長方形ヤング図形に対応する対称群指標の新しい表示[1]

鹿児島大学大学院理工学研究科　松本 詔[2]

Sho Matsumoto

Graduate School of Science and Engineering,

Kagoshima University

1　はじめに

対称群の正規化された指標 $\mathrm{Ch}_\mu(\lambda)$ を考える．ここで λ は既約表現, μ は共役類に対応しているヤング図形である．この $\mathrm{Ch}_\mu(\lambda)$ は Stanley 指標公式や Kerov 多項式といった表示がよく知られている．本稿では, μ が 1 行ヤング図形かつ λ が長方形のときの新しい表示を与える．すなわち

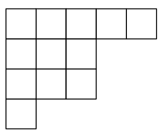
$$\mathrm{Ch}_k(p \times q)$$

について詳しく見ていく．$p \times q$ は, 縦の長さが p, 横の長さが q のヤング図形を表している．本稿の内容は, Piotr Śniady との共同研究 [10] に基づいている．

（整数の）分割とは, 有限個の正の整数の広義減少列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ のことである．

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l), \qquad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l \geq 1, \qquad \lambda_i \in \mathbb{Z}_{>0}$$

ここで l を分割 λ の長さといい, $\ell(\lambda)$ で表す．また $|\lambda| := \sum_{i=1}^{l} \lambda_i$ を λ のサイズという．$|\lambda| = n$ のとき, λ は n の分割であるという．分割はヤング図形と同一視する．例えば $n = 12$ の分割 $\lambda = (5, 3, 3, 1)$ のヤング図形は



となる．

n の分割 λ, μ に対して, n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の既約指標値を χ^λ_μ で表す．すなわち, 分割 λ に対応する対称群の複素既約表現の指標を χ^λ で表し, 分割 μ に対応する $\mathfrak{S}_n$ の共

1）　RIMS 共同研究「組合せ論的表現論および関連分野との連携」 2021.10.18–10.22

2）　`shom@sci.kagoshima-u.ac.jp`　本研究は JSPS 科研費 17K05281 の助成を受けたものです．

役類における χ^λ の値を χ^λ_μ で表す．よく知られているように，$f^\lambda := \chi^\lambda_{(1^n)}$ は既約表現の次元（次数）であり，型 λ の標準ヤング盤の個数に一致する．

定義 1.1 (対称群の正規化指標)**.** π を非負整数 k の分割とする．任意の分割 λ に対し，$\mathrm{Ch}_\pi(\lambda)$ を次で定義する: $n := |\lambda| \geq k$ のとき，

$$\mathrm{Ch}_\pi(\lambda) = n(n-1)\cdots(n-k+1)\frac{\chi^\lambda_{\pi\cup(1^{n-k})}}{\chi^\lambda_{(1^n)}}.$$

ただし，$\pi \cup (1^{n-k}) = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{\ell(\pi)}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-k})$ とした．また，$|\lambda| < k$ のとき $\mathrm{Ch}_\pi(\lambda) = 0$ と定める．$\pi = (k)$ のとき $\mathrm{Ch}_{(k)}$ は単に Ch_k とかく．

例えば

$$\mathrm{Ch}_0(\lambda) = 1, \qquad \mathrm{Ch}_1(\lambda) = |\lambda| = \sum_{i\geq 1}\lambda_i, \qquad \mathrm{Ch}_2(\lambda) = \sum_{i\geq 1}\lambda_i^2 - \sum_{j\geq 1}(\lambda'_j)^2$$

となることはよく知られている．ここで λ'_j は λ のヤング図形の第 j 列の長さである．このような既約指標の正規化 $\mathrm{Ch}_\pi(\lambda)$ は，対称群の漸近的表現論，ランダムヤング図形の研究などで好んで用いられる．例えば [6] を参照．

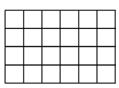
本稿の構成について　§2 で我々の主結果を述べる．これらは Stanley 指標公式と関連が深いので，§3 で Stanley 指標公式の基本事項について復習する．§4 で主結果の証明を述べたあと，§5 でまとめや関連する話題を述べる．

2　正規化指標の新しい表示

本稿では，正規化指標の $\mathrm{Ch}_\pi(\lambda)$ において，

π は 1 行ヤング図形 $\pi = (k)$　　かつ　　λ は長方形ヤング図形 $\lambda = p \times q$

の場合に注目する．ここで長方形ヤング図形とは

$$p \times q := (\underbrace{q, q, \ldots, q}_{p}) =$$ 

の形のものをいう．

記号を用意する. 非負整数 k に対して k 番目のカタラン数を

$$\mathrm{Cat}(k) = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{(k+1)!\,k!}$$

で定める. カタラン数が正の整数になることは非常によく知られている. $\mathrm{Cat}(0) = \mathrm{Cat}(1) = 1$, $\mathrm{Cat}(2) = 2$, $\mathrm{Cat}(3) = 5$, $\mathrm{Cat}(4) = 14, \ldots$.

