

アフィン Weyl 群の非可換表現と量子曲線¹

山田泰彦 (Yasuhiko Yamada)²

1 はじめに

連続及び離散 Painlevé 方程式は一般には非自励な方程式であるが、パラメータの特殊化により自励化が可能である。自励化された Painlevé 方程式は平面上の可積分系であり保存曲線を持つ。この保存曲線は超対称ゲージ理論の Seiberg-Witten 曲線と見ることもでき、数え上げ幾何学やミラー対称性に応用がある。本稿では、この曲線の量子化 (=非可換化) について考える。

基本となる対象は、交換関係

$$yx = qxy, \quad (1)$$

に従う非可換変数 x, y (及び可換なパラメータ) に作用するアフィン Weyl 群の表現である。可換変数の場合、種々の離散 Painlevé 方程式は、アフィン Weyl 群の双有理表現の平行移動作用 (微分 Painlevé 方程式はその連続極限) として理解できる [26]。同様に、非可換変数に対するアフィン Weyl 群の表現から量子 Painlevé 方程式が構成できることが知られている [11][19][20][25]。非可換な場合も、自励化の下で保存曲線が存在し、それらはアフィン Weyl 群不変量として求められる。 y を x の q シフト作用素 (あるいはその逆) と見れば、量子曲線は対称性の高い特殊な q 差分作用素であり、楕円差分化も含め興味深い対象である [30][27][5]。

本稿では、上記のようなアフィン Weyl 群の表現と、そこから得られる量子保存曲線 (単に量子曲線という) について、主に [23] の結果を紹介する。合わせて量子曲線の数え上げ幾何学への応用についても議論する。本稿を通して、2つの乗法的 base パラメータ p, q を用いる。 p は非自励化、 q は量子化のパラメータである。

$$\begin{array}{ccc} \text{non-autonomous} & \xrightarrow{p \rightarrow 1} & \text{autonomous,} \\ \text{non-commutative} & \xrightarrow{q \rightarrow 1} & \text{commutative.} \end{array} \quad (2)$$

§2 で可換な場合を復習し、§3 でその量子化について述べる。

2 可換な場合

この節では $q = 1$ 、従って変数 x, y は可換とする。

2.1 ミラー曲線

最も簡単な場合として、次の曲線を考える

$$H(x, y) := x + y + \frac{1}{xy} = u. \quad (3)$$

これは $u \in \mathbb{C}$ をパラメータとする xy 平面内の曲線族 C_u を表す。Generic な u に対して C_u は種数 1 の楕円曲線である。 C_u 上の有理的微分 1 形式 λ (Seiberg-Witten 微分) を

$$\lambda = \log y \frac{dx}{x}, \quad (4)$$

¹Keywords: affine Weyl group; quantum curve; Painlevé equation
2020 Mathematics Subject Classification: 39A06; 39A13; 14N35

²神戸大学大学院・理学研究科 (Department of Mathematics, Kobe University, Rokko, Kobe 657-8501, Japan.)
e-mail: yamaday@math.kobe-u.ac.jp

で定義し, C_u 上の標準 1-cycle A, B に対する積分を考える. これから, 次の関係

$$t = \int_A \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \int_B \lambda, \quad (5)$$

により, プレポテンシャルと呼ばれる関数 $F(t)$ が計算される. 後に非可換の場合と比較するため, $F(t)$ の計算手続きを簡単に見ておく. 便宜上 $z = u^{-1}$ とする.

(i) A -cycle 積分を, λ の $x = 0$ の周りの留数積分として計算する (そのように A -cycle をとる)

$$t = \int_A \lambda = \log z + I(z), \quad I(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!^3} \frac{z^n}{n}. \quad (6)$$

(ii) 積分 $\varpi = \int_C \lambda$ の満たす Picard-Fuchs 方程式

$$[\vartheta_z^3 - 3z(3\vartheta_z + 2)(3\vartheta_z + 1)\vartheta_z]\varpi = 0, \quad (\vartheta_z = z\partial_z) \quad (7)$$

を, (6) が解になるように求める. 得られた方程式は任意の 1-サイクル C に対して成り立つ.

(iii) B -cycle 積分を, (7) の次の形の解として求める

$$\int_B \lambda = \frac{1}{2}(\log z)^2 + (\log z)I(z) + (z \text{ の冪級数}). \quad (8)$$

(iv) (6) の逆変換 $z = z(t)$ を (8) に代入する

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t) = \left[\int_B \lambda \right]_{z=z(t)}. \quad (9)$$

この結果を t で積分して $F(t)$ を得る.

以上の計算は, (計算機を使えば) 簡単に実行できて次の結果を得る

$$F(t) = \frac{1}{18}(\log t)^3 + 3t + \frac{45}{8}t^2 + \frac{244}{9}t^3 + \frac{12333}{64}t^4 + \dots = \frac{1}{18}(\log t)^3 - \sum_{k,d=1}^{\infty} \frac{N_d}{k^3} (-t)^{kd}. \quad (10)$$

この式から定まる係数 N_d

$$(N_1, N_2, \dots) = (3, -6, 27, -192, 1695, -17064, \dots), \quad (11)$$

は, 曲線 (3) に対応するある Calabi-Yau 3-fold (標準束 $K_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathbb{P}^2$ の全空間) 上の, 次数 d の有理曲線の個数を与える [6]³. 同様の結果は一般の del Pezzo 曲面 $B_k = B_k(\mathbb{P}^2)$ ($=\mathbb{P}^2$ の k 点 blow-up) と $(\mathbb{P}^1)^2$ についても知られており, 対応する曲線は次で与えられる.

geometry	symmetry	curve
\mathbb{P}^2	$A_0^{(1)}$	$H = x + y + \frac{1}{xy}$
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	$A_1^{(1)}$	$H = x + \frac{a}{x} + y + \frac{1}{y}$
B_1	$A_1^{(1)'}$	$H = x + y + \frac{1}{x} + \frac{a}{xy}$
B_2	$A_{1+1}^{(1)}$	$H = \frac{1}{abxy} + \frac{1}{abx} + \frac{1}{aby} + \frac{x}{a} + y$
B_3	$A_{2+1}^{(1)}$	$H = \frac{y}{abx} + \frac{1}{abx} + \frac{y}{b} + \frac{cx}{y} + \frac{c}{y} + x$
B_4	$A_4^{(1)}$	$H = b_2x + \frac{x}{b_1b_3b_4y} + \frac{y}{b_4x} + \frac{1}{b_1b_4xy} + \frac{b_1+1}{b_1b_4x} + \frac{b_3+1}{b_1b_3b_4y} + y$

2 列目はアフィン Weyl 群対称性を表す. B_k ($k = 5, 6, 7, 8$) の場合 (対称性は $D_5^{(1)}, E_6^{(1)}, E_7^{(1)}, E_8^{(1)}$) についても, 具体的な曲線の表示が知られている (例えば [3]).

³高い種数の場合も含めた数学的に厳密な結果については [7][4] 等を参照されたい.

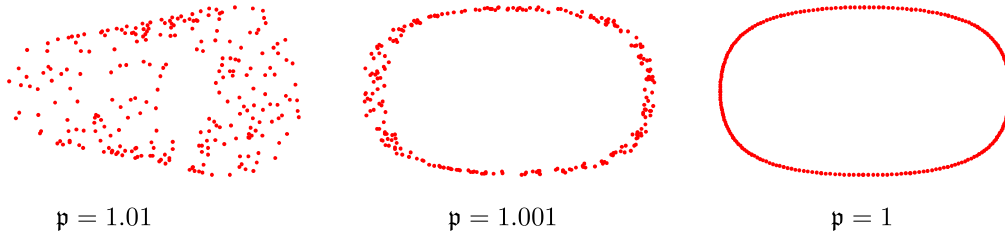
2.2 自励的 Painlevé 方程式の保存曲線

自励化した Painlevé の保存曲線を 2 つの例で見ておこう.

