

On a closed set of states in a self-organizing map with inner product learning

内積型学習写像による自己組織化マップ上の状態保存性について

星野満博¹, 高橋勇人²

¹ 秋田県立大学システム科学技術学部

² 秋田県立大学大学院システム科学技術研究科

Mitsuhiro Hoshino¹ and Hayato Takahashi²

¹Faculty of Systems Science and Technology,
Akita Prefectural University

²Graduate School of Systems Science and Technolog,
Akita Prefectural University

1. 内積型学習写像をもつ自己組織化マップモデル

本報告は Kohonen 型アルゴリズム [5] として知られている自己組織化マップに関する数理モデルを扱い、主に学習プロセスに重きを置く。アルゴリズムとしての自己組織化マップは、広範囲な領域において応用をもち、主に可視化、クラスタリング等のツールとして利用されている。

自己組織化マップにおいて、各ノードからノード値への写像として定義されるモデル関数の学習過程下における数理特性について論ずる。自己組織化マップにおける学習写像としては、凸結合型が古くから用いられ、多くの応用においても採用されている。凸結合型学習写像については、特にオンライン型自己組織化マップ等の比較的単純な構造をもつ場合において、数学的フレームワークの下での議論がなされている ([1][3][4] 等)。本報告では、それらとは学習写像構造が異なる内積型学習写像をもつ自己組織化マップを扱い、学習過程におけるモデル関数の推移と状態保存性について考察する。

本報告で扱う内積型学習写像をもつ自己組織化マップモデルはノード、ノードの値、入力、学習プロセスの4つの対象により以下の様に特徴付けできる。

$$(\{1, 2, \dots, N\}, V, \{x_k\}_{k=0}^{\infty}, \{m_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty})$$

- (i) I をすべてのノードから成る集合とする。 I は有限で距離付けされた要素から成るものとする。集合 I と距離 d を

$$I = \{1, 2, \dots, N\} \subset \mathbb{N},$$
$$d(i, j) = |i - j|, \quad i, j \in I$$

と仮定する。

- (ii) V を実内積空間 $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の部分集合とする．各ノードは，それぞれ1つの値をもち，これらは V の要素であると仮定する．ノードとノード値との対応として定義される写像 $m : I \rightarrow V$ をモデル関数と呼ぶ．
- (iii) $X \subset V$ を入力集合とし，入力列 $\{x_k\}_{k=0}^\infty \subset X$ を考える．
- (iv) 学習プロセスは次のように定義される．与えられた初期モデル関数 m_0 と入力列 $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ に対して，モデル関数の列 $\{m_k(\cdot)\}_{k=0}^\infty$ は以下のように定義される．

- (a) 学習範囲: 各 m_k, x_k に対して

$$N_1(i) = \{j \in I \mid |j - i| \leq 1\} \quad (i \in I). \quad (1)$$

- (b) 学習率: $\alpha > 0$.

- (c) 更新後の値:

$$m_{k+1}(i) = \begin{cases} \frac{m_k(i) + \alpha x_k}{\|m_k(i) + \alpha x_k\|} & \left(i \in \bigcup_{i^* \in \arg\max_{j \in I} \langle m_k(j), x_k \rangle} N_1(i^*) \text{ のとき} \right) \\ m_k(i) & \left(i \notin \bigcup_{i^* \in \arg\max_{j \in I} \langle m_k(j), x_k \rangle} N_1(i^*) \text{ のとき} \right) \end{cases} \quad (2)$$

上記の内積型学習写像をもつ自己組織化マップに対して，凸結合型学習写像をもつ自己組織化マップでは，学習プロセス下におけるモデル関数の状態保存性に関して，幾つかの特性が知られている．凸結合型学習写像をもつ1次元入力型等の一部の自己組織化マップにおいては，モデル関数の更新の前後で，完全に単調性が保存される．モデル関数が一度その状態になると，その状態が保存されるという場合，このような状態のクラスを自己組織化マップの学習プロセスにおける閉じた状態クラスと呼ぶ．閉状態クラスやそれに準ずるクラスの存在性および性状については，[2] 等で言及されている．

2. 数値計算による順序付けの例

点乗積型学習写像による自己組織化マップの例を与える．

数値計算 1 第1節の学習プロセス (iv)-(a)(b)(c) と100個のノードを有する2次元入力自己組織化マップ

$$(\{1, 2, \dots, 100\}, V \subset \mathbb{R}^2, \{x_k\}_{k=0}^\infty, \{m_k(\cdot)\}_{k=0}^\infty)$$

を考える．各ノードに対する初期値 $m_0(i)$ を $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ 上において，一様に生成させた．入力 x は $[-1.1, 1.1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ 上の一様分布より生成する．また，内積として点乗積を用いる．すなわち

