EXPLORATION AROUND STRONG CONVERGENCE THEOREMS I

強収束定理をめぐって I

高橋非線形解析研究所　竹内 幸雄 (Yukio Takeuchi)
Takahashi Institute for Nonlinear Analysisl

1. 主題

本稿で強収束定理と表現する対象は "Banach 空間 E の弱 compact 凸集合 C 上の非拡大自己写像 T について, 不動点 $z \in F(T) = \{y \in C : Ty = y\}$ に強収束する点列の生成手順を, 適切な条件の下で示したもの" です. そして, 本稿は, この様な強収束定理についての一種の survey です. 機会があれば書き継ぎたいので, 表題を I としました.

いくつかの強収束定理を 2 節で提示します. これらは, まだ評価の定まっていない定理 2.3 を除けば, 既にこの分野の古典です. このためか, 多くの研究者は, 新しい問題に向かい, この様な定理の基礎部分には立ち戻りません. しかし, 著者の様なアマチュアには, 疑問な点もあります. 例えば, Hilbert 空間においてさへ, Browder 型の定理 (定理 2.1), Halpern 型の定理 (定理 2.2), projection 型の定理 (定理 2.3 など) の相互の関係は, 十分には議論されていません. Browder の定理 2.1 については, 証明を検討することによって, 著者にもその幾何的な構造を理解できます. しかし, この定理の Banach 空間への拡張である Reich の定理 2.4 や Takahashi–Ueda の定理 2.5 については, 証明を検討しても, これらを同様の明瞭さでは理解できません. 彼らの条件の下で, 証明を論理的に追うことはできても, その証明から, 幾何的な構造が明瞭には浮かび上がってきません. 従って, 著者の様な層には, 新味はなくても, これらの定理の構造が明瞭に理解できる証明の模索, 彼らの条件が必須かどうかの再検証などは, 無意味ではないと思います.

この様な観点からの第 1 歩として, 本稿では, 強収束定理の構造, 相互の関連について, その一部を考察します. 前半では, Hilbert 空間での Browder の定理 2.1 と projection 型の定理の関係を考察します. 定理 2.1 の Banach 空間への拡張である Takahashi–Ueda の定理 2.5 は, 再考察すべき点が多い対象だと著者は考えています. しかし, それ故に, 今回は考察の対象としません. ただし, 今後に有益かもしれないので, 生成される点列の, より広い空間での性質のいくつかについては解説します. Halpern 型の定理 2.2 は Hilbert 空間の主張であるにも関わらず, 生成される点列の幾何的構造や定理 2.1 で生成される Browder 型点列との関係は, その証明からは, 明瞭とは言えません. ただし, 定理 2.2 を得た後に振り返ってわかることはあります. 後半では, この様な現状の確認と今後の準備を兼ねて, 一様 Gâteaux 微分可能なノルムを持つ一様凸 Banach 空間で, Takahashi–Ueda の定理 2.5 を仮定して, Shioji–Takahashi の定理 2.6 を導く手順を振り返ります.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H05, 47H09, 47H10, 47J25.
Key words and phrases. Browder's fixed point theorem, Halpern iteration, projection method.

2. いくつかの強収束定理

N を正の整数すべての集合, R を実数すべての集合とします. C は常に非空集合とし, 煩瑣なので "非空" を省略します. 本節で使用する記号・概念については, 新ためて次節で説明します. 例えば, Banach 空間 E から E の閉凸集合 C の上への写像としての距離射影 P_C が存在するためには, E に一定の条件を要請する必要があります.

本節の前半では, Hilbert 空間 H の有界閉凸集合 C 上の非拡大自己写像 T について, 強収束定理の典型的かつ基本的な例を提示し, 後半では, それらの拡張を提示します.

Theorem 2.1. *Let C be a bounded closed convex subset of a Hilbert space H and T be a nonexpansive self–mapping on C. Let $\{a_n\}$ be a sequence in $(0,1)$ satisfying $\lim_n a_n = 0$. Let $u \in C$ and define a sequence $\{w_n\}$ in C by*

$$w_n = a_n u + (1-a_n) w_n \quad \text{for each} \quad n \in N.$$

Then $\{w_n\}$ converges strongly to $z = P_{F(T)}u$.

定理 2.1 は, Browder の不動点定理 [1] と呼ばれ理論的に重要です. 定理 2.1 の条件を満たす制御係数 $\{a_n\}$ を b–係数と呼び, 定理 2.1 の手順で生成される点列 $\{w_n\}$ を b–係数 $\{a_n\}$ と制御点 $u \in C$ による B–点列と呼ぶことにします; 紛れがなければ, 単に B–点列と呼びます. b–係数 $\{a_n\}$ は $a_n \in (0,1)$ と $\lim_n a_n = 0$ を満たす数列です. 一般の Banach 空間でも, 他が同じ設定ならば, B–点列は生成できます. 何故なら, $n \in N$ ごとに $S_n y = a_n u + (1-a_n)y$ for $y \in C$ とすると, S_n が C 上の縮小写像であることの確認は容易です. Banach の縮小写像原理より, S_n の唯一の不動点 $w_n \in C$ が存在します.

Theorem 2.2. *Let C be a bounded closed convex subset of a Hilbert space H and T be a nonexpansive self–mapping on C. Let $\{a_n\}$ be a sequence in $(0,1)$ satisfying*

$$\text{(a)} \quad \lim_n a_n = 0, \quad \text{(b)} \quad \textstyle\sum_n a_n = \infty, \quad \text{(c)} \quad \textstyle\sum_n |a_{n+1} - a_n| < \infty.$$

Let $u \in C$ and define a sequence $\{x_n\}$ in C by $x_1 \in C$ and

$$x_{n+1} = a_n u + (1-a_n) T x_n \quad \text{for each} \quad n \in N.$$

Then $\{x_n\}$ converges strongly to $z = P_{F(T)}u$.