例 1. 次は $A_1^{(1)}$ 型 Weyl 群に対応する q -Painlevé 方程式である

$$T : (a; x, y) \mapsto \left(\mathfrak{p}a; a \frac{x+y}{x+ay} y, \frac{x+ay}{x+y} \frac{1}{x} \right). \quad (13)$$

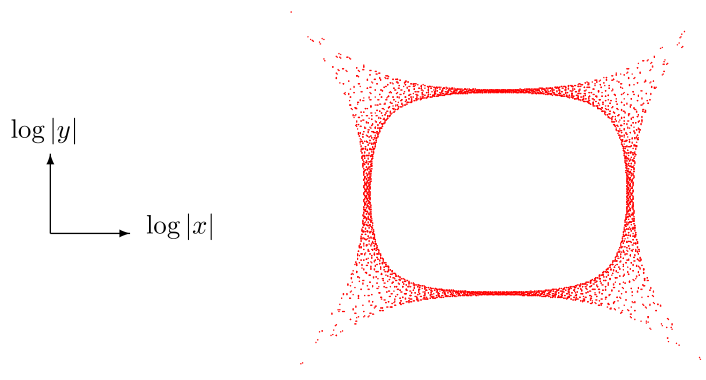
変換 T を繰り返し施すことがこの系の離散的な発展である. 変換 T を施す度に変換式に含まれるパラータ a の値が変化するという意味で, この時間発展は非自励的である (a を離散的な時間変数とみなしても良い). 初期値 $(a, x, y) \in \mathbb{R}_{>0}^3$ に対する軌道をプロットすると, $(\log x, \log y)$ 座標で次のようになる



パラメータ \mathfrak{p} が 1 のとき, 系は自励的となり保存曲線を持つことが見て取れる. 実際, 次が保存することが簡単に確かめられる.

$$H(x, y) := x + \frac{a}{x} + y + \frac{1}{y}. \quad (14)$$

$\mathfrak{p} = 1$ で複素数の初期値 $x, y \in \mathbb{C}$ から始めた場合, 点 (x, y) は種数 1 のリーマン面 $H(x, y) = u$ 上を走る. $(\log |x|, \log |y|)$ 座標で実平面 \mathbb{R}^2 に射影してプロットすると, 次の図 (アメーバと呼ばれる) のようになる. 正の実数の初期値に対する前述の保存曲線は, アメーバの内側の境界に対応する. アメーバは超離散極限 ($\times \rightarrow +, + \rightarrow \max$) で区分線形なトロピカル曲線になる (例えば [15]).

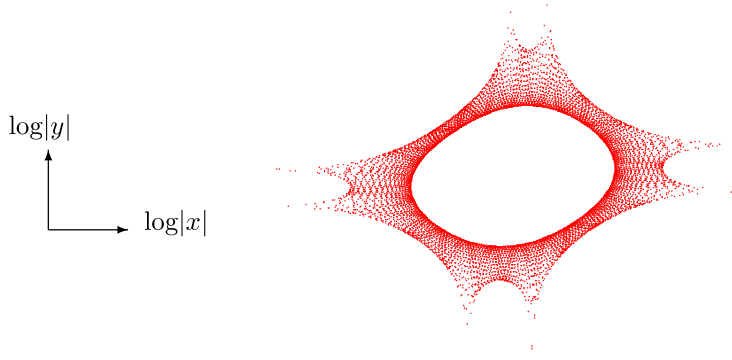


例 2. 次は Jimbo-Sakai の q - P_{VI} 方程式である [16] (ここでは q 差分のベースを \mathfrak{p} としている)

$$T : \left(\begin{array}{c} a_1, a_2, a_3, a_4 \\ a_5, a_6, a_7, a_8 \end{array}; x, y \right) \mapsto \left(\begin{array}{c} a_1, a_2, \mathfrak{p}a_3, \mathfrak{p}a_4 \\ a_5, a_6, \mathfrak{p}a_7, \mathfrak{p}a_8 \end{array}; \bar{x}, \bar{y} \right), \quad \mathfrak{p} = \frac{a_1 a_2 a_7 a_8}{a_3 a_4 a_5 a_6}, \quad (15)$$

$$\bar{y} = \frac{a_5 a_6 (x + a_3)(x + a_4)}{y (x + a_1)(x + a_2)}, \quad \bar{x} = \frac{a_1 a_2 (\bar{y} + \mathfrak{p}a_7)(\bar{y} + \mathfrak{p}a_8)}{x (\bar{y} + a_5)(\bar{y} + a_6)}. \quad (16)$$

この場合も, $\mathfrak{p} = 1$ で自励系, $\mathfrak{p} \neq 1$ で非自励系となり, 前者の場合は保存系であり軌道は次のようになる.



保存曲線は次で与えられる

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{(x+a_1)(x+a_2)}{x} y + \left\{ (a_5+a_6)x + \frac{a_1 a_2 (a_7+a_8)}{x} \right\} + \frac{(x+a_3)(x+a_4)}{x} \frac{a_5 a_6}{y} \\
 &= \frac{(y+a_5)(y+a_6)}{y} x + \left\{ (a_1+a_2)y + \frac{a_5 a_6 (a_3+a_4)}{y} \right\} + \frac{(y+a_7)(y+a_8)}{y} \frac{a_1 a_2}{x}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

パラメータ a_1, a_2, \dots, a_8 はアメーバの触手の位置を指定している. 自励的な場合 ($\mathbf{p} = \frac{a_1 a_2 a_7 a_8}{a_3 a_4 a_5 a_6} = 1$) に限って, (17) の 2 つの式が整合する.

曲線の式を先に与えて, それを保存するような変換を作る簡単な方法がある. $F(x, y), G(x, y)$ を, 次数が $(2, 2)$ 次 (変数 x, y それぞれについて 2 次式) の多項式とし $H(x, y) = \frac{F(x, y)}{G(x, y)}$ とおく. 2 つの変換 ι_1, ι_2 を

$$\begin{aligned}
 \iota_1 : (x, y) &\mapsto (x', y), & H(x, y) &= H(x', y), & (x' \neq x) \\
 \iota_2 : (x, y) &\mapsto (x, y'), & H(x, y) &= H(x, y'), & (y' \neq y)
 \end{aligned} \tag{18}$$

により定めれば, これらは \mathbb{C}^2 の対合的双有理変換であり, その合成 $T = \iota_1 \iota_2$ ($T^{-1} = \iota_2 \iota_1$) が求める離散力学系 (QRT 系 [28]) となる⁴. 構成法から, 得られる変換 T およびその保存量 $H(x, y)$ は, $F(x, y)$ と $G(x, y)$ の共通零点で不定である. ベズーの定理によりそのような点は 8 個あり, その配置が系を特徴付ける. \mathbb{C}^2 の一般の 8 点に対して, それらで消える $(2, 2)$ 次多項式は定数倍を除いて一意である. 一方, 8 点が特別な配置の場合には解が 2 次元 (曲線としては 1 次元族) となる⁵. 前者が離散 Painlevé 方程式に, 後者が QRT 系に対応する.