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

に対して $\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$ とする．図1は， $\alpha = 1.2$ を固定して，1000回の更新によるモデル関数の推移である．図において，各ノードの位置を示す座標は，ノード値を表している．学習が進むと徐々に順序付けされてゆく様子が観測できる． \square

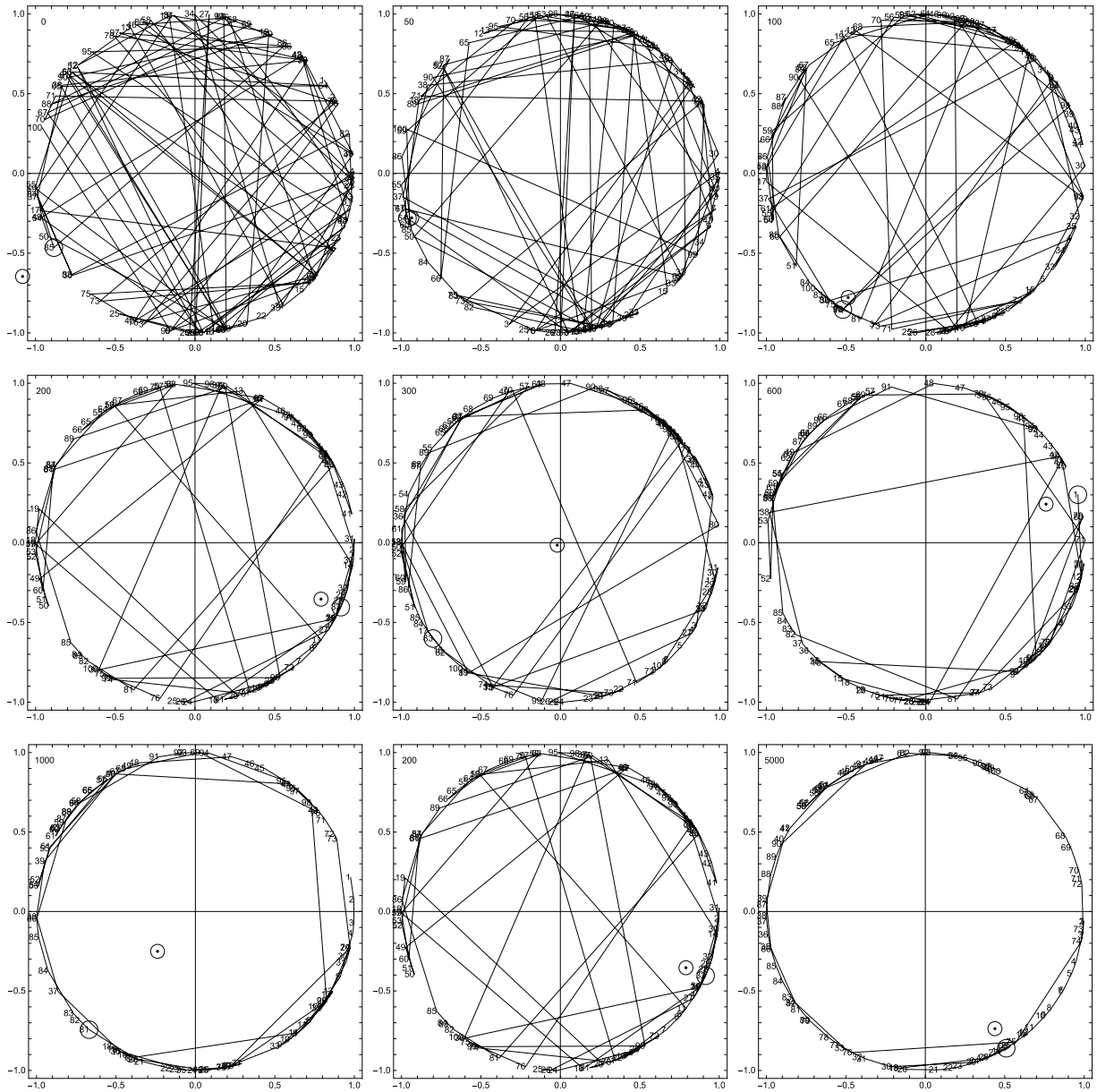


図 1: モデル関数の推移 (各図の左上の数字は更新回数)

3. 内積型学習写像下におけるモデル関数の挙動

内積型学習写像をもつ場合において、学習による更新の前後におけるモデル関数の挙動に注目する。以下に述べる学習プロセス上の一定条件下におけるモデル関数のふるまいについての結果は、これらの挙動を考察するにあたっての一助となる。