実数 a と正の整数 k に対して,

$$a^{\uparrow\uparrow k} = \prod_{i=0}^{k-1}(a+2i) = a(a+2)(a+4)\cdots(a+2k-2)$$

とおく. 特に, $(2k-1)!! = 1^{\uparrow\uparrow k} = (2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1$ と書く.

2.1 サイクルの長さが奇数の場合

正規化指標 $\mathrm{Ch}_{2j-1}(p\times q)$ について考える. 次の定理は我々の主結果の一つであるが,

$$p = e-d, \qquad q = e+d$$

と変換することで, $\mathrm{Ch}_{2j-1}(p\times q)$ を d, e の多項式と見なすことで興味深い表示が得られる.

定理 2.1. j を正の整数とする. このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ch}_{2j-1}\Big((e-d)\times(e+d)\Big) \\
&= (-1)^{j-1}\,\mathrm{Cat}(j-1)\sum_{k=0}^{j} f_k(j)\left(\prod_{r=0}^{k-1}(d^2-r^2)\right)\left(\prod_{r=k}^{j-1}(e^2-r^2)\right) &(2.1)\\
&= (-1)^{j-1}\,\mathrm{Cat}(j-1)\sum_{k=0}^{j} f_k(j)\left(\prod_{r=0}^{k-1}\Big(d^2-(r+\tfrac{1}{2})^2\Big)\right)\left(\prod_{r=k}^{j-1}\Big(e^2-(r+\tfrac{1}{2})^2\Big)\right). &(2.2)
\end{aligned}$$

ここで, $f_0(j) = 1$, かつ

$$f_k(j) = (-1)^k\binom{j}{k}\frac{(2j-1)^{\uparrow\uparrow k}}{(2k-1)!!} \qquad (k = 1, 2, \ldots, j)$$

と定める.

定理 2.1 の証明は後の章で説明する. 上の式は, 本来は $(e-d)\times(e+d)$ がヤング図形のとき, すなわち $e-d$ と $e+d$ が共に正の整数であるときに意味を持つ. とこ

ろが, e, d を不定元とみなすことで (2.1) や (2.2) は e, d の多項式としてみなすのである.

上の定理を変形することで, $\mathrm{Ch}_{2j-1}(p\times q)$ は j, d, n を使って次の系のように表示できる. ただし

$$n = pq, \qquad d = \frac{q-p}{2} \tag{2.3}$$

とする.

系 2.2. j, p, q を正の整数とし, n, d を (2.3) で定める.

1. $d \in \mathbb{Z}$, すなわち $q - p \in 2\mathbb{Z}$ と仮定する. このとき次が成り立つ.

$$\mathrm{Ch}_{2j-1}(p\times q) = (-1)^{j-1}\,\mathrm{Cat}(j-1)\ G_d(j,n)\prod_{r=0}^{j-|d|-1}\Big(n - r(r+2|d|)\Big). \tag{2.4}$$

ここで, $G_d(j,n)$ は次で定まる.

$$G_d(j,n) = \sum_{k=0}^{|d|}(-1)^k\left(\prod_{r=0}^{k-1}(d^2-r^2)\right)\binom{j}{k}\frac{(2j-1)^{\uparrow\uparrow k}}{(2k-1)!!}\left(\prod_{r=k}^{|d|-1}(n+d^2-r^2)\right). \tag{2.5}$$

2. $d \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, すなわち $q - p \in 2\mathbb{Z}+1$ と仮定する. このとき次が成り立つ.

$$\mathrm{Ch}_{2j-1}(p\times q) = (-1)^{j-1}\,\mathrm{Cat}(j-1)\ H_d(j,n)\prod_{r=0}^{j-|d|-\frac{1}{2}}\Big(n - r(r+2|d|)\Big). \tag{2.6}$$

ここで, $H_d(j,n)$ は次で定まる.

(2.7)

$$H_d(j,n) = \sum_{k=0}^{|d|-\frac{1}{2}}(-1)^k\prod_{r=0}^{k-1}\Big(d^2-(r+\tfrac{1}{2})^2\Big)\binom{j}{k}\frac{(2j-1)^{\uparrow\uparrow k}}{(2k-1)!!}\prod_{r=k}^{|d|-\frac{3}{2}}\Big(n+d^2-(r+\tfrac{1}{2})^2\Big).$$

例 2.3. 1. (2.5) で定まる $G_d(j,n)$ の, $|d|$ が小さいとき.

$$\begin{aligned}
G_0(j,n) =&1,\\
G_{\pm1}(j,n) =&n+1-j(2j-1),\\
G_{\pm2}(j,n) =&(n+4)(n+3)-4j(2j-1)(n+3)+2j(j-1)(2j-1)(2j+1).
\end{aligned}$$

このように, $G_d(j,n)$ は j と n に関して多項式となり, さらに $\deg j = 1$, $\deg n = 2$ とみなすことで次数が $2|d|$ となる. また, 整数係数であることも証明できる ([10]).