Painlevé 微分方程式が, $(\mathbb{P}^1)^2$ の 8 個 (\mathbb{P}^2 では 9 個) の特異点の配置により特徴付けられることは Okamoto, Takano 等の研究で示されていた. Sakai [29] はこれを一般化し離散系も含めた 2 階の Painlevé 方程式を幾何学的に分類した⁶. 次の分類表のうち, 右下部分 (灰色で示したもの) は連続変形を持つが, それ以外は離散的な変形しかない. 例 1 は $q-A_1^{(1)}$, 例 2 は $q-D_5^{(1)}$ に対応する.

$$\begin{array}{l}
 \text{ell.} \quad E_8^{(1)} \\
 \\
 q \quad E_8^{(1)} \rightarrow E_7^{(1)} \rightarrow E_6^{(1)} \rightarrow D_5^{(1)} \rightarrow A_4^{(1)} \rightarrow A_{2+1}^{(1)} \rightarrow A_{1+1}^{(1)} \rightarrow A_1^{(1)} \rightarrow A_1^{(1)'} \rightarrow A_0^{(1)} \\
 \\
 \text{add.} \quad E_8^{(1)} \rightarrow E_7^{(1)} \rightarrow E_6^{(1)} \rightarrow D_4^{(1)} \rightarrow A_3^{(1)} \rightarrow A_{1+1}^{(1)} \rightarrow A_1^{(1)} \rightarrow A_0^{(1)} \\
 \hspace{15em} \searrow \hspace{1em} \swarrow \\
 \hspace{15em} A_2^{(1)} \rightarrow A_1^{(1)} \rightarrow A_0^{(1)}
 \end{array} \tag{19}$$

⁴QRT 系のこのような構成法は [14][32] による.

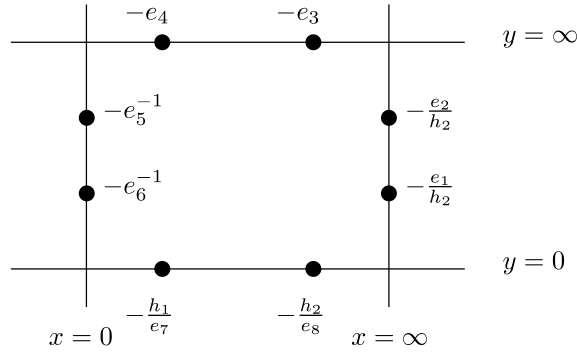
⁵同様の幾何学的な設定から Seiberg-Witten 曲線が得られることは [10] により知られていた. [8] も参照.

⁶Sakai の記号では, 点配置の交点形式を表すルート系によりラベルしている. ここでは対称性によりラベルしているので比較の際は注意されたい. 両者はピカル格子の中でほぼ直交補空間の関係にある.

2.3 アフィン Weyl 群対称性

例として, 曲線 (17) を点配置と対称性の観点から考察しよう. 次数 (2, 2) の平面曲線 $F(x, y) = 0$ で以下の 8 点を通るものを考える.

$$(x, y) = \left(\infty, -\frac{e_1}{h_2}\right), \left(\infty, -\frac{e_2}{h_2}\right), (-e_3, \infty), (-e_4, \infty), \left(0, -\frac{1}{e_5}\right), \left(0, -\frac{1}{e_6}\right), \left(-\frac{h_2}{e_7}, 0\right), \left(-\frac{h_2}{e_8}, 0\right). \quad (20)$$



(i) パラメータ $(h_1, h_2, e_1, \dots, e_8)$ が generic な場合, そのような曲線は定数倍を除いて一意の $xy = 0$ である. 同次座標で書けば

$$x_0 x_1 y_0 y_1 = 0, \quad \left(x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{y_1}{y_0}\right) \quad (21)$$

であり, 8 点を含む 4 本の直線を表す.

(ii) パラメータが特別な関係 $\mathfrak{p} := \frac{h_1^2 h_2^2}{e_1 e_2 \cdots e_8} = 1$ を満たす場合, 解は 2 次元 (曲線としては 1 パラメータ族)

$$F_1(x, y) - u F_0(x, y) = 0, \quad (22)$$

となる. ここで, $F_0 = xy$ であり, F_1 は次で与えられる.

$$F_1(x, y) = \prod_{i=7}^8 \left(1 + \frac{x}{e_i}\right) + \left\{e_5 + e_6 + \frac{(e_1 + e_2)h_2}{e_1 e_2 e_7 e_8} x^2\right\} y + e_5 e_6 \prod_{i=3}^4 \left(1 + \frac{e_i}{h_1} x\right) y^2. \quad (23)$$

(17) と同様, x で整理しても同様に因子化される. そのための条件が $\mathfrak{p} = 1$ である⁷.

(ii) の場合の 1 パラメータ曲線族を

$$H(x, y) := \frac{F_1(x, y)}{F_0(x, y)} = u, \quad (24)$$

と表す. この $H(x, y)$ は拡大アフィン Weyl 群

$$\tilde{W}(D_5^{(1)}) = \left\langle \begin{array}{cccc} & s_0 & s_4 & \\ & | & | & \\ s_1 & - & s_2 & - & s_3 & - & s_5 \end{array}, \pi \right\rangle, \quad (25)$$

⁷(20) の各点を m_1, \dots, m_8 重に通る (n_1, n_2) 次式が存在する条件は, 根と係数の関係より $h_1^{n_1} h_2^{n_2} = e_1^{m_1} \cdots e_8^{m_8}$ である.

に対する不変性を持つ. 実際, $s_i, \pi \in \tilde{W}(D_5^{(1)})$ の $\mathbb{C}(h_1, h_2, e_1, \dots, e_8, x, y)$ への作用を

$$\begin{aligned} s_0 &= \{e_7 \leftrightarrow e_8\}, \quad s_1 = \{e_3 \leftrightarrow e_4\}, \quad s_4 = \{e_1 \leftrightarrow e_2\}, \quad s_5 = \{e_5 \leftrightarrow e_6\}, \\ s_2 &= \left\{e_3 \rightarrow \frac{h_1}{e_7}, e_7 \rightarrow \frac{h_1}{e_3}, h_2 \rightarrow \frac{h_1 h_2}{e_3 e_7}, y \rightarrow \frac{1 + \frac{e_7}{h_1} x}{1 + \frac{x}{e_3}} y\right\}, \\ s_3 &= \left\{e_1 \rightarrow \frac{h_2}{e_5}, e_5 \rightarrow \frac{h_2}{e_1}, h_1 \rightarrow \frac{h_1 h_2}{e_1 e_5}, x \rightarrow x \frac{1 + \frac{h_2}{e_1} y}{1 + e_5 y}\right\}, \\ \pi &= \{e_i \rightarrow e_{\sigma(i)}, \sigma=(1,5)(2,6)(3,7)(4,8), x \rightarrow h_1 x^{-1}, y \rightarrow h_2^{-1} y^{-1}\}. \end{aligned} \tag{26}$$

次で与えると, $\mathfrak{p} = 1$ のとき, $H(x, y)$ は $\tilde{W}(D_5^{(1)})$ 不変となる. 特に, 平行移動 $T = \pi s_3 s_4 s_5 s_3 s_2 s_1 s_0 s_2 \in \tilde{W}(D_5^{(1)})$ の作用に対しても不変である. T の (x, y) への作用は

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{h_1 h_2^2}{e_1 e_2 e_5 e_6} \frac{(y - \frac{e_5}{h_2})(y - \frac{e_6}{h_2})}{(y - \frac{1}{e_1})(y - \frac{1}{e_2})} x^{-1}, \\ T^{-1}(y) &= \frac{e_3 e_4 e_7 e_8}{h_1^2 h_2} y^{-1} \frac{(x - \frac{h_1}{e_7})(x - \frac{h_1}{e_8})}{(x - e_3)(x - e_4)}, \end{aligned} \tag{27}$$