定理 2.2 は, Wittmann [14] による Halpern 型の強収束定理です. 定理 2.2 の条件を満たす制御係数 $\{a_n\}$ を w–係数と呼び, 定理 2.2 の手順で生成される点列 $\{x_n\}$ を w–係数 $\{a_n\}$, 制御点 u, 初期点 x_1 による W–点列と呼ぶことにします. 紛れが無ければ, 単に W–点列と呼びます. w–係数 $\{a_n\}$ は $a_n \in (0,1)$ と (a), (b), (c) を満たす数列です. 一般の Banach 空間でも, 他が同じ設定ならば, W–点列 $\{x_n\}$ が生成できることは明らかです.

(a), (b) は, 大雑把には, $\{a_n\}$ が比較的緩やかに 0 に収束することを意味します. $\{a_n\}$ が 0 に緩やかに収束し単調非増加ならば, (a)–(c) はすべて満たされます. Wittmann の条件 (c) は, 0 に緩やかに収束する $\{a_n\}$ が単調非増加から僅かにずれることを許容するものです. 同じ結論を導く, (c) とは異なる条件 (ずれの表現) も提案されています.

定理 2.1, 2.2 の他に, hybrid と呼ばれる強収束定理の範疇があります; "hybrid" という語は数理計画法から来たようです. しかし, hybrid 型という範疇は数学的にはやや曖昧です. 従って, 本稿では, この曖昧さを避けて次に説明する projection 型という範疇を扱います. C を Banach 空間 E の閉凸部分集合, T を C 上の自己写像, $u \in E$ とします.

適切な条件の下で, $\{P_{C_n}u\}$ がある $z \in F(T)$ に強収束する様な閉凸集合の族 $\{C_n\}$ の生成手順を示したものを, projection 型の強収束定理と呼ぶことにします. ただし, C_n

が一点集合 $\{y_n\}^s$ である case などを不用意に許容すると範疇が広くなりすぎます．そこで, $C_n \cap F(T) \neq \emptyset$ という制約を置くことにします; 他の制約も考えられます．

次に, ある手続きによって, $n \in N$ ごとに集合 A_n が生成できて $y_n \in A_n$ がとれるとします．この点列 $\{y_n\}$ が $z \in F(T)$ に強収束するとき, この手続きを許容範囲 $\{A_n\}$ を持つ手続きと呼びます; Takeuchi [12] を参照．A_{n+1} の生成は, 一般には, y_n と A_n に依存するかもしれません．集合 A_n も集合族 $\{A_n\}$ も許容範囲と呼びますので注意してください．

Hybrid 型の強収束定理の例として, Takahashi–Takeuchi–Kubota [9] による定理 2.3 を挙げます．この定理 2.3 は, 上述した projection 型の強収束定理です．

Theorem 2.3 (Takahashi–Takeuchi–Kubota [9])**.** *Let C be a bounded closed convex subset of a Hilbert space H and T be a nonexpansive self–mapping on C. Let $a \in (0,1)$ and $\{a_n\}$ be a sequence satisfying $a_n \in (0,a]$ for all $n \in N$. Generate $\{y_n\}$, $\{C_n\}$, $\{x_n\}$ by $C_1 = C$, $x_1 \in C$, and $y_n = a_n x_n + (1-a_n)Tx_n$,*

$$C_{n+1} = \{z \in C_n : \|z - y_n\| \leq \|z - x_n\|\}, \quad x_{n+1} = P_{C_{n+1}}u \qquad \text{for each} \quad n \in N.$$

Then, $\{x_n\}$ converges strongly to $P_{F(T)}u$.

Reich [4] は定理 2.1 を一様に滑らかな Banach 空間に拡張し, Takahashi–Ueda [10] は定理 2.1 の異なる拡張を得ました; これらは, 増大作用素についての結果の系として提示されました．また, Shioji–Takahashi [6] は定理 2.2 を Banach 空間に拡張しました．

これらの結果を紹介します．ただし, Takahashi–Ueda の定理 2.5 と Shioji–Takahashi の定理 2.6 の original の条件はやや分かりづらいので, 本稿では, 一様 Gâteaux 微分可能なノルムを持つ一様凸 Banach 空間に翻訳して記述します．注意すべき点は, 定理 2.4–2.6 では, ノルムの微分可能性にある種の一様性が仮定されていることです．これは, 大雑把に言えば, 複数の点列の収束速度の比較が重要な意味を持つことを示唆する仮定です．

Theorem 2.4 (Reich [4])**.** *Let C be a closed convex subset of a uniformly smooth Banach space E, and let $T : C \to C$ be a nonexpansive mapping with a fixed point. Let x belong to C. Define for each $0 < k < 1$ a point w_k in C by $w_k = kTw_k + (1-k)x$. Then the strong $\lim_{k\to 1} w_k$ exists and is a fixed point of T.*

Theorem 2.5 (Takahashi–Ueda [10])**.** *Let E be a uniformly convex Banach space whose norm is uniformly Gâteaux differentiable. Let C be a bounded closed convex subset of E and T be a nonexpansive self–mapping on C. Let $\{a_n\}$ be a sequence in $(0,1)$ satisfying $\lim_n a_n = 0$. Let $u \in C$ and define a sequence $\{w_n\}$ in C by*

$$w_n = a_n u + (1-a_n)w_n \quad \text{for each} \quad n \in N.$$

Then $\{w_n\}$ converges strongly to $z \in F(T)$.

Theorem 2.6 (Shioji–Takahashi [6])**.** *Let E be a uniformly convex Banach space whose norm is uniformly Gâteaux differentiable. Let C be a bounded closed convex subset of E and T be a nonexpansive self–mapping on C. Let $\{a_n\}$ be a sequence in $(0,1)$ satisfying*

$$\text{(a)} \quad \lim_n a_n = 0, \quad \text{(b)} \quad \textstyle\sum_n a_n = \infty, \quad \text{(c)} \quad \textstyle\sum_n |a_{n+1} - a_n| < \infty.$$

Let $u \in C$ and define a sequence $\{x_n\}$ in C by $x_1 \in C$ and

$$x_{n+1} = a_n u + (1-a_n)Tx_n \quad \text{for each} \quad n \in N.$$

Then $\{x_n\}$ converges strongly to $z \in F(T)$.

