2つの λ-ハイブリッド写像に関する共通吸引点定理
(A COMMON ATTRACTIVE POINT THEOREM FOR TWO λ-HYBRID MAPPINGS)

茨木貴徳 (TAKANORI IBARAKI)
横浜国立大学 教育学部
(COLLEGE OF EDUCATION, YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY)

1. はじめに

1975 年に Baillon はヒルベルト空間における非拡大写像の不動点定理を示した.

定理 1.1 (Baillon [4]). *C をヒルベルト空間 H の空でない有界な閉凸部分集合とし, T を C から C への非拡大写像 (nonespansive mappimg) とする. 点列 $\{x_n\}$ を以下で定義する. x を C の任意の元とし, 任意の自然数 n に対して*

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x \tag{1.1}$$

とする. ただし, T^0 は C から C への恒等写像とする. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は T の不動点へ弱収束する.

この定理は, 非線形エルゴード定理と呼ばれる有名な結果である. 定理 1.1 の主張は不動点への収束性だけでなく, 存在性も示している. 本研究以降に Baillon 型の不動点定理は多くの研究者が研究を行なってきた (例えば, [1, 5, 14, 23] 等を参照). 特に, 2011 年に Takahashi and Takeuchi [22] は吸引点 (attractive point) という概念を導入し, 定理 1.1 を研究した. C をヒルベルト空間 H の空でない部分集合とし, T を C から H への写像とする. H の元 p が T の吸引点 (attractive point) であるとは, 任意の C の元 x に対して

$$\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$$

が成立することである. Takahashi and Takeuchi [22] は吸引点の概念を用いて以下の結果を得た.

定理 1.2 (Takahashi and Takeuchi [22]). *C をヒルベルト空間 H の空でない部分集合とし, T を C から C への generalized hybrid 写像とする. 点列 $\{x_n\}$ を以下で定義する. x_1 を C の任意の元とし, 任意の自然数 n に対して点列 $\{x_n\}$ を式 (1.1) で構成する. ここで $\{x_n\}$ が有界であるならば, 以下が成立する.*

(1) *T の吸引点全体の集合は空でない閉凸集合である;*
(2) *点列 $\{x_n\}$ は T の吸引点へ弱収束する.*

なお, Takahashi and Takeuchi [22] は定理 1.2 において, C が閉凸集合ならば点列 $\{x_n\}$ の弱収束先は T の不動点であることも示している.

一方, 1963 年に DeMarr [6] はバナッハ空間で可換な非拡大写像族に関する以下の共通不動点の存在定理を示した.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47H10, 41A65.
Key words and phrases. 不動点, 吸引点, ヒルベルト空間, 収束定理, λ-ハイブリッド写像.

定理 1.3 (DeMarr [6])**.** C をバナッハ空間 E のコンパクトな凸部分集合とする. このとき, C からそれ自身への可換な非拡大写像族は共通不動点を持つ.

この研究以降, 多くの研究者により共通不動点の研究がなされてきたが存在定理のみならず, 不動点への軌道を求める近似理論に関する研究も数多く扱われてきた (例えば, [3,9–11,13,15–18] 等を参照). この中で Kohsaka [11] の結果を紹介しよう.

定理 1.4 (Kohsaka [11])**.** C をヒルベルト空間 H の空でない有界な閉凸部分集合とし, λ と μ を実数とする. S を C から C への λ-ハイブリッド写像で, T を C から C への μ-ハイブリッド写像とし, $ST = TS$ を満たすとする. F を S と T の共通不動点全体の集合とする. ここで点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する. x_1 を C の任意の元とし, 任意の自然数 n に対して

$$x_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} S^i T^j x_1$$

とする. ただし, S^0 と T^0 は C から C への恒等写像とする. このとき以下が成立する.

(1) $\{P_F S^i T^j x_1\}_{(i,j)\in\mathbb{N}_0^2}$ は F の要素 u_0 に (ネット (*net*) の意味で) 強収束する;

(2) 点列 $\{x_n\}$ は u_0 に弱収束する.

ただし, P_F は H から F の上への距離射影であり, $\mathbb{N}_0$ は非負の整数全体である.

この定理は Baillon 型 (定理 1.1) の手法を用いた, 2 つの λ-ハイブリッド写像の共通不動点定理である. 本論文では, Kohsaka [11] と Takahashi and Takeuchi [22] の結果を参考に [8] で得た, ヒルベルト空間における 2 つの λ-ハイブリッド写像に関する共通吸引点定理を扱う. 特に, 吸引点や定理の条件を満たす写像族などの具体例を示し, 具体例を通して共通吸引点定理の理解を深めることを主な目的とする.