で与えられる. これは q - P_{V1} 方程式 (ただし q シフトのベースは \mathfrak{p}) であり, H はその保存量である ($\mathfrak{p} = 1$ の場合にのみ保存する). パラメータ (h_i, e_i) への T の作用は次で与えられる:

$$\begin{aligned} T(h_1, h_2) &= \left(\frac{h_1^5 h_2^2}{e_1 e_2 e_3^2 e_4^2 e_5 e_6 e_7^2 e_8^2}, \frac{h_1^2 h_2}{e_3 e_4 e_7 e_8}\right), \\ T(e_1, \dots, e_8) &= \left(\frac{h_1^2 h_2}{e_2 e_3 e_4 e_7 e_8}, \frac{h_1^2 h_2}{e_1 e_3 e_4 e_7 e_8}, \frac{h_1}{e_4}, \frac{h_1}{e_3}, \frac{h_1^2 h_2}{e_3 e_4 e_6 e_7 e_8}, \frac{h_1^2 h_2}{e_3 e_4 e_5 e_7 e_8}, \frac{h_1}{e_8}, \frac{h_1}{e_7}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

このパラメータは Picard 群の自然な基底に対応する. ルート系の構造は次の変数に移ると見やすい.

$$\begin{aligned} (a_0, \dots, a_4) &= \left(\frac{e_7}{e_8}, \frac{e_3}{e_4}, \frac{h_1}{e_3 e_7}, \frac{h_2}{e_1 e_5}, \frac{e_1}{e_2}, \frac{e_5}{e_6}\right), \quad (d_0, \dots, d_3) = \left(\frac{h_1}{e_1 e_2}, \frac{h_2}{e_3 e_4}, \frac{h_1}{e_5 e_6}, \frac{h_2}{e_7 e_8}\right), \\ (u, v) &= \left(\frac{x}{e_3}, e_5 y\right). \end{aligned} \tag{29}$$

このとき, Weyl 群作用は次のようになる.

$$\begin{aligned} s_0 &= \{a_0 \rightarrow \frac{1}{a_0}, a_2 \rightarrow a_0 a_2\}, \quad s_1 = \{u \rightarrow a_1 u, a_1 \rightarrow \frac{1}{a_1}, a_2 \rightarrow a_1 a_2\}, \\ s_2 &= \{u \rightarrow \frac{u}{a_2}, v \rightarrow \frac{1 + u/a_2}{1 + u} v, a_0 \rightarrow a_0 a_2, a_1 \rightarrow a_1 a_2, a_2 \rightarrow \frac{1}{a_2}, a_3 \rightarrow a_2 a_3\}, \\ s_3 &= \{u \rightarrow u \frac{1 + a_3 v}{1 + v}, v \rightarrow a_3 v, a_2 \rightarrow a_2 a_3, a_3 \rightarrow \frac{1}{a_3}, a_4 \rightarrow a_3 a_4, a_5 \rightarrow a_3 a_5\}, \\ s_4 &= \{a_3 \rightarrow a_3 a_4, a_4 \rightarrow \frac{1}{a_4}\}, \quad s_5 = \{v \rightarrow \frac{v}{a_5}, a_3 \rightarrow a_3 a_5, a_5 \rightarrow \frac{1}{a_5}\}, \\ \pi &= \{u \rightarrow \frac{a_2}{u}, v \rightarrow \frac{1}{a_3 v}, a_0 \leftrightarrow a_1, a_4 \leftrightarrow a_5, d_0 \leftrightarrow d_2, d_1 \leftrightarrow d_3\}. \end{aligned} \tag{30}$$

特に, 平行移動 T は次で与えられる

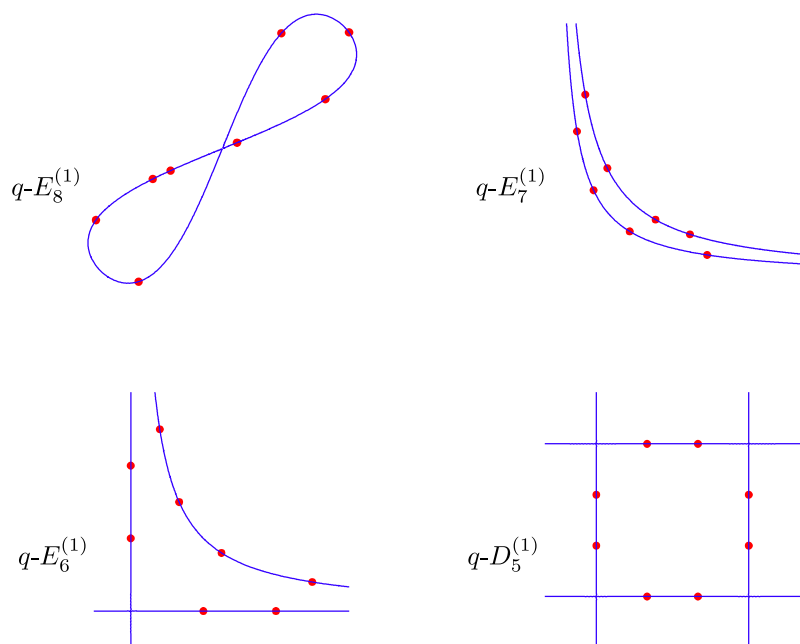
$$\begin{aligned} T(u) &= \frac{1}{a_1 u} \frac{(1 + v)(1 + v/a_5)}{(1 + a_3 v)(1 + a_3 a_4 v)}, \quad T^{-1}(v) = \frac{a_5}{v} \frac{(1 + u)(1 + a_1 u)}{(1 + u/a_2)(1 + u/(a_0 a_2))}, \\ T(a_0, \dots, a_5) &= (a_0, a_1, \mathfrak{p}^{-1} a_2, \mathfrak{p} a_3, a_4, a_5), \quad T(d_0, \dots, d_3) = (d_2, d_3, d_0, d_1). \end{aligned} \tag{31}$$

ただし, $\mathfrak{p} = a_0 a_1 a_2^2 a_3^2 a_4 a_5 = d_0 d_1 d_2 d_3$ である. さらに適当な変数変換で, 前節の例 2. のように表すこともできる. 以上は $D_5^{(1)}$ 型アフィン Weyl 群の場合で述べたが, 同様のことは Sakai 分類のすべての場合にわかっている (例えば [17]).

3 量子化

ここからは x, y を交換関係 $yx = qxy$ に従う非可換な変数とする. パラメータ $\{h_i, e_i\}$ は互いに可換で x, y とも可換とする.

q 差分の $D_5^{(1)}, E_6^{(1)}, E_7^{(1)}, E_8^{(1)}$ 型の場合に, 前節までの話を量子化しよう. これらの系を実現する $(\mathbb{P}^1)^2$ 上の標準的な点配置は以下のものである.