3. 準備

簡潔に準備をします．読者に Hilbert 空間と Banach 空間の基礎的知識を仮定します．E を実 Banach 空間, E^* を E の位相的双対空間とし, 紛れを避けて $E \neq \{0\}$ とします． $x \in E$ と $y^* \in E^*$ について $y^*(x)$ を $\langle x, y^* \rangle$ と表記し, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を双対積と呼びます．$|\langle x, y^* \rangle| \leq \|x\| \|y^*\|$ が成立します．E の閉単位球を B_E, その表面を S_E と表記します．

Clarkson の凸性の modulus δ は次の様に定義されます:

$$\delta(t) = \inf\{1 - \|\tfrac{1}{2}(x+y)\| : x, y \in B_E,\ t \leq \|x-y\|\} \quad \text{for all} \quad t \in (0, 2].$$

E から E^* への集合値写像 J を次の様に定義します:

$$Jx = \{x^* \in E : \langle x, x^* \rangle = \|x\| \|x^*\|,\ \|x^*\| = \|x\|\} \quad \text{for each} \quad x \in E.$$

J は E から E^* への正規双対写像 (normalized duality mapping) と呼ばれます．Hahn–Banach の定理より $Jx \neq \emptyset$ です．また, $J(ax) = aJx$ $(a \in R)$ の確認は容易です．

E を Banach 空間とします．このとき, 次の事項が成立します:

(1) Suppose C is a closed convex subset of E. Then C is weakly closed.

T を E の部分集合 C から E への写像とします．T の不動点集合を $F(T)$ と表記します; $F(T) = \{y \in C : Ty = y\}$． T が非拡大 (nonexpansive) とは, 次が成立することです: $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ for each $x, y \in C$．E の部分集合 C から R への写像 f が coercive とは, C の点列 $\{x_n\}$ が $\lim_n \|x_n\| = \infty$ を満たすならば $\lim_n f(x_n) = \infty$ となることです．

E が Kadec–Klee property を持つとは, E の点列 $\{x_n\}$ が $x \in E$ に弱収束し, 同時に $\{\|x_n\|\}$ が $\|x\|$ に収束するならば, $\{x_n\}$ が x に強収束することです．

E は, 標準的な埋め込みによって, E^{**} の部分集合とみなせます．特に, $E = E^{**}$ とみなせるとき, E は回帰的 (reflexive) と呼ばれます; E^* の弱 * 位相と弱位相が一致するため, 本稿では "弱位相" のみを使用します．このとき, 有界閉凸集合は弱 compact です:

(2) Any bounded sequence $\{x_n\}$ in E has a weakly convergent subsequence.

E が狭義凸 (strictly convex) とは, $\|\cdot\|^2$ が狭義凸なことです;

$$\|(1-a)x + ay\|^2 < (1-a)\|x\|^2 + a\|y\|^2 \quad \text{for all} \quad x, y \in E\ (x \neq y),\ a \in (0, 1).$$

E が一様凸 (uniformly convex) とは, 次が成立することです: $\delta(t) > 0$ for all $t \in (0, 2]$．E が一様凸ならば, E は狭義凸, 回帰的であり Kadec–Klee property を持ちます．

$x, y \in S_E$ ごとに, $\lim_{t \to 0}(\|x + ty\| - \|x\|)/t$ が存在するとき, ノルムが Gâteaux 微分可能, あるいは E は滑らか (smooth) と言います．ノルムが一様 Gâteaux 微分可能とは, $y \in S_E$ ごとに, $\{\frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}\}$ が $x \in S_E$ について一様に収束することです．

次の下半連続関数についての基本的な主張から, 多くの重要な結果が導かれます．

Lemma 3.1. *Let C be a closed convex subset of a reflexive Banach space E. Let f be a lower semi–continuous convex function from C into R. Suppose f is coercive. Then there is $u \in C$ satisfying $f(u) = \inf_{x \in C} f(x) \in R$. Suppose further that f is strictly convex. Then, such u is unique.*

C を狭義凸で回帰的な Banach 空間 E の閉凸集合とします．このとき, $\|\cdot\|$ は coercive, 弱下半連続かつ狭義凸です． 従って, Lemma 3.1 より, $u \in E$ ごとに, $\|u - y_u\| = \inf_{y \in C} \|u - y\|$ を満たす $y_u \in C$ が唯 1 つ存在します．$u \in E$ ごとに $P_C u = y_u$ で定義される写像 P_C を E から C の上への距離射影 (metric projection) と呼びます．

Hilbert 空間は滑らかな一様凸 Banach 空間であり, 滑らかな一様凸 Banach 空間は, 滑らか, 狭義凸, 回帰的で Kadec–Klee property を持つ Banach 空間です.

E を滑らかな一様凸 Banach 空間, C を E の閉凸集合, T を C 上の非拡大自己写像とします. このとき, 例えば, 次の (3)–(9) の主張が成立します.

(3) E^* is smooth, strictly convex and reflexive.
(4) J is a bijection from E onto E^*; we can regard J as a mapping from E onto E^*.
(5) J is norm to weak continuous.
(6) The normalized duality mapping J^* from E^* onto E and J^{-1} coincide.
(7) $z = P_C u$ if and only if $z \in C$ and $\inf_{y \in C} \langle z - y, J(u - z) \rangle \geq 0$.
So, $\inf_{y \in C} \langle P_C u - y, J(u - P_C u) \rangle \geq 0$ holds.
(8) $F(T)$ is closed and convex.
(9) Suppose further that C is bounded. Then, $F(T) \neq \emptyset$.

(3)–(9) のほとんどは滑らかな狭義凸回帰的 Banach 空間で成立し, 更にいくつかはより弱い条件で成立しますが, 詳細には触れないことにします.