2. 準備

本論文では, H は実ヒルベルト空間 (real Hilbert space) とし内積 (inner product) を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表し, この内積から導かれるノルム (norm) を $\|\cdot\|$ で表す. また, C は H の空でない部分集合とする. 以降, 特に断りがない限り, 本論文では常に H は実ヒルベルト空間とし, C は H の "空でない" 部分集合とすることとする. C を H の閉凸部分集合とする. このとき, H の任意の元 x に対して

$$\|x - x_0\| = \min_{y\in C} \|x - y\|$$

となる C の元 x_0 が一意に存在する. そこで H の元 x に対し, このような C の元 x_0 を対応させる写像を H から C の上への距離射影 (metric projection) と呼び, P_C で表す. また, $\mathbb{R}^2$ は 2 次元ユークリッド空間とする.

T を C から H への写像とする. $F(T)$ は写像 T の不動点 (fixed point) 全体の集合とする, すなわち $F(T) = \{z \in C : z = Tz\}$. $A(T)$ は T の吸引点 (attractive point) 全体の集合とする, すなわち $A(T) = \{p \in H : \|Tx - p\| \le \|x - p\| \ (\forall x \in C)\}$. 吸引点には次のような性質が知られている ([22] を参照).

- $A(T)$ は閉凸集合である;
- C が閉凸集合で $A(T) \neq \emptyset$ ならば $F(T) \neq \emptyset$ である;
- $A(T) \cap C \subset F(T)$ となる;
- $F(T) \subset A(T)$ ならば $A(T) \cap C = F(T)$ である.

次に 4 つの非拡大型非線形写像の定義を復習する.

- T が非拡大 (nonexpansive) であるとは, C の任意の元 x, y に対して

$$\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|$$

  が成立するときをいう;

- T が非伸張 (nonspreading) であるとは, C の任意の元 x, y に対して
$$\|Tx - Ty\|^2 \le \|x - y\|^2 + 2\langle x - Tx, y - Ty\rangle$$
が成立するときをいう ([12] を参照) ;
- T がハイブリッド (hybrid) であるとは, C の任意の元 x, y に対して
$$\|Tx - Ty\|^2 \le \|x - y\|^2 + \langle x - Tx, y - Ty\rangle$$
が成立するときをいう ([21] を参照) ;
- λ を実数とする. T が λ-ハイブリッド (λ-hybrid) であるとは C の任意の元 x, y に対して
$$\|Tx - Ty\|^2 \le \|x - y\|^2 + 2(1-\lambda)\langle x - Tx, y - Ty\rangle$$
が成立するときをいう ([1] を参照) .

実数 λ に対して T を λ-ハイブリッド写像としたとき次が成立する ([1, 12, 21] 等を参照).
- $F(T)$ は閉凸集合である;
- $\lambda = 1$ のとき, T は非拡大である;
- $\lambda = 0$ のとき, T は非伸張である;
- $\lambda = 1/2$ のとき, T はハイブリッドである.

すなわち, λ-ハイブリッド写像は非拡大, 非伸張, ハイブリッドの 3 つのクラスを含んだ写像のクラスである. ここで λ-ハイブリッド写像の具体例を示す ([1] を参照).

例 2.1 (Aoyama, Iemoto, Kohsaka and Takahashi [1]). $\lambda \in [0, 1)$ とし,
$$\alpha = \frac{\lambda(1-\lambda) + \sqrt{2(1-\lambda)}}{1-\lambda^2},$$
とする. $B = \{x \in H : \|x\| \le \alpha\}$ とし, H から H への写像 T を以下で定義する.
$$Tx = \begin{cases} 0 & (x \in B); \\ x/\|x\| & (x \notin B). \end{cases}$$
このとき, T は λ-ハイブリッドである.

次に, 吸引点の具体例を示し定理 1.2 を考察する.

例 2.2 (Atsushiba, Iemoto, Kubota and Takeuchi [2]). $H = \mathbb{R}^2$ とし, $\alpha \in (0, 2\pi)$ とする. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ とし, C から C へ写像 S, T を以下で定義する. 任意の C の元 (x, y) 対して
$$S(x, y) = (-x, y), \quad T(x, y) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha).$$
このとき, C は有界だが閉集合でも凸集合でもないことは明らかで, 写像 S, T は非拡大となる. また, 写像 S, T の吸引点全体の集合はそれぞれ
$$A(S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}, \quad A(T) = \{(0, 0)\}$$
となり, 同様に不動点全体の集合はそれぞれ
$$F(S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, 1 < |y| < 2\}, \quad F(T) = \emptyset$$
となる. ここで (x_1, y_1) を C の任意の元とする. このとき以下の事実は定理 1.2 を用いずとも容易に確認できる.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} S^i(x_1, y_1) = (0, y_1) \in A(S), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} T^i(x_1, y_1) = (0, 0) \in A(T)$$

3. 共通吸引点定理

本節では2つのλ-ハイブリッド写像に関する共通吸引点定理を考察する. 2020年にIbaraki and Takeuchi [8] が以下の共通吸引点定理を証明した.