それぞれに対応する曲線 $\varphi(x, y) = 0$ は,

- $q-E_8^{(1)}$, $(2, 2)$, 1 個の特異点 (node) を持つ $(2, 2)$ 次曲線
- $q-E_7^{(1)}$, $(1, 1) + (1, 1)$, 2 つの $(1, 1)$ 次曲線
- $q-E_6^{(1)}$, $(1, 1) + (1, 0) + (0, 1)$, 1 つの $(1, 1)$ 次曲線と 2 つの直線
- $q-D_5^{(1)}$, $(1, 0) + (1, 0) + (0, 1) + (0, 1)$, 4 つの直線

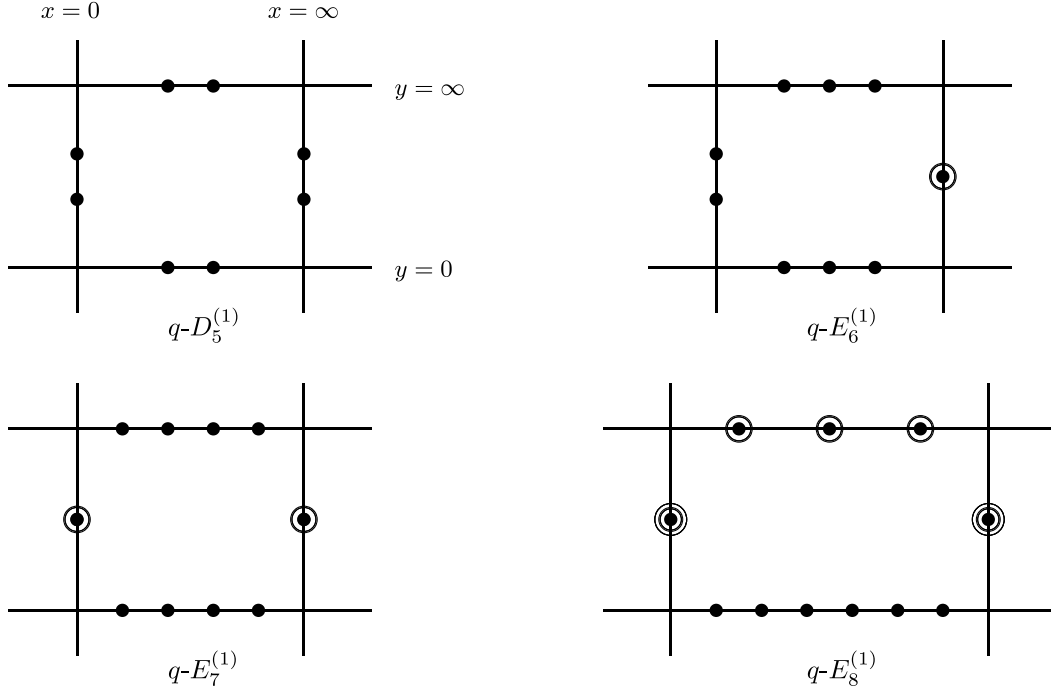
である.

$q-D_5^{(1)}$ 型の場合, 対応する Weyl 群の表現の量子化は [11] において既に与えられている. すなわち, x, y の積の順序を正しく読めば, 可換な場合と同じ変換式 (26) で表現になっている. このことは以下のように, $q-D_5^{(1)}$ の点配置が直線からできていること関係する. 曲線 $\varphi(x, y) = 0$ は xy 平面をコンパクト化した $(\mathbb{P}^1)^2$ 上の標準 2 形式の極因子であり, 変数 x, y の Poisson 構造

$$\{x, y\} = \varphi(x, y), \tag{32}$$

与える (Weyl 群作用はこの下で正準変換). $q-D_5^{(1)}$ の上記の実現では $\varphi(x, y) = xy$ であり $\log x, \log y$ が正準変数となる. 従って $yx = qxy$ が自然な量子化となり得る. 一方, $E_n^{(1)}$ 型の上記の実現に対する自然な量子化は単純な q 交換関係ではない.

上の問題の解決策の 1 つは, 点配置を直線的なものに取り替えることである. これは, 特異点を許すことにより可能となる. 以下の図で 2 重丸は 2 重特異点, 3 重丸は 3 重特異点を表す.



定理 1. [23] x, y を非可換変数 ($yx = qxy$), $h_1, h_2, e_1, \dots, e_{11}$ を中心元とする. これらに作用する以下の変換

$$\begin{aligned}
s_0 &= \{e_{10} \rightarrow \frac{h_2}{e_{11}}, e_{11} \rightarrow \frac{h_2}{e_{10}}, h_1 \rightarrow \frac{h_1 h_2}{e_{10} e_{11}}, x \rightarrow x \frac{1 + y \frac{h_2}{e_{10}}}{1 + y e_{11}}\}, \\
s_1 &= \{e_8 \leftrightarrow e_9\}, \quad s_2 = \{e_7 \leftrightarrow e_8\}, \\
s_3 &= \{e_1 \rightarrow \frac{h_1}{e_7}, e_7 \rightarrow \frac{h_1}{e_1}, h_2 \rightarrow \frac{h_1 h_2}{e_1 e_7}, y \rightarrow \frac{1 + x \frac{e_7}{h_1} y}{1 + \frac{x}{e_1} y}\}, \\
s_4 &= \{e_1 \leftrightarrow e_2\}, \quad s_5 = \{e_2 \leftrightarrow e_3\}, \quad s_6 = \{e_3 \leftrightarrow e_4\}, \quad s_7 = \{e_4 \leftrightarrow e_5\}, \quad s_8 = \{e_5 \leftrightarrow e_6\},
\end{aligned} \tag{33}$$

は, 次の Dynkin 図形

$$\begin{array}{c}
s_0 \\
| \\
s_1 - s_2 - s_3 - s_4 - s_5 - s_6 - s_7 - s_8,
\end{array} \tag{34}$$

が定めるアフィン Weyl 群 $W(E_8^{(1)})$ を生成する.

証明は直接計算で $s_i^2 = 1$, および $(s_i s_j)^2 = 1$ または $(s_i s_j)^3 = 1$ を確認することで示される (これらは交換関係 $yx = qxy$ を使わないで成り立つ). 同様の表現は, 可換な場合には以前から知られていた (例えば [33] 及び [23] の Appendix).

定理 2. [23] $h_1, h_2, e_1, \dots, e_{11}, x, y$ に加えて変数 $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \dots, \tau_{11}$, を追加する. 交換関係は

$$yx = qxy, \quad \tau_i e_i = q^{-1} e_i \tau_i, \quad \sigma_1 h_2 = q h_2 \sigma_1, \quad \sigma_2 h_1 = q h_1 \sigma_2, \tag{35}$$

とし, これ以外の対は可換とする. このとき, 次の作用 (e_i, h_i, x, y への作用は定理 1 と同じなので省略) は

$W(E_8^{(1)})$ の表現を与える.

$$\begin{aligned}
s_0 &= \left\{ \tau_{10} \rightarrow (1 + ye_{11}) \frac{\sigma_2}{\tau_{11}}, \tau_{11} \rightarrow \frac{\sigma_2}{\tau_{10}} \left(1 + y \frac{h_2}{e_{10}}\right), \sigma_1 \rightarrow (1 + ye_{11}) \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\tau_{10} \tau_{11}} \right\}, \\
s_1 &= \{\tau_8 \leftrightarrow \tau_9\}, \quad s_2 = \{\tau_7 \leftrightarrow \tau_8\}, \\
s_3 &= \left\{ \tau_1 \rightarrow (1 + x \frac{e_7}{h_1}) \frac{\sigma_1}{\tau_7}, \tau_7 \rightarrow \frac{\sigma_1}{\tau_1} \left(1 + \frac{x}{e_1}\right), \sigma_2 \rightarrow \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\tau_1 \tau_7} \left(1 + \frac{x}{e_1}\right) \right\}, \\
s_4 &= \{\tau_1 \leftrightarrow \tau_2\}, \quad s_5 = \{\tau_2 \leftrightarrow \tau_3\}, \quad s_6 = \{\tau_3 \leftrightarrow \tau_4\}, \quad s_7 = \{\tau_4 \leftrightarrow \tau_5\}, \quad s_8 = \{\tau_5 \leftrightarrow \tau_6\}.
\end{aligned} \tag{36}$$

この証明には q 交換関係 (35) が本質的である. τ 変数 (σ_i, τ_i) とパラメータ (h_i, e_i) を非可換にするアイデアは [20] による. τ 変数 (σ_i, τ_i) の重要性は次の正則性にある.