2. (2.7) で定まる $H_d(j,n)$ の, $|d|$ が小さいとき.

$$
\begin{aligned}
H_{\pm\frac{1}{2}}(j,n) =&1,\\
H_{\pm\frac{3}{2}}(j,n) =&n+2-2j(2j-1),\\
H_{\pm\frac{5}{2}}(j,n) =&(n+6)(n+4)-6j(2j-1)(n+4)+4j(j-1)(2j-1)(2j+1).
\end{aligned}
$$

$G_d(j,n)$ と同様に, $H_d(j,n)$ は j と n に関して $(2|d|-1)$ 次の整数係数多項式となる.

(2.4) と (2.6) で $d=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}$ の場合を順に書き下すと,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ch}_{2j-1}(p\times p) =&(-1)^{j-1}\,\mathrm{Cat}(j-1)\prod_{r=0}^{j-1}\Big(n-r^2\Big),\\
\mathrm{Ch}_{2j-1}\left(p\times(p+1)\right) =&(-1)^{j-1}\,\mathrm{Cat}(j-1)\prod_{r=0}^{j-1}\Big(n-r(r+1)\Big),\\
\mathrm{Ch}_{2j-1}\left(p\times(p+2)\right) =&(-1)^{j-1}\,\mathrm{Cat}(j-1)\left(n+1-j(2j-1)\right)\prod_{r=0}^{j-2}\Big(n-r(r+2)\Big),\\
\mathrm{Ch}_{2j-1}\left(p\times(p+3)\right) =&(-1)^{j-1}\,\mathrm{Cat}(j-1)\left(n+2-2j(2j-1)\right)\prod_{r=0}^{j-2}\Big(n-r(r+3)\Big),
\end{aligned}
$$

となる. ただし, それぞれの式で $n=p(p+2d)$ であることに注意. $\mathrm{Ch}_{2j-1}\left(p\times(p+2d)\right)$ は, $|d|$ が大きくなるにつれて $G_d(j,n)$ または $H_d(j,n)$ が複雑な形になる. 言い換えると, 長方形ヤング図形 $p\times q$ が (縦横の長さの差 $|q-p|$ が小さいという意味で) 正方形に「近い」ときの方が, $\mathrm{Ch}_{2j-1}(p\times q)$ は簡単な因子の積に書けると言えよう.

注意 2.4. (2.4) における積 $\prod_{r=0}^{j-|d|-1}\left(n-r(r+2|d|)\right)$ は, $j-|d|-1\le 0$ のときも意味を持つ. すなわち次のように積の定義を拡張する. $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ が 0 の値をとらない数列のとき

$$
\prod_{r=0}^{l} a_r=\begin{cases} a_0a_1\cdots a_l & l\ge 0\text{ のとき}\\ 1 & l=-1\text{ のとき}\\ \frac{1}{a_{l+1}a_{l+2}\cdots a_{-1}} & l\le -2\text{ のとき.}\end{cases}
$$

このとき等式 $\prod_{r=0}^{l+1}a_r=\left(\prod_{r=0}^{l}a_r\right)\cdot a_{l+1}$ が全ての整数 l で成立する. 例えば, (2.6) で

$d=\frac{5}{2}$, $j=1$ のとき, $H_{\frac{5}{2}}(1,n)=n(n+4)$ だから,

$$\mathrm{Ch}_1\left(p\times(p+5)\right)=H_{\frac{5}{2}}(1,n)\prod_{r=0}^{-2}\left(n-r(r+5)\right)=n(n+4)\times\frac{1}{n+4}=n=p(p+5)$$

と計算される.

系 2.2 の証明　系 2.2 の (2.6) を, 定理 2.1 の (2.2) から導こう. 同様にして (2.1) から (2.4) を得ることができる.

p,q を正の整数とし, $d:=(q-p)/2\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ と仮定する. 簡単のため $d>0$ も仮定しよう. さらに $e:=(q+p)/2\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ とおく. このとき (2.2) より

$$\mathrm{Ch}_{2j-1}(p\times q)=(-1)^{j-1}\,\mathrm{Cat}(j-1)\sum_{k=0}^{j}f_k(j)\left(\prod_{r=0}^{k-1}\left(d^2-(r+\tfrac{1}{2})^2\right)\right)\left(\prod_{r=k}^{j-1}\left(e^2-(r+\tfrac{1}{2})^2\right)\right)$$

である. 因子 $\prod_{r=0}^{k-1}\left(d^2-(r+\frac{1}{2})^2\right)$ は $k>d-\frac{1}{2}$ のとき消えるので, $\sum_{k=0}^{j}$ を $\sum_{k=0}^{d-\frac{1}{2}}$ と置き換えても構わない. また, $0\leq k\leq d-\frac{1}{2}$ のとき, 因子 $\prod_{r=k}^{j-1}\left(e^2-(r+\frac{1}{2})^2\right)$ は次のように変形できる.

