

# AHP における 3 次の一対比較行列の最大固有値と Newton 法

On a maximum eigenvalue of third-order pairwise comparison matrix in AHP  
and Newton's method

富山大学・学術研究部社会科学系\* 白石 俊輔

大分大学・理工学部† 小畑 経史

Shunsuke Shiraishi

School of Economics, University of Toyama

Tsuneshi Obata

Faculty of Science and Technology, Oita University

## §1. はじめに

AHP (Analytic Hierarchy Process, 階層化意思決定法) では,  $n$  個の比較対象についての意思決定者の主観的選択を, Saaty の離散スケールを用いて言語を数値化する. その際に現れるのが一対比較行列である. いったん, 一対比較行列  $A$  が与えられれば, 比較対象のウェイトは固有値法

$$Aw = \lambda_{\max} w$$

で求められる. ここで,  $\lambda_{\max}$  は行列  $A$  の最大固有値である. 本論では,  $n = 3$  のときに, 最大固有値  $\lambda_{\max}$  が Newton 法で求まることを示す. あわせて, Newton 法と, 二分法, セカント法の収束速度を比較する.

## §2. 一対比較行列

$n$  個の比較対象 (本論では  $n = 3$ ),  $C_i, i = 1, \dots, n$  に対して, AHP においては一対比較を行う.  $C_i$  と  $C_j$  の比較は Saaty の離散スケール (表 1) を用いる.

表 1 Saaty の離散スケール

言語表現	値
同程度に重要	1
やや重要	3 or 1/3
ふつうに重要	5 or 1/5
かなり重要	7 or 1/7
絶対的に重要	9 or 1/9
中間の値	2, 4, 6, 8 or その逆数

\* 〒930-8555 富山市五福 3190 shira@eco.u-toyama.ac.jp

† 〒870-1192 大分市大字旦野原 700 t-obata@oita-u.ac.jp

**Remark 1** 数値5に対応する形容詞「ふつうに」は、通常のAHPの教科書では用いられない。たとえば刀根 [18] や八巻・高井 [19] では、単に「重要」としている。欧文の成書である、Saaty [11] では ‘strongly more important’, Burunelli [2] では ‘strong preference’, Kulakowski [5] では ‘essential or strong importance’ とさまざまな表現をしている。「ふつうに」は現在の若者言葉におもねった使い方である。

たとえばあるひとが、和食では寿司がすき焼きよりやや好きといった場合には、 $C_i = \text{寿司}$ ,  $C_j = \text{すき焼き}$  に対し  $a_{ij} = 3, a_{ji} = 1/3$  を割り当てる。この比較を  $n(n-1)/2$  回繰り返すことにより、 $n$  次の一対比較行列が得られる:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

もし、各比較対象の真の値  $w_1, \dots, w_n$  が分かっているなら（重さとか面積とか）、一対比較行列は、

$$W = \begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

となっているはずである。ただし、AHPではSaatyの離散スケールを使うこともあり、かならずしも  $A = W$  とはならないため<sup>\*1</sup>,  $A \approx W$  であるとみなすことになる。いっぽう、 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$  に対し、

$$\begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

である。つまり、 $n$  は  $W$  の（最大）固有値である。 $A \approx W$  なのだから、固有値問題

$$Aw = \lambda_{\max} w$$

を解けば、一対比較によって比較対象のウエイトが（近似的に）得られるだろうと考えるのが、AHPにおける固有値法である [2, 5, 11, 18]。ここで  $\lambda_{\max}$  は  $A$  の最大固有値である。本論ではNewton法によって  $\lambda_{\max}$  が求まることを示す。固有値法の数値最適化による理論づけについては [12] で確立された。

$\lambda_{\max}$  には次の性質がある。

**Theorem 1 (Saaty [11])**

1.  $\lambda_{\max} \geq n$ ,
2.  $\lambda_{\max} = n \Leftrightarrow A$  が整合的.