定理 3. [23] τ_k ($k = 1, \dots, 11$) の $w \in W(E_8^{(1)})$ による変換 $w(\tau_k)$ は,

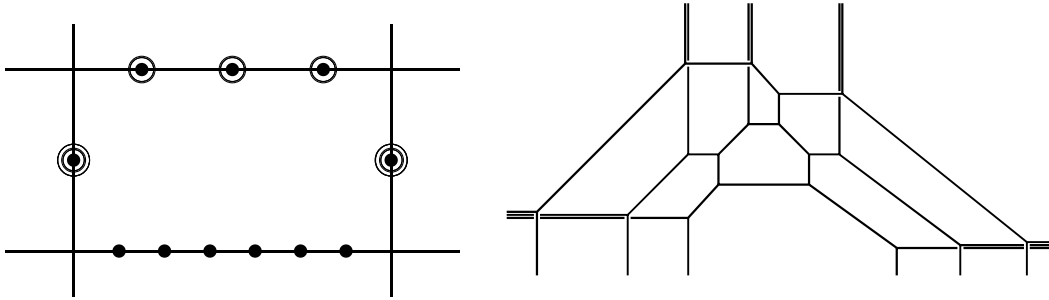
$$w(\tau_k) = F(x, y) \prod_{i,j} \sigma_i^{\mu_i} \tau_j^{\nu_j}, \tag{37}$$

の形に表される. ここで $F(x, y)$ は x, y の非可換多項式である. 証明には非可換多項式 $F(x, y)$ の q 差分作用素としての非対数性 [31][24] を用いる.

注意. $x \frac{\tau_{10}}{\tau_{11}}, y \frac{\tau_7 \tau_8 \tau_9}{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_6}$ は $W(E_8^{(1)})$ 不変なので, x, y の変換は τ_i の変換からわかる. すなわち上記の多項式は x, y の有理変換の因子を与えている.

3.1 量子曲線

可換な場合 ($q = 1$) の $E_8^{(1)}$ の保存曲線は, (x, y) について次数 $(6, 3)$ で次の点配置により特徴づけられる.



非可換な場合 ($q \neq 1$) の $E_8^{(1)}$ 型量子曲線も次数 $(6, 3)$ であり, それを

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^3 C_i(x) y^i = \sum_{i=0}^6 x^i D_i(y), \tag{38}$$

と表したときの係数は次の性質から決まる⁸.

⁸このような因子化の構造から q - $E_8^{(1)}$ の量子曲線が得られることは [22] により見出された ([9][18] も参照).

$$\begin{aligned}
C_0(x) &\propto \prod_{k=1}^6 \left(1 + \frac{1}{\mathfrak{q}e_k}x\right), \\
C_2(x) &\propto \prod_{k=7}^9 \left(1 + \frac{e_k}{h_1}x\right), \quad C_3(x) \propto \prod_{k=7}^9 \prod_{i=0}^1 \left(1 + \mathfrak{q}^i \frac{e_k}{h_1}x\right), \\
D_0(x) &\propto \prod_{i=0}^2 \left(1 + \mathfrak{q}^i e_{11}y\right), \quad D_1(x) \propto \prod_{i=1}^2 \left(1 + \mathfrak{q}^i e_{11}y\right), \quad D_2(x) \propto (1 + \mathfrak{q}^2 e_{11}y), \\
D_4(x) &\propto \left(1 + \mathfrak{q}^3 \frac{h_2}{e_{10}}y\right), \quad D_5(x) \propto \prod_{i=3}^4 \left(1 + \mathfrak{q}^i \frac{h_2}{e_{10}}y\right), \quad D_6(x) \propto \prod_{i=3}^5 \left(1 + \mathfrak{q}^i \frac{h_2}{e_{10}}y\right).
\end{aligned} \tag{39}$$

このような非可換多項式 $P(x, y)$ はパラメータ (h_i, e_i) が一般の場合には x^3y の定数倍に限られるが、パラメータが自励的、つまり $\mathfrak{p} := \frac{h_1^6 h_2^3}{(e_1 \cdots e_6)(e_7 e_8 e_9)^2 (e_{10} e_{11})^3} = 1$ の場合には、1パラメータの解

$$P(x, y) = F_1(x, y) - uF_0(x, y), \quad F_0(x, y) = x^3y, \tag{40}$$

を持つ。 $H(x, y) := F_1(x, y)F_0(x, y)^{-1} = u$ が求める量子曲線であり、これは $W(E_8^{(1)})$ 不変である。量子曲線 $H = \left(\sum_{i=0}^3 C_i(x)y^i\right)(x^3y)^{-1} = u$ の簡潔な表示として次の表示がある [23].

$$\begin{aligned}
C_3(x) &= \mathfrak{q}^3 e_{11}^3 \prod_{i=7}^9 \left(1 + \frac{e_i}{h_1}x\right) \left(1 + \mathfrak{q} \frac{e_i}{h_1}x\right), \\
C_2(x) &= \mathfrak{q} e_{11}^2 \prod_{i=7}^9 \left(1 + \frac{e_i}{h_1}x\right) \left\{ [3]_{\mathfrak{q}} + \mathfrak{q}x A_{-1} + \mathfrak{q}\kappa A_1 x^2 + [3]_{\mathfrak{q}} \kappa x^3 \right\}, \\
C_1(x) &= e_{11} \left\{ [3]_{\mathfrak{q}} + [2]_{\mathfrak{q}} A_{-1} x + (\kappa A_1 + A_{-2}) x^2 + \right. \\
&\quad \left. \kappa \mathfrak{q} (\kappa A_2 + A_{-1}) x^4 + \mathfrak{q}^{-2} [2]_{\mathfrak{q}} \kappa^2 A_1 x^5 + \mathfrak{q}^{-3} [3]_{\mathfrak{q}} \kappa^2 x^6 \right\}, \\
C_0(x) &= \prod_{i=1}^6 \left(1 + \frac{1}{\mathfrak{q}e_i}x\right),
\end{aligned} \tag{41}$$

ここに

$$\begin{aligned}
[k]_{\mathfrak{q}} &= \frac{1 - \mathfrak{q}^k}{1 - \mathfrak{q}}, \quad A_{\pm 1} = \sum_{i=1}^9 a_i^{\pm 1}, \quad A_{\pm 2} = \sum_{1 \leq i < j \leq 9} (a_i a_j)^{\pm 1}, \\
a_i &= e_i \quad (1 \leq i \leq 6), \quad a_i = \frac{h_1}{e_i} \quad (7 \leq i \leq 9), \quad \kappa = \frac{e_7 e_8 e_9 e_{10} e_{11}}{h_1^2 h_2}.
\end{aligned} \tag{42}$$

3.2 応用

量子曲線の周期積分を用いたミラー対称性の量子版が知られている [1][2]. 最も簡単な場合にその概要を述べる。扱う量子曲線は §2 と同じ

$$H = x + y + x^{-1}y^{-1}. \quad (yx = \mathfrak{q}xy) \tag{43}$$

である。ただし今回は非可換変数であることに注意する。この H からポテンシャル F の \mathfrak{q} 変形を、次のような \hbar -展開の形

$$F(t, \hbar) = \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g} F_g(t), \quad \mathfrak{q} = e^{\hbar} \tag{44}$$