$$\begin{aligned}\prod_{r=k}^{j-1}\left(e^2-(r+\tfrac{1}{2})^2\right)&=\prod_{r=k}^{j-1}\left(n+d^2-(r+\tfrac{1}{2})^2\right)\\&=\prod_{r=k}^{d-\frac{3}{2}}\left(n+d^2-(r+\tfrac{1}{2})^2\right)\times\prod_{r=d-\frac{1}{2}}^{j-1}\left(n+d^2-(r+\tfrac{1}{2})^2\right)\\&=\prod_{r=k}^{d-\frac{3}{2}}\left(n+d^2-(r+\tfrac{1}{2})^2\right)\times\prod_{s=0}^{j-d-\frac{1}{2}}\left(n+d^2-(s+d)^2\right)\\&=\prod_{r=k}^{d-\frac{3}{2}}\left(n+d^2-(r+\tfrac{1}{2})^2\right)\times\prod_{s=0}^{j-d-\frac{1}{2}}\left(n-s(s+2d)\right).\end{aligned}$$

ここで, 最初の等式は $n=pq=(e-d)(e+d)=e^2-d^2$ からしたがう. また第 3 の等式は二つ目の積を $r=s+d-\frac{1}{2}$ と変換した.

以上より

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}_{2j-1}(p\times q)=(-1)^{j-1}\,\mathrm{Cat}(j-1)&\prod_{r=0}^{j-d-\frac{1}{2}}\left(n-r(r+2d)\right)\\&\times\sum_{k=0}^{d-\frac{1}{2}}f_k(j)\cdot\prod_{r=0}^{k-1}\left(d^2-(r+\tfrac{1}{2})^2\right)\cdot\prod_{r=k}^{d-\frac{3}{2}}\left(n+d^2-(r+\tfrac{1}{2})^2\right)\end{aligned}$$

となる. 2 段目の式は (2.7) の $H_d(j,n)$ であるから, (2.6) が示せた. □

2.2 サイクルの長さが偶数の場合

次に正規化指標 $\mathrm{Ch}_{2j}(p\times q)$ について考える. 議論は前のサブセクションと平行なので, 結果のみを記す.

定理 2.5. j を正の整数とする. このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ch}_{2j}\Big((e-d)\times(e+d)\Big)\\
(2.8)\quad &= (-1)^{j-1}\binom{2j-1}{j}\sum_{k=0}^{j} g_k(j)2d\left(\prod_{r=1}^{k}(d^2-r^2)\right)\left(\prod_{r=k+1}^{j}(e^2-r^2)\right)\\
(2.9)\quad &= (-1)^{j-1}\binom{2j-1}{j}\sum_{k=0}^{j} g_k(j)2d\left(\prod_{r=1}^{k}\Big(d^2-(r-\tfrac{1}{2})^2\Big)\right)\left(\prod_{r=k+1}^{j}\Big(e^2-(r-\tfrac{1}{2})^2\Big)\right).
\end{aligned}$$

ここで,

$$g_k(j) = (-1)^k\binom{j}{k}\frac{(2j+1)^{\uparrow\uparrow k}}{(2k+1)!!} \qquad (k=0,1,2,\dots,j)$$

と定める.

系 2.6. j,p,q を正の整数とし, n,d を (2.3) で定める.

1. $d\in\mathbb{Z}$, すなわち $q-p\in 2\mathbb{Z}$ と仮定する. このとき次が成り立つ.

$$(2.10)\qquad \mathrm{Ch}_{2j}(p\times q) = (-1)^{j-1}\binom{2j}{j} I_d(j,n)\prod_{r=0}^{j-|d|}\Big(n-r(r+2|d|)\Big).$$

ここで, $I_d(j,n)$ は次で定まる. $I_0(j,n)=0$, また $|d|>0$ のとき

$$(2.11)\qquad I_d(j,n) = d\sum_{k=0}^{|d|-1}(-1)^k\left(\prod_{r=1}^{k}(d^2-r^2)\right)\binom{j}{k}\frac{(2j+1)^{\uparrow\uparrow k}}{(2k+1)!!}\left(\prod_{r=k+1}^{|d|-1}(n+d^2-r^2)\right).$$

2. $d\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$, すなわち $q-p\in 2\mathbb{Z}+1$ と仮定する. このとき次が成り立つ.

$$(2.12)\qquad \mathrm{Ch}_{2j}(p\times q) = (-1)^{j-1}\binom{2j-1}{j} J_d(j,n)\prod_{r=0}^{j-|d|-\frac{1}{2}}\Big(n-r(r+2|d|)\Big).$$

ここで, $J_d(j,n)$ は次で定まる.