実数列の収束に関する次の補題は良く知られています; Weng [13], Xu [15] を参照.

Lemma 3.2. *Let $\{s_n\}$ be a sequence in $[0, 1]$ satisfying $\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \infty$. Let $\{d_n\}$ be a sequence in $[0, \infty)$ and let $\{e_n\}$ be a sequence in R satisfying $\limsup_n e_n \leq 0$. Let $\{c_n\}$ be a sequence in $[0, \infty)$ satisfying $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$. Suppose $d_{n+1} \leq (1 - s_n) d_n + s_n e_n + c_n$ for each $n \in N$. Then $\lim_n d_n = 0$.*

次の補題は demiclosed principle [2] と呼ばれます.

Lemma 3.3. *Let E be a uniformly convex Banach space E. Let C be a bounded, closed and convex subset of E and T be a nonexpansive self–mapping on C. Suppose that $\{x_n\}$ is a sequence in C which converges weakly to some $z \in C$ and satisfies $\lim_n \|Tx_n - x_n\| = 0$. Then, $z \in F(T)$.*

Hilbert 空間での Browder の定理を, 滑らかな一様凸 Banach 空間と対比しつつ 4 節で考察します. このとき, 私たちの広義の設定は, C は滑らかな一様凸 Banach 空間 E の有界閉凸集合, T は C 上の非拡大自己写像です. ここまでの議論から, (1)–(9) と補題 3.2, 3.3 を自由に使用できます. 更に, 準備した事項から次の補題を証明できます.

Lemma 3.4. *Let E be a smooth uniformly convex Banach space. Let C be a bounded closed convex subset of E and T be a nonexpansive self–mapping on C. Let $u \in E$ and $\{x_n\}$ be a sequence in E satisfying $\lim_n \|Tx_n - x_n\| = 0$ and*

$$\limsup_n \|u - x_n\| \leq \|u - P_{F(T)} u\|. \tag{3.1}$$

Then $\{x_n\}$ converges strongly to $P_{F(T)} u$.

補題 3.4 の設定では, (8),(9) より, $F(T)$ は非空閉凸集合であり, (2) より, $\{x_n\}$ は弱収束する部分列を持ちます. $z = P_{F(T)} u$ とします. $\{x_{n_j}\}$ を z^j に弱収束する部分列とします. $\lim_n \|Tx_n - x_n\| = 0$ と補題 3.3 より, $z^j \in F(T)$ を得ます. $z = P_{F(T)} u$ とノルムが C 上で弱下半連続より, $\|z - u\| \leq \|z^j - u\| \leq \liminf_j \|x_{n_j} - u\|$ です. 従って, (3.1) より,

$$\|z - u\| \leq \|z^j - u\| \leq \liminf_j \|x_{n_j} - u\| \leq \limsup_j \|x_{n_j} - u\| \leq \|z - u\|.$$

このことから, $\lim_j \|x_{n_j} - u\| = \|z - u\| = \|z^j - u\|$ を得ます. $z = P_{F(T)} u$ が一意であることと $z^j \in F(T)$ より, $z = z^j$ です. E が Kadec–Klee property を持ち, $\{x_{n_j} - u\}$ が

$z^j - u = z - u$ に弱収束することを考慮すれば, $\{x_{n_j} - u\}$ が $z - u$ に強収束することが分かります. 即ち, $\{x_{n_j}\}$ は z に強収束します. $\{x_n\}$ の任意の弱収束する部分列 $\{x_{n_j}\}$ が z に強収束することを確認しました. 従って, $\{x_n\}$ 自身が z に強収束します.

一方, 5 節では, Halpern 型の Shioji–Takahashi の定理 2.6 を, 一様 Gâteaux 微分可能なノルムを持つ一様凸 Banach 空間で解説します.

E が一様 Gâteaux 微分可能なノルムを持つ Banach 空間ならば, 次が成立します:

(10) We can regard J as a mapping from E into E^*.

(11) J is norm to weak*, uniformly continuous on each bounded subset of E.

Banach 空間 E が (4) か (10) の性質を持てば, 次の関係が成立します:

(12) $\quad \|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, J(x + y)\rangle \quad$ for each $x, y \in E$.

最後に, E が Hilbert 空間 H であるときに特有の, 重要な事実を 1 つ確認します. H では双対写像 J が極めて単純です. 要するに, 双対積が内積になるため, 次が成立します:

$$\langle x, Jy\rangle = \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = \langle y, Jx\rangle \quad \text{for each} \quad x, y \in H.$$

4. B–点列

本節を通して, C は Banach 空間 E の有界閉凸集合, T は C 上の非拡大自己写像とし, $\{w_n\}$ を b–係数 $\{a_n\}$ と制御点 $u \in C$ による B–点列とします. T は連続写像です.

本節では, Browder の定理 2.1 を証明し, 次のことを確認します: Hilbert 空間では,

(4a) B–点列 $\{w_n\}$ は u を中心として半径 $\|u - P_{F(T)}u\|$ の閉球の中に存在します.

(4b) Browder の定理は, 集合族 $\{C_n\}$ が明示されていませんが, projection 型です.

ただし, 直線的に議論を進めるわけではありません. 広義の設定での B–点列 $\{w_n\}$ の特徴的な性質も考察し対比します. 本稿の議論を通して, B–点列 $\{w_n\}$ をめぐっては, 著者の興味を惹く問題が, 現在でも多数存在することを推察いただければ幸いです. 本稿では検討できませんので, どの様な問題に興味があるのか例を挙げることはしません.

4.1. 一般の Banach 空間での B–点列.

次の (i) はほぼ自明, (ii) も容易です:

(i) b 係数 $\{a_n\}$ の部分数列は b 係数なので, $\{w_n\}$ の任意の部分列は B–点列です.

(ii) $\lim_n \|Tw_n - w_n\| = 0$.