定理 1 自己組織化マップ

$$(\{1, 2, \dots, N\}, V, \{x_k\}_{k=0}^{\infty}, \{m_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty})$$

を考える．ここで， V は実内積空間 $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ のある部分集合，学習プロセスとして，第1節の (iv)-(a)(b)(c) を用いる．現在のモデル関数 m に対して，入力 x からの学習による m の更新後のモデル関数を m' とする．このとき，以下が成り立つ．

x に対して，ノード $i, i+1, i+2$ が

$$\|m(i)\| = \|m(i+1)\| = \|m(i+2)\| = 1, \quad (3)$$

$$\operatorname{argmax}_{j \in I} \langle m(j), x \rangle = \{i\}, \quad (4)$$

$$\langle m(i), m(i+2) \rangle \geq 0, \quad (5)$$

$$\langle x, m(i+2) \rangle \geq 0 \quad (6)$$

を満たすとき，モデル関数 m に対して，不等式

$$\langle m(i) - m(i+1), m(i+2) - m(i+1) \rangle \leq 0 \quad (7)$$

が成り立つならば，更新後のモデル関数 m' に対しても，不等式

$$\langle m'(i) - m'(i+1), m'(i+2) - m'(i+1) \rangle \leq 0 \quad (8)$$

が成り立つ．

証明 任意の $\alpha > 0$ と (3), (4), (5), (6) を満たす入力 x とモデル関数 m に対して，不等式 (7) により

$$\begin{aligned} & \langle m'(i) - m'(i+1), m'(i+2) - m'(i+1) \rangle \\ &= \left\langle \frac{m(i) + \alpha x}{\|m(i) + \alpha x\|} - \frac{m(i+1) + \alpha x}{\|m(i+1) + \alpha x\|}, m(i+2) - \frac{m(i+1) + \alpha x}{\|m(i+1) + \alpha x\|} \right\rangle \\ &\leq \frac{1}{\|m(i) + \alpha x\|} \left(1 - \frac{1}{\|m(i+1) + \alpha x\|} \right) \left(\langle m(i), m(i+2) \rangle + \alpha \langle x, m(i+2) \rangle \right) \\ &\quad - \frac{1}{\|m(i+1) + \alpha x\|} \left(1 - \frac{1}{\|m(i) + \alpha x\|} \right) \left(\langle m(i+1), m(i+2) \rangle + \alpha \langle x, m(i+2) \rangle \right) \end{aligned}$$

を得ることができる．上記不等式により，不等式 (8) が成り立つことが示される． \square

注 1 定理 1 において，条件 (4) の場合に加えて，

$$\operatorname{argmax}_{j \in I} \langle m(j), x \rangle = \{i+1\}, \{i+2\}$$

の場合においても更新の前後で不等式 (7) (または (8)) が保存される．このことから，本定理はモデル関数の整列化形成の局所的な挙動の特性と状態の閉性に関するひとつの結果を与えている．