(2.13)
$$J_d(j,n) = 2d\sum_{k=0}^{|d|-\frac{1}{2}}(-1)^k\left(\prod_{r=1}^{k}\Big(d^2-(r-\tfrac{1}{2})^2\Big)\right)\binom{j}{k}\frac{(2j+1)^{\uparrow\uparrow k}}{(2k+1)!!}\left(\prod_{r=k+1}^{|d|-\frac{1}{2}}\Big(n+d^2-(r-\tfrac{1}{2})^2\Big)\right).$$

例 2.7. (2.11), (2.13) でそれぞれ定まる $I_d(j,n)$, $J_d(j,n)$ は, d について対称性 $I_{-d}(j,n) = -I_d(j,n)$, $J_{-d}(j,n) = -J_d(j,n)$ を持つ.

$$\begin{aligned}
I_1(j,n) =&1,\\
I_2(j,n) =&2(n+3) - 2j(2j+1) = 2\Big(n-(j-1)(2j+3)\Big),\\
I_3(j,n) =&3(n+8)(n+5) - 8j(2j+1)(n+5) + 4j(j-1)(2j+1)(2j+3).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\frac{1}{2}}(j,n) =&1,\\
J_{\frac{3}{2}}(j,n) =&3(n+2) - 2j(2j+1) = 3n - 2(j-1)(2j+3),\\
J_{\frac{5}{2}}(j,n) =&5(n+6)(n+4) - 10j(2j+1)(n+4) + 4j(j-1)(2j+1)(2j+3).
\end{aligned}$$

$I_d(j,n)$, $J_d(j,n)$ はともに j, n に関して整数係数多項式であり, $\deg j = 1$, $\deg n = 2$ とみなすことで次数は $\deg I_d(j,n) = 2|d|-2$, $\deg J_d(j,n) = 2|d|-1$ となる.

3 Stanley 指標公式

Stanley 指標公式は, $\mathrm{Ch}_\pi(\lambda)$ を λ の多重長方形座標を用いて表す公式であり, 特別な場合が Stanley [14] により得られた. さらに一般の場合が [13] で予想された後, Féray [5] により証明された. 我々の主結果は Stanley 指標公式との関連が深いため, ここで取り上げる. 以下の内容は講究録 [9] とオーバーラップする.

まず λ が長方形ヤング図形の場合を考える. 置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ に対し, $C(\sigma)$ で σ のサイクルの全体を表す. 例えば, サイクル分解表示で $\sigma = (1\,3\,2\,7)(4\,8)(5\,9)(6) \in \mathfrak{S}_9$ と表されたとき, $C(\sigma) = \{(1\,3\,2\,7),\ (4\,8),\ (5\,9),\ (6)\}$ である.

k の分割 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_l)$ に対し, 置換 $w_\pi \in \mathfrak{S}_k$ を

$$w_\pi = (1\,2\,\dots\,\pi_1)\ (\pi_1+1\ \pi_1+2\ \dots\ \pi_1+\pi_2)\ \cdots\ (\pi_1+\cdots+\pi_{l-1}\ \dots\ k)$$

と定める. w_π はサイクル分解の型が π であるような置換である. 例えば, $\pi=(4,2,2,1)$ のとき, $w_\pi=(1\,2\,3\,4)(5\,6)(7\,8)(9)\in\mathfrak{S}_9$ となる.

定理 3.1 (Stanley 指標公式 (λ が長方形の場合), [14])**.** π を k の分割とする. 任意の長方形ヤング図形 $\lambda=p\times q$ に対し, 次の式が成り立つ.

$$\mathrm{Ch}_\pi(p\times q)=(-1)^k\sum_{\substack{\sigma_1,\sigma_2\in\mathfrak{S}_k\\ \sigma_1\sigma_2=w_\pi}}(-q)^{|C(\sigma_1)|}p^{|C(\sigma_2)|}. \tag{3.1}$$

ここで和は $\sigma_1\sigma_2=w_\pi$ を満たす組 $(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathfrak{S}_k^{\times 2}$ 全体を走る. p,q を次数 $\deg p=\deg q=1$ となるような不定元と見なすとき, (3.1) の右辺は次数 $k+\ell(\pi)$ の (非斉次) 多項式である. さらに p,q の多項式として等式

$$\mathrm{Ch}_\pi(p\times q)=(-1)^{k-\ell(\pi)}\,\mathrm{Ch}_\pi(q\times p)=\mathrm{Ch}_\pi\left((-q)\times(-p)\right)$$

が成り立つ.

例 3.2.

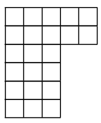
$$\begin{aligned}
\mathrm{Ch}_1(p\times q)=&pq\\
\mathrm{Ch}_2(p\times q)=&pq^2-p^2q,\\
\mathrm{Ch}_3(p\times q)=&pq^3-3p^2q^2+p^3q+pq,\\
\mathrm{Ch}_4(p\times q)=&pq^4-6p^2q^3+6p^3q^2-p^4q+5pq^2-5p^2q.
\end{aligned}$$

次にヤング図形 λ が長方形に限らない一般の場合を述べる. ただし, 本稿の主定理は λ が長方形のときを扱うため, この部分は読み飛ばしても構わない.