(ii) を確認します. $w_n = a_n u + (1 - a_n)Tw_n$ より, $\|w_n - Tw_n\| = a_n\|u - Tw_n\|$ です. C は有界なので, $\lim_n a_n = 0$ より $\lim_n \|Tw_n - w_n\| = 0$ が従います.

4.2. 滑らかな一様凸 Banach 空間での B–点列.

E を滑らかな一様凸 Banach 空間とし, 他の設定はそのままとします. このとき, (5) より J は norm to weak continuous です. また, (8), (9) より, $F(T)$ は非空閉凸集合です. B–点列の性質で特徴的と思われる (iii)–(v) を説明します.

(iii) $\|w_n - z\|^2 \leq \langle u - z, J(w_n - z)\rangle \quad$ for all $n \in N, z \in F(T)$.

(iv) $0 \leq \langle u - w_n, J(w_n - z)\rangle \quad$ for all $n \in N, z \in F(T)$.

任意に $z \in F(T)$, $n \in N$ を固定します. このとき, 容易に次を得ます:

$$\begin{aligned}\|w_n - z\|^2 &= \langle a_n u + (1 - a_n)Tw_n - z, J(w_n - z)\rangle \\ &= \langle a_n(u - z) + (1 - a_n)(Tw_n - z), J(w_n - z)\rangle\end{aligned}$$

$$\le a_n\langle u-z, J(w_n-z)\rangle + (1-a_n)\|Tw_n - z\|\|w_n - z\|$$
$$\le a_n\langle u-z, J(w_n-z)\rangle + (1-a_n)\|w_n - z\|^2.$$

整理して, $a_n \in (0,1)$ を考慮すると (iii) を得ます:

$$a_n\|w_n-z\|^2 \le a_n\langle u-z, J(w_n-z)\rangle, \quad \|w_n-z\|^2 \le \langle u-z, J(w_n-z)\rangle.$$

また, 次の関係から (iv) が従います:

$$\|w_n-z\|^2 \le \langle u-z, J(w_n-z)\rangle = \langle u-w_n, J(w_n-z)\rangle + \|w_n-z\|^2.$$

$\{v_n\}$ を b–係数 $\{b_n\}$ と制御点 $u \in C$ による B–点列とします. $\{w_n\}$ は b–係数 $\{a_n\}$ と制御点 $u \in C$ による B–点列でした. このとき, 次が成立します:

(v) $\{w_n\}$ と $\{v_n\}$ が $z^w, z^v \in C$ に強収束するならば, $z^w = z^v \in F(T)$ です.

(ii) より $\lim_n \|Tw_n - w_n\| = 0$ です. $\{w_n\}$ が $z^w \in C$ に強収束し T は連続なので, $\|Tz^w - z^w\| = 0$, 即ち, $z^w \in F(T)$ です. 同様に $z^v \in F(T)$ です. 従って, (iv) より,

$$\langle u-w_n, J(w_n-z^v)\rangle \ge 0, \quad \langle u-v_n, J(v_n-z^w)\rangle \ge 0 \quad \text{for all} \ \ n \in N.$$

$\langle u-w_n, J(w_n-z^v)\rangle = \langle u-z^w, J(w_n-z^v)\rangle + \langle z^w-w_n, J(w_n-z^v)\rangle$, $\{w_n\}$ が $z^w \in E$ に強収束し, J が norm to weak で連続より, $\langle u-z^w, J(z^w-z^v)\rangle \ge 0$. 従って,

$$\langle u-z^w, J(z^w-z^v)\rangle \ge 0, \quad \langle u-z^v, J(z^v-z^w)\rangle \ge 0.$$

ここで $J(z^v-z^w) = -J(z^w-z^v)$ を考慮すると,

$$0 \le \langle u-z^w, J(z^w-z^v)\rangle + \langle u-z^v, J(z^v-z^w)\rangle$$
$$= \langle z^v-z^w, J(z^w-z^v)\rangle = -\|z^w-z^v\|^2.$$

このことから, $z^w = z^v \in F(T)$ を得ます.

即ち, 制御点が同じ 2 つの B–点列が強収束するならば, 同じ不動点に強収束します.

4.3. **Hilbert 空間での B–点列.**

E を Hilbert 空間 H とし, 他の設定はそのままとします. 当然, $F(T)$ は非空閉凸です. また, 双対積が内積になりますから, (iv) は次の様になります:

(vi) $$0 \le \langle u-w_n, J(w_n-z)\rangle = \langle u-w_n, w_n-z\rangle$$
$$= \langle w_n-z, u-w_n\rangle = \langle w_n-z, J(u-w_n)\rangle \quad \text{for all} \ \ n \in N, \ z \in F(T)$$

対比しやすい様に J を残しました. ここで, $n \in N$ ごとに, C_n を次の様に定義します:

$$C_n = \{y \in C : \langle w_n-y, J(u-w_n)\rangle = \langle w_n-y, u-w_n\rangle \ge 0\}.$$

このとき, $w_n \in C_n$ は自明です. また, (vi) より, $\emptyset \ne F(T) \subset C_n$ for all $n \in N$. 更に, C_n は明らかに非空閉凸集合ですから, (7) を考慮すると $w_n = P_{C_n}u$ です. すべての $n \in N$ について, $P_{F(T)}u \in F(T) \subset C_n$ と $w_n = P_{C_n}u$ が成立していますから, 次を得ます：

$$\sup_n \|u-w_n\| \le \|u - P_{F(T)}u\|.$$

(4a) を確認しました: Hilbert 空間では, B–点列 $\{w_n\}$ は u を中心として半径 $\|u-P_{F(T)}u\|$ の閉球の中に閉じ込められています. 従って, $\lim_n \|Tw_n - w_n\| = 0$ と補題 3.4 より, $\{w_n\}$ は $P_{F(T)}u \in F(T)$ に強収束します. Browder の定理 2.1 の証明が完了しました.

(4b) もこの証明から確認できました: Hilbert 空間では, Browder の定理は, 形式的には, 上述した C_n が明示されていない projection 型です. C_n を生成した後に $P_{C_n}u$ が決まる通常の手順とは逆に, w_n が先に決まって w_n を使って C_n を生成しています.