に求めることができる. 計算法は後回しにして結果を書けば

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{18}(\log t)^3 + 3t + \frac{45}{8}t^2 + \frac{244}{9}t^3 + \frac{12333}{64}t^4 + \frac{211878}{125}t^5 + O(t^6), \\
F_1 &= \frac{1}{24} \log t + \frac{7}{8}t + \frac{129}{16}t^2 + \frac{589}{6}t^3 + \frac{43009}{32}t^4 + \frac{392691}{20}t^5 + O(t^6), \\
F_2 &= \frac{29}{640}t + \frac{207}{64}t^2 + \frac{18447}{160}t^3 + \frac{526859}{160}t^4 + \frac{5385429}{64}t^5 + O(t^6), \\
F_3 &= \frac{137}{322560}t + \frac{7573}{13440}t^2 + \frac{608717}{8960}t^3 + \frac{21873839}{5040}t^4 + \frac{2178008575}{10752}t^5 + O(t^6),
\end{aligned} \tag{45}$$

などとなる. 得られた $F(t, \hbar)$ を展開式

$$F(t, \hbar) = \hbar \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_{g,n}}{k^2} \frac{(\mathfrak{q}^{\frac{k}{4}} - \mathfrak{q}^{-\frac{k}{4}})^{2g}}{2 \sinh \frac{k\hbar}{2}} (-t)^{kn}, \tag{46}$$

と比較することで, 係数 $N_{g,n}$ として次が得られる.

$(-1)^n N_{g,n}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$g = 0$	3	6	27	192	1695	17064
$g = 1$	4	35	396	5392	78820	1198620
$g = 2$	1	56	1875	53028	1352889	32278902
$g = 3$	0	36	4344	277430	12963680	501300345
$g = 4$	0	10	5775	913858	82088220	5305295622
$g = 5$	0	1	4744	2062165	374011816	41624690015

これらは, (Nekrasov-Shatashvili 極限における) 種数 g 次数 n の曲線の数え上げとして知られている [12][13]. 興味深いことに, $F_g(t)$ は, 次のような有限項の表示を持つ (有限生成性) [7][4].

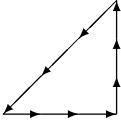
$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{24} \log z X, \\
F_2 &= -\frac{1}{384} X S + \frac{1}{360} X^2 - \frac{1}{240} X + \frac{1}{720}, \\
F_3 &= -\frac{S^3 X}{9216} + \frac{S^2 X^2}{4608} - \frac{S^2 X}{4608} - \frac{101 S X^3}{138240} + \frac{173 S X^2}{138240} - \frac{S X}{1920} \\
&\quad + \frac{635 X^4}{435456} - \frac{1189 X^3}{322560} + \frac{26531 X^2}{8709120} - \frac{103 X}{120960} + \frac{1}{30240},
\end{aligned} \tag{48}$$

ここに $X = (1 - 27z)^{-1}$, $S = \vartheta_z \{ \log(\vartheta_z t(z)) - \frac{1}{3} \log X \}$, $\vartheta_z = z \partial_z$.

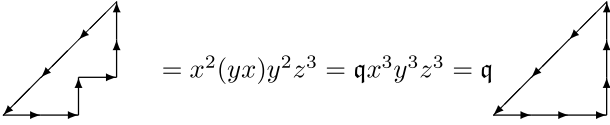
\mathfrak{q} 変形されたプレポテンシャル $F(t, \hbar)$ の計算法をまとめておこう. 出発点になるのは, 可換な場合と同様に A -cycle 積分の計算である. これは非可換の場合も留数計算で求めることができる. この計算は, 非可換多項式の冪 H^{3n} の定数項 $x^0 y^0$ の係数 a_n の計算と等価であり

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3\mathfrak{q}^{-1} + 3 \rightarrow 6, \quad (\mathfrak{q} \rightarrow 1) \\
a_2 &= 6\mathfrak{q}^{-3} + 21\mathfrak{q}^{-2} + 36\mathfrak{q}^{-1} + 21 + 6\mathfrak{q} \rightarrow 90, \\
a_3 &= 9\mathfrak{q}^{-6} + 27\mathfrak{q}^{-5} + 108\mathfrak{q}^{-4} + 264\mathfrak{q}^{-3} + 432\mathfrak{q}^{-2} + \dots + 9\mathfrak{q}^3 \rightarrow 1680,
\end{aligned} \tag{49}$$

のようになる. a_n は, x (右方向), y (上方向), $z = x^{-1}y^{-1}$ (左下方向) の各 n ステップからなる閉曲線を, それが囲む符合付き面積 S に関する重み $\mathfrak{q}^{-S - \frac{n}{2}}$ で数えたものである.



$$= x^3 y^3 z^3 = x^3 y^3 (x^{-1} y^{-1})^3 = q^{-3-2-1} = q^{-6} = q^{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}},$$
(50)



$$= x^2 (yx) y^2 z^3 = q x^3 y^3 z^3 = q$$

$q = 1$ の場合は, $a_n = \frac{(3n)!}{n!^3}$ である (§2 の A -cycle 積分の u^{-n} の係数の n 倍).

B -cycle 積分の計算は容易ではないが, 可換な場合の結果から求める次のような方法が知られている [21][12][13]. 鍵となるのは, $\hbar = 0$ の場合の積分に作用して $\hbar \neq 0$ の積分を与えるような, u に関する微分作用素である. そのような作用素は, A -cycle 積分の結果から求められるが, 得られた微分作用素はどの 1 -cycle にも適用できるので, $\hbar = 0$ の場合の B -cycle 積分から $\hbar \neq 0$ の B -cycle 積分が求められる. 本節の最初に示した F_g のデータも, そのようにして計算したものである.

上記の処方箋によって, すべては a_n の計算に帰着し, その計算が基本的である. これについて, 1 つの実験的観察を述べて本稿を終えることにする. この観察は, 先の有限生成性に関連すると思われる.

観察. 実験によると次のような \hbar 展開がある ($q = e^{\hbar}$)

$$a_n = q^{-\frac{n}{2}} \frac{(3n)!}{n!^3} \left(1 + \frac{n^2}{8} \hbar^2 + \sum_{g=2}^{\infty} n^3 P_g(n) \hbar^{2g} \right),$$
(51)

ここで $P_g(n)$ は, n の $2g - 3$ 次 \mathbb{Q} 係数多項式である.

$$P_2(n) = \frac{21n - 16}{1920}, \quad P_3(n) = \frac{279n^3 - 656n^2 + 512n - 128}{322560}, \quad \dots$$
(52)

同様のことは, $(\mathbb{P}^1)^2$ の場合にも見られる. $H = x + \frac{1}{x} + y + \frac{m}{y}$ の冪の定数項 $a_n = [H^{2n}]_0$ は, $a_1 = 2(1+m)$, $a_2 = 4mq^{-1} + 2(3 + 8m + 3m^2) + 4mq$ などとなり, やはり経路の数え上げとしても求められる. これについて, 次の展開が予想される ($q = e^{\hbar}, m = e^{s\hbar}$)

$$a_n = e^{\frac{ns\hbar}{2}} \frac{(2n)!^2}{n!^4} \left\{ 1 + \frac{n^2(c_{1,0} + c_{1,1}n)}{(n - \frac{1}{2})} \hbar^2 + \sum_{g=2}^{\infty} \frac{n^3 \sum_{i=0}^{4(g-1)} c_{g,i} n^i}{(n - \frac{1}{2})^{g-1} \prod_{i=0}^{g-1} (n - \frac{1}{2} - i)} \hbar^{2g} \right\},$$
(53)

ここで $c_{g,i}$ は s の \mathbb{Q} 係数多項式で, $\deg_s(c_{g,i}) \leq 2g$ である.