任意の (空でない) 分割 λ は次のように表すことができる.

$$\lambda=(\underbrace{q_1,q_1,\ldots,q_1}_{p_1},\underbrace{q_2,q_2,\ldots,q_2}_{p_2},\ldots\ldots,\underbrace{q_m,q_m,\ldots,q_m}_{p_m}).$$

ここで p_i,q_j は正の整数で, $q_1\geq q_2\geq\cdots\geq q_m\geq 1$ とする. $\mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_m)$, $\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_m)$ と書き, $\lambda=\mathbf{p}\times\mathbf{q}$ と表す. これを分割 λ の (Stanley の) 多重長方形座標と呼ぼう. 例えば $(2,4)\times(5,3)$ は, ヤング図形で見れば, (2×5)-長方形と (4×3)-長方形を合わせたもの

$(2,4)\times(5,3)$ =  $=(5,5,3,3,3,3)$

である.

定理 3.3 (Stanley 指標公式 (λ が一般の場合), Stanley [13], Féray [5])**.** π を k の分割とする. 分割 $\lambda = \mathbf{p} \times \mathbf{q} = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \times (q_1, q_2, \ldots, q_m)$ に対して, 次の式が成り立つ.

$$\mathrm{Ch}_\pi(\lambda) = (-1)^k \sum_{\substack{\sigma_1,\sigma_2 \in \mathfrak{S}_k \\ \sigma_1\sigma_2 = w_\pi}} \sum_{\varphi : C(\sigma_2) \to \{1,2,\ldots,m\}} \left(\prod_{c_1 \in C(\sigma_1)} (-q_{\Phi(c_1)}) \right) \left(\prod_{c_2 \in C(\sigma_2)} p_{\varphi(c_2)} \right).$$

ここで第 2 の和は, 写像 $\varphi : C(\sigma_2) \to \{1, 2, \ldots, m\}$ 全体を走る. (これを σ_2 のサイクルの彩色と呼ぶ.) また写像 $\Phi : C(\sigma_1) \to \{1, 2, \ldots, m\}$ は, 次のように φ から決まる:

$$\Phi(c_1) = \max\{\varphi(c') \mid c' \in C(\sigma_2),\ c_1 \cap c' \neq \emptyset\} \qquad (c_1 \in C(\sigma_1)).$$

二つのサイクル c, c' に対し, $c \cap c' \neq \emptyset$ とは, サイクル同士が共通の因子を持つことを意味する.

例 3.4.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ch}_1(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) &= \sum_i q_i p_i, \\
\mathrm{Ch}_2(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) &= \sum_i q_i^2 p_i - \sum_{i,j} q_{i \vee j} p_i p_j, \\
\mathrm{Ch}_3(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) &= \sum_i q_i^3 p_i - 3\sum_{i,j} q_{i \vee j} q_i p_i p_j + \sum_{s,t,u} q_{s \vee t \vee u} p_s p_t p_u + \sum_i q_i p_i.
\end{aligned}$$

4 主定理の証明

4.1 Step 1

この章では, 定理 2.1 の (2.2) の証明を述べる. 証明の方針は, d, e の多項式として

$$\mathrm{Ch}_{2j-1}\left((e-d) \times (e+d)\right) = \sum_{k=0}^{j} c_k(j) \left(\prod_{r=0}^{k-1} \left(d^2 - (r + \tfrac{1}{2})^2 \right) \right) \left(\prod_{r=k}^{j-1} \left(e^2 - (r + \tfrac{1}{2})^2 \right) \right)$$

の形に表されることを示した上で, 係数 $c_k(j)$ を決定することである. 上の表示が Stanley 指標公式 (3.1) から式変形で直接得られるのならば話は簡単なのだが, そうではない. 我々は定理 3.1 の後半の主張から直ちに分かる, 次の補題を利用する.

補題 4.1. e, d の多項式 $\mathrm{Ch}_{2j-1}((e-d)\times(e+d))$ は, 次数が $2j$ であり, また e, d に関してそれぞれ偶関数である. ただし, $\deg e = \deg d = 1$ とみなす.

次の補題も準備する.

補題 4.2. t を正の整数とする.

1. p, q を正の整数とする. $t \geq p+q$ ならば $\chi^{p\times q}_{(t,1^{pq-t})} = 0$, したがって $\mathrm{Ch}_t(p\times q) = 0$ となる.
2. $p = 0$ または $q = 0$ ならば, $\mathrm{Ch}_t(p\times q) = 0$.

証明 ムルナガン–中山の公式によれば, 指標値 χ^λ_μ は型 λ, 重さ μ の rim hoook tableaux に渡る交代和で表される. そのような tableaux の中で, 数字 1 が含まれる箱は, 第 1 行または第 1 列になければならない. したがって, $\mu_1 > \lambda_1 + \ell(\lambda) - 1$ ならば $\chi^\lambda_\mu = 0$ である. これより 1 番目の主張がしたがう.