5. W–点列

本節を通して, C はBanach空間 E の有界閉凸集合, T は C 上の非拡大自己写像とし, $\{x_n\}$ を w–係数 $\{a_n\}$, 制御点 $u \in C$ と初期点 $x_1 \in C$ による W–点列とします.

本節では, Shioji–Takahashiの定理 2.6 を考察します. Shioji–Takahashi は, 実際には次の主張を示しました; 2節と同様の翻訳をしています.

主張ST. *C を一様 Gâteaux 微分可能なノルムを持つ一様凸 Banach 空間 E の有界閉凸集合とします. T を C 上の非拡大自己写像とし, $\{x_n\}$ を w–係数 $\{a_n\}$, 制御点 $u \in C$ と初期点 $x_1 \in C$ による W–点列とします. このとき, 次が成立します*

(st) 制御点 $u \in C$ によるすべての B–点列が $z \in F(T)$ に強収束するならば, W–点列 $\{x_n\}$ も $z \in F(T)$ に強収束します.

この主張と Takahashi–Ueda の定理 2.5 から定理 2.6 が導出されます; 定理 2.1 から定理 2.2 が導出されます. 定理 2.5 や主張STのoriginalの証明は, Banach limit を使い, 分かりやすいとは言えません. ここでは, 2010年頃の, 主張STの著者の証明を提示します; 補題 3.2 を意識し Banach limit を使用していません. ただし, これは新しいものではありませんでした. Chidume–Chidume [3] は, 2006年に, ほぼ同じ証明を提示し, original の証明とは異なる価値があると記述しています. 意外なことに, Shioji自身が, 1998年に, Banach limit を使用しない証明を既に提示していました; 塩路 [5]. Shiojiも, Banach limit を使う original の証明を, やや超越的に感じていたのではないかと想像されます. また, 塩路 [5] は, これ以外にも示唆的な内容を多く含んでいるように思われます.

5.1. 一般の Banach 空間での W–点列.

次の (I) が成立します:

(I) $\lim_n \|Tx_n - x_n\| = 0$.

C は有界ですから, $K = \sup_{y \in C} \|y\| < \infty$ とします. 任意に $n \in N$ を固定します.

$$\begin{aligned}\|x_{n+2} - x_{n+1}\| &= \|a_{n+1}u + (1-a_{n+1})Tx_{n+1} - (a_n u + (1-a_n)Tx_n)\| \\ &\le |a_{n+1} - a_n|\|u\| + (1-a_{n+1})\|Tx_{n+1} - Tx_n\| + |a_{n+1} - a_n|\|Tx_n\| \\ &\le (1-a_{n+1})\|x_{n+1} - x_n\| + a_{n+1} \times 0 + 2K|a_{n+1} - a_n|.\end{aligned}$$

w–係数 $\{a_n\}$ は (b),(c) を満たすので, 補題 3.2 より, $\lim_n \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ を得ます. また,

$$\begin{aligned}\|x_n - Tx_n\| &\le \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_{n+1} - Tx_n\| \\ &= \|x_{n+1} - x_n\| + a_n\|u - x_n\| \le \|x_{n+1} - x_n\| + 2a_n K\end{aligned}$$

従って, $\lim_n a_n = 0$ より, $\lim_n \|x_n - Tx_n\| = 0$ を得ます.

主張STの証明を俯瞰すると, (c) は $\lim_n \|x_n - Tx_n\| = 0$ を示すときのみ必要です. $\lambda \in (0,1)$, $S_\lambda = \lambda I + (1-\lambda)T$ とします. S_λ が C 上の非拡大写像であることと $F(T) = F(S_\lambda)$ の確認は容易です. Suzuki [7] は, T の代わりに S_λ を使用し, 性質 (a),(b) だけを仮定した制御係数 $\{b_n\}$, 制御点 $u \in C$, 初期点 $y_1 \in C$ によって, 定理 2.2 の手順で点列 $\{y_n\}$ を生成しました. そして, $\lim_n \|y_n - S_\lambda y_n\| = 0$ が得られることを示しました. 興味深い結果ですが, 簡単ではなく, 主題からやや逸れるため, これ以上は言及しません.

5.2. **一様 Gâteaux 微分可能なノルムを持つ一様凸 Banach 空間での W–点列.**

E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムを持つ一様凸 Banach 空間とし, 他の設定はそのままとします. このとき, $F(T)$ は非空閉凸集合です. 主張 ST を証明します.

W 点列 $\{x_n\}$ の性質 $\lim_n \|x_n - Tx_n\| = 0$ より, 次の様な $\{b_n\} \subset (0,\infty)$ が存在します:

(bs) $\lim_n b_n = 0, \quad \|x_n - Tx_n\| = b_n^2$ if $\|x_n - Tx_n\| \neq 0$

十分大きな $n \in N$ については $b_n \in (0,1)$ なので, $\{b_n\}$ を b–係数とみなせます. この様に, 理論的には, $\{\|x_n - Tx_n\|\}$ よりずっと緩やかに 0 に収束する b–係数 $\{b_n\}$ を考えることができます. この $\{b_n\}$ と制御点 $u \in C$ による B–点列を $\{w_n\}$ とします. 仮定より, $\{w_n\}$ はある $z_0 \in F(T)$ に強収束します. そして, 次の (II) の確認を目標とします:

(II) $\limsup_n \langle u - z_0, J(x_n - z_0)\rangle \leq 0.$

理由を述べます. $a_n \in (0,1)$ を考慮して, (12) の関係 $\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, J(x+y)\rangle$ を, $x_{n+1} - z_0 = a_n(u - z_0) + (1-a_n)(Tx_n - z_0)$ に適用します. 任意の $n \in N$ について,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - z_0\|^2 &\leq \|(1-a_n)(Tx_n - z_0)\|^2 + 2\langle a_n(u - z_0), J(x_{n+1} - z_0)\rangle \\ &\leq (1-a_n)\|x_n - z_0\|^2 + a_n(2\langle u - z_0, J(x_{n+1} - z_0)\rangle).\end{aligned}$$

従って, (II) の成立が確認できれば, w–係数 $\{a_n\}$ は (b) を満たすので, 補題 3.2 より $\lim_n \|x_n - z_0\|^2 = 0$ を得ます. 即ち, W–点列 $\{x_n\}$ は $z_0 \in F(T)$ に強収束します.