$E_8^{(1)}$ まで含めた一般の場合にも, H の冪の定数項 a_n は, 定義により有限 Weyl 群不変式であり, 組み合わせ論・表現論・数え上げ幾何学・数理論理学など種々の観点から興味深い対象と思われる.

謝辞

本稿は RIMS 共同研究「組合せ論的表現論および関連分野との連携」(Oct. 2021) における講演スライドに加筆したものです. 講演の機会を与えて下さった代表者の茂木康平さんをはじめご議論いただいた皆様に感謝いたします. また, 本稿の元となった研究 [23] の共同研究者である森山翔文さんに感謝いたします.

参考文献

- [1] Aganagic M., Cheng M. C. N., Dijkgraaf R., Krefl D. and Vafa C., Quantum geometry of refined topological strings, *JHEP* **11** (2012), 019 (front matter + 52 pp), arXiv:hep-th/1105.0630.
- [2] Aganagic M., Dijkgraaf R., Klemm A., Marino M. and Vafa C., Topological strings and integrable hierarchies, *Commun. Math. Phys.* **261** (2006), 451-516, arXiv:hep-th/0312085.
- [3] Bao L., Mitev V., Pomoni E., Taki M. and Yagi F., Non-lagrangian theories from brane junctions, arXiv:hep-th/1310.3841.
- [4] Bousseau P., Fan H., Guo S. and Wu L., Holomorphic anomaly equation for (\mathbb{P}^2, E) and the Nekrasov-Shatashvili limit of local \mathbb{P}^2 , arXiv:math-AG/2001.05347.
- [5] Chen J., Haghighat B., Kim H. C., Sperling M. and Wang X., E -string quantum curve, arXiv:hep-th/2103.16996.
- [6] Chiang T. M., Klemm A., Yau S. T. and Zaslow E., Local mirror symmetry: calculations and interpretations, *Adv.Theor.Math.Phys.* **3** (1999), 495-565, arXiv:hep-th/9903053.
- [7] Coates T. and Iritani H., Gromov-Witten invariants of local \mathbb{P}^2 and modular forms, arXiv:math-AG/1804.03292.
- [8] Eguchi T. and Sakai K., Seiberg-Witten curve for E string theory revisited, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** (2003), 419-455, arXiv:hep-th/0211213.
- [9] Furukawa T., Moriyama S. and Sugimoto Y., Quantum mirror map for del Pezzo geometries, *J. Phys.* **A53** (2020), 385401, (18 pp), arXiv:hep-th/1908.11396.
- [10] Ganor O. J., Morrison D. R. and Seiberg N., Branes, Calabi-Yau spaces, and troidal compactification of the $N = 1$ six-dimensional E_8 theory, arXiv:hep-th/9610251.
- [11] Hasegawa K., Quantizing the Bäcklund transformations of Painlevé equations and the quantum discrete Painlevé VI equation, *Adv. Stud. Pure Math. "Exploring New Structures and Natural Constructions in Mathematical Physics"*, K. Hasegawa, et. al, eds. (2011), 275-288.
- [12] Huang M. x., On gauge theory and topological string in Nekrasov-Shatashvili limit, *JHEP* **06** (2012), 152, (front matter+39 pp), arXiv:hep-th/1205.3652.
- [13] Huang M. x., Klemm A., Reuter J. and Schiereck M., Quantum geometry of del Pezzo surfaces in the Nekrasov-Shatashvili limit, *JHEP* **02** (2015), 031, (front matter+51 pp), arXiv:hep-th/1401.4723.
- [14] Iatrou A. and Roberts A. G., Integrable mappings of the plane preserving biquadratic invariant curves *J. Phys.* **A34** (2001), 6617-6636.
- [15] Inoue, R., Kuniba A. and Takagi T., Integrable structure of box-ball systems: crystal, Bethe ansatz, ultradiscretization and tropical geometry, *J. Phys.* **A45** (2012), 073001.
- [16] Jimbo M. and Sakai H., q -analog of the sixth Painlevé equation, *Lett. Math. Phys.* **38** (1996), 145–154.

- [17] Kajiwara K., Noumi M. and Yamada Y., Geometric aspects of Painlevé equations, *J. Phys.* **A50** (2017), 073001 (164 pp).
- [18] Kubo N., Moriyama S. and Nosaka T., Symmetry breaking in quantum curves and super Chern-Simons matrix models, *JHEP* **01** (2019), 210, (front matter+28 pp), arXiv:hep-th/1811.06048.
- [19] Kuroki G., Quantum groups and quantization of Weyl group symmetries of Painlevé systems, *Adv. Stud. Pure Math.* **61**, “Exploring New Structures and Natural Constructions in Mathematical Physics”, K. Hasegawa, et. al, eds. (2011), 289-325.
- [20] Kuroki G., Regularity of quantum tau-functions generated by quantum birational Weyl group actions, arXiv:math-QA/1206.3419.
- [21] Mironov A. and Morozov A., Nekrasov functions from exact BS periods: the case of $SU(N)$, *J. Phys.* **A43** (2010), 195401, (11 pp), arXiv:hep-th/0911.2396.
- [22] Moriyama S., Spectral theories and topological strings on del Pezzo geometries, *JHEP* **10** (2020), 154, arXiv:hep-th/2007.05148.
- [23] Moriyama S. and Yamada Y., Quantum representation of affine Weyl groups and associated quantum curves, *SIGMA* **17** (2021), 076, 24pp, arXiv:math-QA/2104.06661.
- [24] Nagao H. and Yamada Y., Study of q -Garnier system by Padé method, *Funkcial. Ekvac.* **61** (2018), 109-133.
- [25] Nagoya H. and Yamada Y., Symmetries of quantum Lax equations for the Painlevé equations, *Ann. Henri Poincaré* **15** (2014), 313-344.
- [26] Noumi M. and Yamada Y., Affine Weyl groups, discrete dynamical systems and Painlevé equations, *Comm. Math. Phys.* **199** (1998), 281-295.
- [27] Noumi M., Ruijsenaars S. and Yamada Y., The elliptic Painlevé Lax equation vs. van Diejen’s 8-coupling elliptic Hamiltonian, *SIGMA* **16** (2020), 063. (16 pp).
- [28] Quispel G., Roberts J. and Thompson C., Integrable mappings and soliton equations, *Phys. Lett.* **A126** (1988), 419-421.
- [29] Sakai H., Rational surfaces with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, *Commun. Math. Phys.* **220** (2001), 165-221.
- [30] Takemura K., Degenerations of Ruijsenaars-van Diejen operator and q -Painlevé equations, *J. Integrable Syst.* **2** (2017), xyx008, (27 pp).
- [31] Takemura K., On q -deformations of the Heun equation, *SIGMA* **14** (2018), 061, (16 pp).
- [32] Tsuda T., Integrable mappings via rational elliptic surfaces, *J. Phys.* **A37**, (2004), 2721.
- [33] Tsuda T., Tropical Weyl group action via point configurations and τ -functions of the q -Painlevé equations, *Lett. Math. Phys.* **77**, (2006), 21-30.