2 番目の主張は (3.1) より明らか. □

4.2 Step 2

以降, しばらく j を固定する.

$$\mathcal{P}(d) := \mathrm{Ch}_{2j-1}((e-d)\times(e+d))$$

を, 多項式環 $\mathbb{Q}[e]$ 上の, d を変数とする多項式と見なそう. このとき補題 4.1 より, $\mathcal{P}(d)$ は次数 $2j$ の偶関数だから, 基底

$$1, \quad d^2, \quad d^2\left(d^2 - (\tfrac{1}{2})^2\right), \quad d^2\left(d^2 - (\tfrac{1}{2})^2\right)\left(d^2 - (\tfrac{3}{2})^2\right), \quad \ldots$$

で展開すると,

$$\mathrm{Ch}_{2j-1}((e-d)\times(e+d)) = \sum_{k=0}^{j} P_k(e) \prod_{r=0}^{k-1}\left(d^2 - (r+\tfrac{1}{2})^2\right) \tag{4.1}$$

と表すことができる. 再び補題 4.1 より, 各 $P_k(e)$ は e の高々 $2(j-k)$ 次の偶多項式である. この $P_k(e)$ について次の補題を示そう.

補題 4.3. 各 $k \in \{0, 1, \ldots, j\}$ に対して, ある定数 c_k が存在して次が成り立つ.

$$P_k(e) = c_k \prod_{r=k}^{j-1}\left(e^2 - (r+\tfrac{1}{2})^2\right). \tag{4.2}$$

証明　k に関する帰納法で示す. $k_0 \in \{0,1,2,\ldots,j\}$ とし, $k \in \{0,1,\ldots,k_0-1\}$ のとき (4.2) が成り立つと仮定する. ($k_0=0$ のときは何も仮定しない.)

いま, (4.1) で $d = k_0 + \frac{1}{2}$ かつ $e \in \{k_0 - \frac{1}{2}, k_0 + \frac{1}{2}, \ldots, j - \frac{1}{2}\}$ とすると,

$$\mathrm{Ch}_{2j-1}\left((e-k_0-\tfrac{1}{2}) \times (e+k_0+\tfrac{1}{2})\right) = P_{k_0}(e) \prod_{r=0}^{k_0-1} \left((k_0+\tfrac{1}{2})^2 - (r+\tfrac{1}{2})^2\right) \tag{4.3}$$

が成り立つ. 実際, (4.1) の右辺の $k < k_0$ の項は, 帰納法の仮定から

$$P_k(e) = c_k \prod_{r=k}^{j-1} \left(e^2 - (r+\tfrac{1}{2})^2\right) = 0 \qquad (e \in \{k_0-\tfrac{1}{2}, k_0+\tfrac{1}{2}, \ldots, j-\tfrac{1}{2}\})$$

であることより消える. ($k_0=0$ のときはこの議論は不要.) また, (4.1) の右辺の $k > k_0$ の項は, 明らかに $\prod_{r=0}^{k-1}\left((k_0+\frac{1}{2}))^2 - (r+\frac{1}{2})^2\right) = 0$ であることより消える. したがって, (4.1) の右辺は $k = k_0$ の項のみ生き残り, (4.3) がしたがう.

さて, $e \in \{k_0+\frac{1}{2}, k_0+\frac{3}{2}, \ldots, j-\frac{1}{2}\}$ のとき, 補題 4.2 より (4.3) の左辺は消える. したがって, $P_{k_0}(e)$ は, $k_0+\frac{1}{2}, k_0+\frac{3}{2}, \ldots, j-\frac{1}{2}$ を根に持つ. $P_{k_0}(e)$ は高々 $2(j-k_0)$ 次の偶多項式だから, 定数倍を除いて $\prod_{r=k_0}^{j-1}\left(e^2-(r+\frac{1}{2})^2\right)$ と一致する. 以上より $k=k_0$ の場合の (4.2) が成立し, 帰納法が完了する. □

4.3 Step 3

ここまでで, d, e の多項式として

$$\mathrm{Ch}_{2j-1}\left((e-d)\times(e+d)\right) = \sum_{k=0}^{j} c_k(j) \left(\prod_{r=0}^{k-1}\left(d^2-(r+\tfrac{1}{2})^2\right)\right)\left(\prod_{r=k}^{j-1}\left(e^2-(r+\tfrac{1}{2})^2\right)\right)$$

という形であることが示せた. (2.2) の証明を完了させるには, 定数 $c_k(j)$ を決定することが残っている. ところで, これまでと全く同様の議論で

$$\mathrm{Ch}_{2j-1}\left((e-d)\times(e+d)\right) = \sum_{k=0}^{j} c'_k(j) \left(\prod_{r=0}^{k-1}\left(d^2-r^2\right)\right)\left(\prod_{r=k}^{j-1}\left(e^2-r^2\right)\right) \tag{4.4}$$

も示すことができる. 定数 $c'_k(j)$ が決定できれば, (2.1) の証明も完了できる.

さて定理 2.1 の証明を完了させるために残っていることは, 定数 $c_k(j), c'_k(j)$ の決定であるが, これは難しくない. まず, 各 $k \in \{0,1,\ldots,j\}$ において, 上の 2 式の

$d^{2k}e^{2j-2k}$ の係数を比較すると, $c_k(j) = c'_k(j)$ であることが直ちに分かる. そこで以下では (4.4) の $c'_k(j)$ を求めよう.