定理 3.1 ([8]). *C を H の有界部分集合とし, λ と μ を実数とする. S を C から C への λ-ハイブリッド写像で, T を C から C への μ-ハイブリッド写像とし, $ST = TS$ を満たすとする. ここで点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する. x を C の任意の元とし, 任意の自然数 n に対して*

$$x_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} S^i T^j x$$

とする. ただし, S^0 と T^0 は C から C への恒等写像とする. このとき以下が成立する.

(1) $A = A(S) \cap A(T)$ は空でない閉凸集合となる;
(2) 点列 $\{x_n\}$ は $u_0 = \lim_{(i,j)} P_A S^i T^j x$ へ弱収束する;
(3) C が閉凸集合ならば $u_0 \in F(S) \cap F(T)$ である.

注意 3.2. 定理 3.1 の (2) において, u_0 が C の要素であるなら $u_0 \in F(S) \cap F(T)$ が言える. すなわち, (3) の仮定の "C が閉凸がない" でも点列 $\{x_n\}$ の弱収束先は S と T に共通不動点となる場合がある.

次に定理3.1の条件を満たす2つの可換なλ-ハイブリッド写像の例を考察する. はじめに, 注意3.2で示した, 定理3.1において "C が閉凸でない" 場合で, 点列 $\{x_n\}$ の弱収束先が S と T の共通不動点となる例を示す ([8] を参照).

例 3.3 ([8]). $H = \mathbb{R}^2$ とし, $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \in \left[0, \frac{1}{2}\right), |y| \in \left[0, \frac{1}{4}|x| + \frac{3}{8}\right)\right\}$ とする. C から C へ写像 S, T, U を以下で定義する. 任意の C の元 (x,y) 対して

$$S(x,y) = (-x,y), \quad T(x,y) = (-x,-y), \quad U(x,y) = (x,|x|y).$$

このとき, C は有界だが閉集合でも凸集合でもないことは明らかで, 写像 S と T は非拡大 (1-ハイブリッド) となるが非伸張 (0-ハイブリッド) ではなく, 写像 U は非伸張 (0-ハイブリッド) となるが非拡大 (1-ハイブリッド) ではない. さらに S と U, T と U はそれぞれ可換となる. すなわち $SU = US$, $TU = UT$ である. また, それぞれの写像の吸引点全体の集合は

$$A(S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}, \quad A(T) = \{(0,0)\}, \quad A(U) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

となり, 同様に不動点全体の集合はそれぞれ

$$F(S) = \{(x,y) \in C : x = 0\}, \quad F(T) = \{(0,0)\}, \quad F(U) = \{(x,y) \in C : y = 0\}$$

となる. S と U, T と U の共通不動点全体の集合と共通吸引点全体の集合は

$$F(S) \cap F(U) = A(S) \cap A(U) = \{(0,0)\}, \quad F(T) \cap F(U) = A(T) \cap A(U) = \{(0,0)\}$$

となる. ここで (x_1, y_1) を C の任意の元とすると, 定理3.1から以下の事実を得る.

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} S^i U^j (x_1,y_1) = (0,0) \in A(S) \cap A(U) = F(S) \cap F(U)$
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} T^i U^j (x_1,y_1) = (0,0) \in A(S) \cap A(U) = F(T) \cap F(U)$

最後に, 定理3.1において "C が閉凸でない" 場合で, 点列 $\{x_n\}$ の弱収束先が必ずしも S と T の共通不動点とはならない例を示す ([8] を参照).

例 3.4 ([8]). $H=\mathbb{R}^2$ とし, $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq \max\{|x|,|y|\}<2\}$ とする. C から C へ写像 S, T, U を以下で定義する. 任意の C の元 (x,y) 対して

$$S(x,y)=(-x,y),\quad T(x,y)=(-x,-y),$$
$$U(x,y)=\begin{cases}\left(x,\frac{y}{2}+\frac{y}{2|y|}\right) & (x,y)\in C_1:=\{(x,y)\in C:|x|<1\},\\ \left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2|x|},y\right) & (x,y)\in C_2:=\{(x,y)\in C:|y|<1\},\\ \left(\frac{x}{|x|},\frac{y}{|y|}\right) & (x,y)\in C_3:=\{(x,y)\in C:|x|\geq 1,|y|\geq 1\}.\end{cases}$$