(II) を確認します. $b_n \in (0,1)$ を考慮すれば, $w_n - x_n = b_n(u - x_n) + (1-b_n)(Tw_n - x_n)$ と (12) より, 任意の $n \in N$ について,

$$\begin{aligned}(*) \qquad \|w_n - x_n\|^2 &\leq \|(1-b_n)(Tw_n - x_n)\|^2 + 2\langle b_n(u - x_n), J(w_n - x_n)\rangle \\ &\leq (1-b_n)^2(\|Tw_n - Tx_n\| + \|Tx_n - x_n\|)^2 \\ &\qquad + 2b_n\langle (u - w_n) + (w_n - x_n), J(w_n - x_n)\rangle \\ &\leq (1-b_n)^2\|w_n - x_n\|^2 + 2b_n^2\|w_n - x_n\| + b_n^4 \\ &\qquad + 2b_n\|w_n - x_n\|^2 + 2b_n\langle u - w_n, J(w_n - x_n)\rangle.\end{aligned}$$

整理して, $b_n \in (0,1)$, $K = \sup_{y \in C}\|y\| < \infty$ を考慮すれば

$$\begin{aligned}2b_n\langle u - w_n, J(x_n - w_n)\rangle &\leq b_n^2\|w_n - x_n\|^2 + 2b_n^2\|w_n - x_n\| + b_n^4, \\ \langle u - w_n, J(x_n - w_n)\rangle &\leq \tfrac{1}{2}b_n(4K^2) + b_n(2K) + \tfrac{1}{2}b_n^3.\end{aligned}$$

この不等式と $\lim_n b_n = 0$ より, 次が成立します.

(IIa) $\limsup_n \langle u - w_n, J(x_n - w_n)\rangle \leq 0.$

また, 任意の $n \in N$ について, 次の関係が成立することは明らかです.

$$\begin{aligned}&\langle u - z_0, J(x_n - z_0)\rangle \\ &\quad = (\langle u - z_0, J(x_n - z_0)\rangle - \langle u - z_0, J(x_n - w_n)\rangle) \\ &\qquad + (\langle u - z_0, J(x_n - w_n)\rangle - \langle u - w_n, J(x_n - w_n)\rangle) + \langle u - w_n, J(x_n - w_n)\rangle \\ &\quad \leq \langle u - z_0, J(x_n - z_0) - J(x_n - w_n)\rangle + \|w_n - z_0\|\|x_n - w_n\| + \langle u - w_n, J(x_n - w_n)\rangle.\end{aligned}$$

ここまでの議論から, C は有界であり, (IIa), $\lim_n \|w_n - z_0\| = 0$ が成立しています. また, $\lim_n \|(x_n - z_0) - (x_n - w_n)\| = 0$ であり, (11) より, J は有界な集合上で norm to weak で一様連続です. これらから, 次を得ます.

$$\limsup_n \langle u - z_0, J(x_n - z_0)\rangle \leq 0 + 0 + \limsup_n \langle u - w_n, J(x_n - w_n)\rangle \leq 0.$$

(II) を確認しました．即ち，主張 ST の証明が終了しました．この証明は，(11) を使用しているので，E が一様 Gâteaux 微分可能なノルムを持つという条件を省けません．

5.3. **Hilbert 空間での W–点列.**

E を Hilbert 空間 H とし，他の設定はそのままとします．このとき，5.2 節とまったく同じ手順で，定理 2.1 から定理 2.2 が導かれます．ただし，表記はずっと単純になります．定理 2.1 の結果から，当然ですが，W–点列 $\{x_n\}$ は $P_{F(T)}u$ に強収束します．

ここまで，定理 2.1(2.5) から定理 2.2(2.6) を導く手順を解説しました．大筋を振り返ります．$\{x_n\}$ を w–係数 $\{a_n\}$，制御点 $u \in C$ と初期点 $x_1 \in C$ による W–点列としました．次に，$\{x_n\}$ に依存する特殊な B–点列 $\{w_n\}$ を生成しました．即ち，$\lim_n \|x_n - Tx_n\| = 0$ より，(bs) を満たす b–係数 $\{b_n\}$ が存在し，この $\{b_n\}$ と制御点 $u \in C$ による B–点列を $\{w_n\}$ としました．定理 2.1 から，$\{w_n\}$ は $z_0 = P_{F(T)}u$ に強収束します．この $\{w_n\}$ の性質と $\{x_n\}$ との関係から $\limsup_n \langle u - w_n, J(x_n - w_n)\rangle \le 0$ を導き，これをテコに $\{w_n\}$ も $z_0 = P_{F(T)}u$ に強収束することを示しました．ただし，$\limsup_n \langle u - w_n, J(x_n - w_n)\rangle \le 0$ に代えて $\limsup_n \langle u - z_0, J(x_n - z_0)\rangle \le 0$ が使用されました．そして，Banach 空間で議論するときには，前者から後者を導く際に介在する条件が問題になります．

定理 2.2 は Hilbert 空間の主張であるにも関わらず，提示した証明から，W 点列の幾何的構造が明瞭に浮かび上がるとは言い難いと思います．定理 2.2 の結論から振り返れば，W 点列 $\{x_n\}$ と B 点列 $\{w_n\}$ は同一の点 $P_{F(T)}u$ に強収束しますから，$\lim_n \|x_n - w_n\| = 0$ 及び $\limsup_n \|x_n - u\| \le \|u - P_{F(T)}u\|$ が成立します．Hilbert 空間は良い性質を持つので，“適切な B 点列 $\{w'_n\}$ を選べば，$\lim_n \|x_n - w'_n\| = 0$ または $\limsup_n \|u - x_n\| \le \|u - P_{F(T)}u\|$ を先に求めることができて，このことから，定理 2.2 の幾何的性質を浮かび上がらせる証明が得られるのではないか” と考えるのは不自然ではありません．しかし，残念なことに，ここまでの考え方の単純な延長では，z_0 を挟まないとどうもうまくいきません．