ここで  $A$  が整合的であるとは、 $i, k, j = 1, \dots, n$  に対し

$$a_{ik}a_{kj} = a_{ij}$$

が成り立つときをいう。

この事実をもとに、AHPにおいては次の整合度（consistency index）C.I. を定義し、意思決定者の判断の整合性を判定する。

$$\text{C.I.} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}.$$

<sup>\*1</sup>  $n = 4$  のときに  $A = W$  となるのは、Saatyの離散スケールで表現できる一対比較行列の0.001421%にすぎない [8].

C.I.  $\leq 0.1$ であれば、判断は整合的であるとみなされる [2, 5, 11, 18]. 分かりやすい指標である C.I. の採用によって、AHP は広く一般に使われるようになったと考えられる. なお、AHP における多様な整合度指標については、[3] のサーベイを参照されたい.

### §3. 一対比較行列の固有多項式

一対比較行列が正值逆数行列であることを使って、以前われわれは次の結果を得た.

**Theorem 2 (Shiraishi-Obata-Daigo [17])**  $P_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$  を  $A$  の固有多項式とする.

1.  $P_A(\lambda) = \lambda^n - n\lambda^{n-1} + 0 \cdot \lambda^{n-2} + c_3\lambda^{n-3} + \dots + (-1)^n \det A,$
2.  $c_3 = \sum_{i < k < j} \left( 2 - \frac{a_{ik}a_{kj}}{a_{ij}} - \frac{a_{ij}}{a_{ik}a_{kj}} \right) \leq 0,$
3. C.I. = 0  $\Leftrightarrow c_3 = 0.$

**Corollary 1 (小畑・白石 [9])**  $n = 3$  のとき,

1.  $P_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \det A,$
2.  $c_3 = -\det A \leq 0,$
3. C.I. = 0  $\Leftrightarrow \det A = 0.$

従って、3 次の一対比較行列の固有多項式のグラフは図 1 のようになる. 縦軸切片が  $-\det A \leq 0$  である.

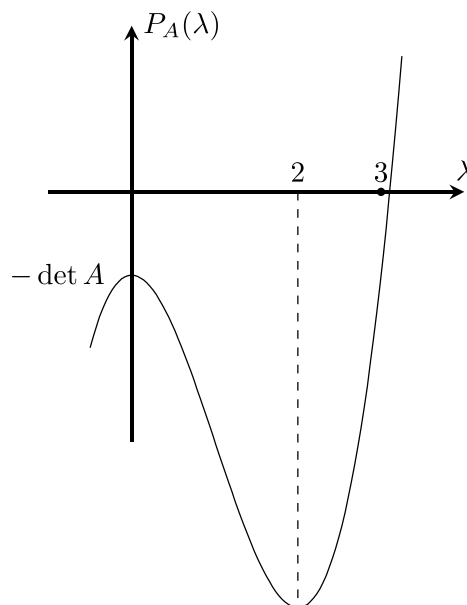


図 1 不整合な  $A$  に対する  $P_A(\lambda)$  のグラフ

この図で見られるように、 $c_3 = -\det A < 0$  であれば、 $\lambda = 3$  より少し右に固有多項式の実数解が 1 個現れる. 次節では、この解を Newton 法を用いて解くこととする.

## §4. Newton 法

3 次の一対比較行列の固有方程式  $P_A(\lambda) = 0$  の実数解を、次の Newton 法の反復を用いて求める。

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= 3, \\ \lambda_{k+1} &= \lambda_k - \frac{P_A(\lambda_k)}{P'_A(\lambda_k)}, \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

この点列に対して、以下の一連の性質が成り立つ（証明は [14] に）。

**Lemma 1**  $\lambda_k$  は下に有界である。

**Lemma 2**  $\lambda_k$  は減少列である。

下に有界な減少列は収束するので\*2、以下の結果が得られる。

**Theorem 3 (Shiraishi-Obata [14])** 初期値  $\lambda_0 = 3$  に対し、Newton 法で生成した点列は最大固有値  $\lambda_{\max}$  に収束する。

Newton 法によって、いったん  $\lambda_{\max}$  が求まれば、ウエイト  $w$  は次の最小二乗化問題を、たとえば Excel の Solver で、解けばよい [1, 16]。

$$\begin{aligned}\text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (a_{ij} w_j - \lambda_{\max} w_j)^2 \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^3 w_j = 1, \quad w_j \geq 0, j = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