このとき, C は有界だが閉集合でも凸集合でもないことは明らかで, $C=C_1\cup C_2\cup C_3$ かつ $C_i\cap C_j=\emptyset$ ($i,j\in\{1,2,3\}$, $i\neq j$) である. 写像 S と T は非拡大 (1-ハイブリッド) となるが非伸張 (0-ハイブリッド) ではなく, 写像 U は非伸張 (0-ハイブリッド) となるが非拡大 (1-ハイブリッド) ではない. さらに S と U, T と U はそれぞれ可換となる. すなわち $SU=US$, $TU=UT$ である. また, それぞれの写像の吸引点全体の集合は

$$A(S)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0\},\quad A(T)=\{(0,0)\},\quad A(U)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\leq 1,|y|\leq 1\}$$

となり, 同様に不動点全体の集合はそれぞれ

$$F(S)=\{(x,y)\in C : x=0, 1\leq|y|<2\},$$
$$F(T)=\emptyset,$$
$$F(U)=\{(x,y)\in C : \max\{|x|,|y|=1\}$$

となる. S と U の共通不動点全体の集合と共通吸引点全体の集合は

$$A(S)\cap A(U)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0,|y|\leq 1\},\quad F(S)\cap F(U)=\{(0,1),(0,-1)\}$$

となり, T と U 共通吸引点全体の集合は

$$A(T)\cap A(U)=\{(0,0)\}$$

となる. ここで (x_1,y_1) を C の任意の元とすると, 定理 3.1 から以下の事実を得る.

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}S^iU^j(x_1,y_1)=(u,v)\in A(S)\cap A(U)$
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}T^iU^j(x_1,y_1)=(0,0)\in A(T)\cap A(U)$

謝辞. 本研究は JSPS 科研費 19K03632, 19H01479 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Fixed point and ergodic theorems for λ-hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., **11** (2010), 335–343.

[2] S. Atsushiba, S. Iemoto, R. Kubota and Y. Takeuchi, *Convergence theorems for some classes of nonlinear mappings in Hilbert spaces*, Linear and Nonlinear Anal. **2** (2016), 125–153.

[3] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach spaces*, Austral. Math. Soc., **57** (1998), 117–127.

[4] J.-B. Baillon, *Un theoreme de type ergodique pour les contractions non lineaire s dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser., A-B **280** (1975), 1511–1514.

[5] R. E. Bruck, *On the convex approximation property and the asymptotic behavior of nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math., **38** (1981), 304–314.

[6] R. DeMarr, *Common fixed points for commuting contraction mappings*, Pacific J. Math., **13** (1963), 1139–1141.

[7] 茨木貴徳, 「ヒルベルト空間における非線形写像族の共通不動点へ収束定理」京都大学数理解析研究所講究録 **2190** (2021), 8–13.

[8] T. Ibaraki and Y. Takeuchi, *A mean convergence theorem finding a common attractive point of two nonlinear mappings*, Yokohama Math. J., **66** (2020), 61–77.

[9] S. Ishikawa, *Common fixed points and iteration of commuting nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., **80** (1979), 493–501.

[10] S. Kitahara and W. Takahashi, *Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **2** (1993), 333–342.

[11] F. Kohsaka, *Existence and approximation of common fixed points of two hybrid mappings in Hilbert spaces*,J. Nonlinear and Convex Anal. **16** (2015), 2193–2205.

[12] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. **91** (2008), 166–177.

[13] P. K. F. Kuhfittig, *Common fixed points of nonexpansive mappings by iteration*, Pacific J. Math., **97** (1981), 137–139.

[14] Y. Kurokawa and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for nonspreading mappings in Hilbert spaces*, Nonlinear Anal., **73** (2010), 1562–1568.

[15] J. Linhart, *Beiträge zur Fixpunkttheorie nichtexpandierender Operatoren*, Monatsh. Math., **76** (1972), 239–249 (German).

[16] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **211** (1997), 71–83.

[17] T. Suzuki, *Convergence theorems to common fixed points for infinite families of nonexpansive mappings in strictly convex Banach spaces*, Nihonkai Math. J., **14** (2003), 43–54.

[18] T. Suzuki, *Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces*, Fixed Point Theory and Applications, *2005* (2005), 103–123.

[19] T. Suzuki, *Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **340** (2008), 1088-1095.

[20] 竹内幸雄, 「狭義凸 Banach 空間における写像の吸引点集合」京都大学数理解析研究所講究録 **2114** (2019), 144–151.

[21] W. Takahashi, *Fixed point theorems for new nonlinear mappings in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal., **11** (2010), 79–88.

[22] W. Takahashi and Y. Takeuchi, *Nonlinear ergodic theorem without convexity for generalized hybrid mappings in a Hilbert space*,J. Nonlinear Convex Anal., **12** (2011), 399–406.

[23] W. Takahashi and J.-C. Yao, *Fixed point theorems and ergodic theorems for nonlinear mappings in Hilbert spaces*, Taiwanese J. Math., **15** (2011), 457–472.