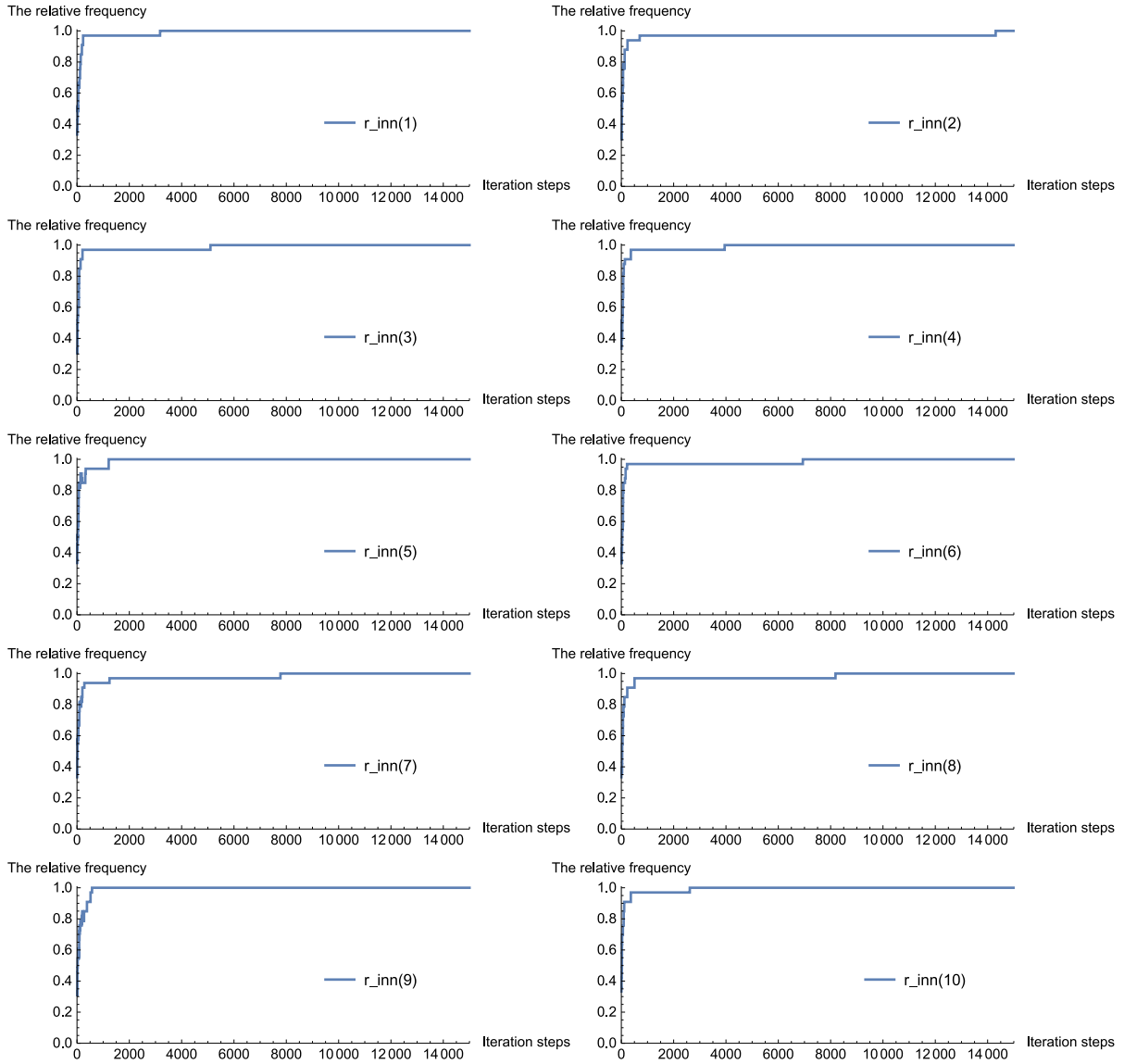


図 2: 条件 $S_{\text{inn}}(i)$ を満たすノードの相対頻度の推移. 横軸は更新回数である.

定理 1 における不等式 (7) (または (8)) を満たすノードの出現頻度の推移について, 以下の数値例を与える.

数値計算 2 第 1 節の学習プロセス (iv)-(a)(b)(c) を用いた点乗積型学習写像をもつノード総数 35 の 2 次元入力自己組織化マップ $(\{1, 2, \dots, 35\}, V \subset \mathbb{R}^2, \{x_k\}_{k=0}^{\infty}, \{m_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty})$ を考える. 各ノードに対する初期値 $m_0(i)$ を $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ 上において, 一様に生成させ, 入力 x は $[-1.1, 1.1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ 上の一様分布より生成させる. また $\alpha = 1.2$ であり, 内積として点乗積を用いる.

条件 $S_{\text{inn}}(i)$: ノード $i, i+1, i+2$ に対して $\langle m(i) - m(i+1), m(i+2) - m(i+1) \rangle \leq 0$

条件 $S_{\text{inn}}(i)$ を満たすノードの相対頻度

$$r_{\text{inn}} = \frac{\#\{i \mid i, i+1, i+2 \text{ が } S_{\text{inn}}(i) \text{ を満たす}\}}{n-2}$$

を考える。ここで、 n はノードの総数、 $\#(S)$ は加算集合 S の要素の総数である。図 2 は、 r_{inn} の値の更新による推移を表したものである。10 個のグラフは、それぞれ、同じ初期値に対して、入力値のみが異なる。巨視的にみて、 r_{inn} の値が徐々に 1 に近づいていることが観測できる。□

参考文献

- [1] M. Cottrell, M. Olteanu, F. Rossi and N. Villa-Vialaneix, *Theoretical and applied aspects of the self-organizing maps*, Proceedings of the 11th international workshop WSOM 2016, pp. 3–26.
- [2] M. Hoshino and Y. Kimura, *Ordered states and probabilistic behavior of self-organizing maps*, proceedings of Asian conferece on nonlinear analysis and optimization 2008, pp. 31–44.
- [3] M. Hoshino, *On state preserving property and nonexpansivity in self-organizing maps*, J. Nonlinear Convex Anal. Vol. 16 Num. 11 (2015) pp. 2255–2261.
- [4] M. Hoshino, *Local behavior of node with extreme value of model function in learning processes of basic self-organizing maps*, Linear and Nonlinear Anal., Vol. 6, Num. 1 (2020) pp. 65–72.
- [5] T. Kohonen, *Self-Organizing Maps, Third Edition*, Springer, 2001.