## §5. 収束速度と数値実験

Newton 法なので、あたりまえだが収束は 2 次収束である。

**Proposition 1 (Shiraishi-Obata [14])**

$$\lambda_{k+1} - \lambda_{\max} \approx \frac{1}{2} \frac{P''_A(\lambda_{\max})}{P'_A(\lambda_{\max})} (\lambda_k - \lambda_{\max})^2.$$

Newton 法の収束が速いことを確認するために、二分法\*3、セカント法\*4と比較する数値実験も行った。表 2、図 2 に、Saaty の離散スケールによる 5,000 個のランダムな 3 次一対比較行列に対する、各手法の収束までの反復回数の分布を示す。なお、ここでは、反復で得られた値と  $\lambda_{\max}$  との差が  $10^{-12}$  以下になった時点で、収束した、とみなすことにした。R による数値実験のプログラムソースは [9] を参照されたい。

一例として、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1/5 & 1 & 1/7 \\ 1/5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

に対する各手法での収束の様子を図 3 に表している。この行列に対しては、Newton 法では 5 回、セカント法では 8 回、二分法では 41 回で解に収束した。これは各手法での反復回数のいずれも中央値であり、今回の数値実験での典型例といえる。

\*2 [https://encyclopediaofmath.org/wiki/Decreasing\\_sequence](https://encyclopediaofmath.org/wiki/Decreasing_sequence)

\*3 [https://encyclopediaofmath.org/wiki/Dichotomy\\_method](https://encyclopediaofmath.org/wiki/Dichotomy_method)

\*4 [https://encyclopediaofmath.org/wiki/Secant\\_method](https://encyclopediaofmath.org/wiki/Secant_method)

表2 収束までの反復回数の分布（代表値）

	最小値	中央値	最頻値	平均値	最大値
Newton 法	2	5	5	5.3926	11
セカント法	3	8	8	8.9066	25
二分法	30	41	41	40.3576	48

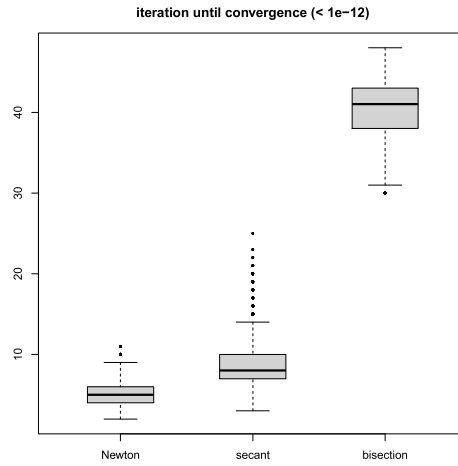


図2 収束までの反復回数の分布（箱ヒゲ図）

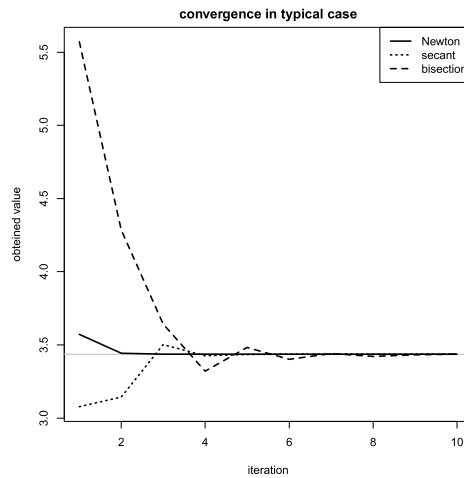


図3 収束までの様子（典型例）

## §6. おまけ

シミュレーションを行った際に、C.I. と Newton 法の反復回数の間にはどのような関係があるのか調べてみたのが、図4である。C.I. が小さくなれば、反復回数が少なくなる様子が見て取れる。順序プロビット分析 [4, 6] などによる、統計的な解析は今後の研究課題となる。

