写像列について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1667** (2009), 28–38.