6. Hilbert 空間の強収束定理

本稿の議論を整理すると，Hilbert 空間では，次の (#) が成立する様に思われます:

(#) すべての強収束定理は，形式的には，許容範囲を持つ projection 型です．

$z \in F(T)$ に強収束する点列 $\{y_n\}$ が手続き (P) によって生成されるとし，$e_n \in (0, \infty)$ と $\lim_n e_n = 0$ を満たす数列 $\{e_n\}$ をとります．$n \in N$ ごとに $A'_n = \{y \in C : \|y - y_n\| \le e_n\}$ とすれば，手続き (P) は，自動的に許容範囲 $\{A'_n\}$ を持つ手続き (AP) とみなせます．

5.3 の記号を踏襲します．$\{w_n\}$ を生成する手続き (Pb) は，4 節の議論より，形式的には projection 型でした．また，定理 2.2 の結論から振り返れば，$\lim_n \|x_n - w_n\| = 0$ です．従って，$n \in N$ ごとに $A_n = \{y \in C : \|y - w_n\| \le \|x_n - w_n\|\}$ とすれば，(Pb) を許容範囲 $\{A_n\}$ を持つ手続き (APb) とみなせます; $x_n, w_n \in A_n$ は自明です．ただし，$\|x_n - w_n\|$ の評価がないので，形式的な議論です．即ち，Hilbert 空間では，Browder 型の強収束定理 2.1 と Halpern 型の強収束定理 2.2 は，形式的には，許容範囲を持つ projection 型です．

許容範囲について補足します．ある手続きとその実際の誤差を考えます．この誤差は，通常，手続きと準備した機器によって実際に手にできる点の，目標とする (求めたい) 点からのずれ，もしくはこのずれを評価した非負の実数と認識されます．後者を考えます．そして，δ_n を step n ごとの誤差の上界とします．このとき，$\lim_n \delta_n = 0$ とか $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = 0$ という条件は意味をなしません．実際の誤差は，この様な性質を持てないからです．そもそも，手続きによっては，目標とする点など理論上も存在しないかもしれません．これ

は, 例えば集合値写像の不動点の考察から明らかです; 竹内 [11] を参照. また, 目標とする点が存在するとき, 理論的には, 目標とする点からのずれは自由に考えることが許されます. この自由に考えたずれは, 実際の誤差とは性質が異なり, 誤差と呼ぶべきか微妙な点があります. "誤差" という語は使用状況や使用者によって曖昧さが伴います.

δ_n を, 手続きが望ましい結果に至るために, 理論的に許容できる 1 つの範囲を与えるため使用する非負の実数と捉え直します. このときには, $\lim_n \delta_n = 0$ とか $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = 0$ という条件も可能です. ただし, 許容範囲は, 定義から明らかな様に, 1 つの非負数によって与えられるとは限りません. 即ち, 上述した $\{A_n\}$ などは, 許容範囲の 1 つの例にすぎません. 許容範囲という概念は, "誤差" という語の曖昧さを避けることだけが目的ではなく, この様な, あるいは類似した, 状況全般を合理的に捉えるために導入されました.

*****

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University. この拙い論稿を発表する機会をいただいたことを, 新潟大学 田中 環 先生, 秋田県立大学 星野 満博 先生に感謝いたします.

References

[1] F. E. Browder, *"Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces"*, Proc. Sympos. Pure Math., 18 Part2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1976.
[2] F. E. Browder, *"Semicontractive and semiaccretie nonlinear mappings in Banach spaces"*, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 660–665.
[3] C. E. Chidume and C. O. Chidume *"Iterative approximation of fixed points of nonexpansive mappings"*, J. Math. Anal. Appl., (2006).
[4] S. Reich, *"Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces"*, J. Math. Anal. Appl. 75 (1980), 287-292.
[5] 塩路直樹, *"非拡大写像及び非拡大半群に対する強収束定理"*, 講究録 1031 (1998), 157–167.
[6] N. Shioji and W. Takahashi, *"Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces"*, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1976), 3641–3645.
[7] T. Suzuki, *"A sufficient and necessary condition for Halpern-type strong convergence to fixed points of nonexpansive mappings"*, Proc. Amer. Math. Soc., (2007).
[8] W. Takahashi, *"Nonlinear Functional Analysis"*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.
[9] W. Takahashi, Y. Takeuchi and R. Kubota, *"Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces"*, J. Math. Anal. Appl. 341 (2008), 276 – 286.
[10] W. Takahashi and Y. Ueda, *"On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators"*, J. Math. Anal. Appl. 104 (1984), 546-553.
[11] 竹内幸雄, "集合値写像のいくつかのタイプの不動点", 講究録 2194 (2021), 108 – 119.
[12] Y. Takeuchi, *"Shrinking projection method with allowable ranges"*, J. Nonlinear Anal. Optim., 10(2) (2019), 83–94.
[13] X. Weng, *"Fixed point iteration for local strictly pseudo-contractive mapping"*, Proc. Amer. Math. Soc. 113 No3.(1991), 727–731.
[14] R. Wittmann, *"Approximation of fixed points of nonexpansive mappings"*, Arch. Math. 58 (1992), 486-491.
[15] H. K. Xu, *"Inequalities in Banach spaces with applications"*, Nonlinear Anal. 16 (1991), 1127–1138.

(Yukio Takeuchi) Takahashi Institute for Nonlinear Analysis, 1-11-11 Nakazato, Minami, Yokohama 232-0063, Japan
E-mail address: aho314159@yahoo.co.jp