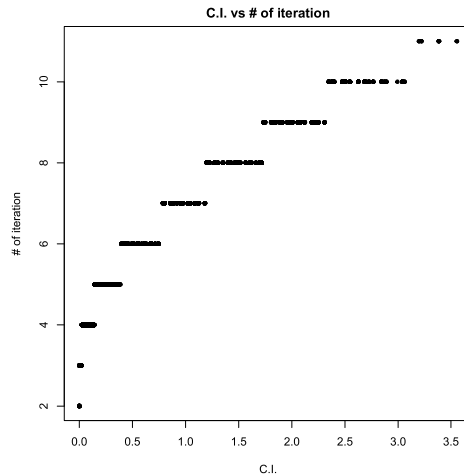


図4 C.I. と収束までの反復回数の関係

## 参考文献

- [1] S. Boyd, L. Vandenberghe: *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*, Cambridge University Press, 2018.
- [2] M. Brunelli: *Introduction to the Analytic Hierarchy Process*, Springer, 2014.
- [3] M. Brunelli: A survey of inconsistency indices for pairwise comparisons, *International Journal of General Systems*, 47, 2018, 751–771.
- [4] 北村行伸: ミクロ計量経済学入門, 日本評論社, 2009.
- [5] K Kulakowski: *Understanding the Analytic Hierarchy Process*, CRC Press, 2021.
- [6] 西山慶彦, 新谷基嗣, 川口大司, 奥井亮: 計量経済学, 有斐閣, 2019.
- [7] T. Obata, S. Shiraishi: Consistency index less affected by the size of pairwise comparison matrix in AHP, *Proceedings of the 18th Asia Pacific Management Conference*, 2016, 369–377.
- [8] T. Obata, S. Shiraishi: Computational study of characteristic polynomial of 4th order PCM in AHP, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, 53(3), 2021, 1–12.
- [9] 小畑経史, 白石俊輔: AHP の 3 次の一対比較行列の最大固有値の計算法—二分法, セカント法, ニュートン法の比較—, 大分大学理工学部研究報告, 69, 2022. (掲載予定)
- [10] T. Obata, S. Shiraishi, M. Daigo, N. Nakajima: Assessment for an incomplete comparison matrix and improvement of an inconsistent comparison: Computational experiments, *Proceedings of The Fifth International Symposium on The Analytic Hierarchy Process*, 1999, 200–205.
- [11] T. L. Saaty: *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, 1980.
- [12] K. Sekitani, N. Yamaki: A logical interpretation for the eigenvalue method in AHP, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 42(2), 1999, 219–232.
- [13] S. Shiraishi, T. Obata: Some remarks on the maximum eigenvalue of 3rd order pairwise comparison matrices in AHP, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, 53(2), 2021, 1–13.
- [14] S. Shiraishi, T. Obata: On a maximum eigenvalue of third-order pairwise comparison matrix in analytic hierarchy process and convergence of Newton’s method, *SN Operations Research Forum*, 2(3), 2021, Article No. 30.

- [15] 白石 俊輔, 小畑 経史: AHP における 3 次と 4 次の一対比較行列に関する考察, 大分大学理工学部研究報告, 68, 2021, 7–12.
- [16] 白石 俊輔, 小畑 経史: Excel による 3 次の一対比較行列の重要度の計算法, 富大経済論集, 67(1), 2021, 115–121.
- [17] S. Shiraishi, T. Obata, M. Daigo: Properties of positive reciprocal matrix and their application to AHP, Journal of the Operations Research Society of Japan, 41(3), 1998, 404–414.
- [18] 刀根 薫: ゲーム感覚意思決定法, 日科技連, 1986.
- [19] 八巻 直一, 高井 英造: 問題解決のための AHP 入門, 日本評論社, 2005.