いま, $k \in \{1, \ldots, j\}$ として, (4.4) で $d = k,\ \ e = k-1$ とおくと, (4.3) の証明と同様に

$$\mathrm{Ch}_{2j-1}\left((-1) \times (2k-1)\right) = c_k(j) \left(\prod_{r=0}^{k-1} \left(k^2 - r^2\right)\right) \left(\prod_{r=k}^{j-1} \left((k-1)^2 - r^2\right)\right)$$

が分かる. 一方, Stanley の指標公式 (3.1) より

$$\mathrm{Ch}_\ell\left((-1) \times q\right) = -\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\ell} q^{|C(\sigma)|} = -q(q+1)(q+2)\cdots(q+\ell-1)$$

が成り立つ (ここで第 2 の等式は例えば ℓ に関する帰納法で容易に示せる). これら 2 つの式を整理することで $c_k(j)$ が求められる.

ただし, この方法では $c_0(j)$ を求められないので, 別の方法を用いる必要がある. 一つのやり方として, 指標の漸近挙動を見る方法がある. (4.4) で $d = 0$ とすると,

$$\mathrm{Ch}_{2j-1}(e \times e) = c_0(j) \prod_{r=0}^{j-1} (e^2 - r^2) \quad \sim \quad c_0(j) e^{2j} \qquad (e \to \infty)$$

となる. 一方, 正規化指標の漸近挙動として

$$\mathrm{Ch}_{2j-1}(e \times e) \quad \sim \quad R_{2j}(e \times e) = R_{2j}(1 \times 1) e^{2j}$$

となることはよく知られている. ここで $R_{2j}(\lambda)$ は自由確率論で登場する自由キュムラントであり, $R_{2j}(1 \times 1) = (-1)^{j-1}\,\mathrm{Cat}(j-1)$ になることは容易に計算できる (例えば [12, Exercise 11.35, page 193]). これにより $c_0(j)$ も決定され, 定理 2.1 の証明が完了する.

5　おわりに

この章では, 本研究と深く関連するいくつかの話題について簡潔に述べる.

5.1　自由キュムラントと Kerov 多項式

ヤング図形 λ に対して, Kerov 推移測度 $\mathfrak{m}_\lambda$ が定義され, それの自由キュムラントの列 $R_2(\lambda), R_3(\lambda), \ldots$ が定まる. 詳細は [6, §6.3] や [8] を参考にされたい. なお, $R_1(\lambda) = 0$ である. ここでは次の形で導入しよう.

命題 5.1 (Theorem 9 in [3])**.** 任意の $k \geq 1$ とヤング図形 λ に対して, 次の等式が成り立つ. (これをヤング図形の自由キュムラントの定義とみなしても良い)

$$R_{k+1}(\lambda) = (-1)^k \sum_{\substack{\sigma_1,\sigma_2 \in \mathfrak{S}_k \\ \sigma_1\sigma_2=(1\,2\,\ldots\,k) \\ |C(\sigma_1)|+|C(\sigma_2)|=k+1}} \sum_{\varphi: C(\sigma_2)\to\{1,2,\ldots,m\}} \left(\prod_{c_1 \in C(\sigma_1)} (-q_{\Phi(c_1)}) \right) \left(\prod_{c_2 \in C(\sigma_2)} p_{\varphi(c_2)} \right).$$

記号は定理 3.3 にしたがう. 定理 3.3 と比較すれば分かるように, $R_{k+1}(\lambda)$ は $\mathrm{Ch}_k(\lambda)$ の最高次の部分に一致する.

次の定理で定まる, 正規化指標 $\mathrm{Ch}_k(\lambda)$ を自由キュムラント $R_2, R_3, \ldots$ で表示する式を, **Kerov 多項式**という. 例えば [6, 定理 6.25] を参照.

定理 5.2 (Kerov)**.** $k \geq 1$ とする. ある非負整数係数 k 変数多項式 P_k が存在して, 任意のヤング図形 λ に対して

$$\mathrm{Ch}_k(\lambda) = P_k(R_2(\lambda), R_3(\lambda), \ldots, R_{k+1}(\lambda)) \tag{5.1}$$

が成り立つ. ここで, $\mathrm{wt}(R_j) = j$ $(j = 2, 3, \ldots)$ により次数を導入すると, $\mathrm{wt}(\mathrm{Ch}_k) = k+1$ である. また (5.1) 右辺の各項の wt は $k+1$ と偶奇が等しく, さらに wt が $k+1$ の項は R_{k+1} に限る.

上の定理で最も非自明な部分は, P_k の係数が全て「非負」であるという部分で, [4] で初めて証明された.

例 5.3 (Kerov 多項式)**.**

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ch}_1 =& R_2.\\
\mathrm{Ch}_2 =& R_3.\\
\mathrm{Ch}_3 =& R_4 + R_2.\\
\mathrm{Ch}_4 =& R_5 + 5R_3.\\
\mathrm{Ch}_5 =& R_6 + 15R_4 + 5R_2^2 + 8R_2.\\
\mathrm{Ch}_6 =& R_7 + 35R_5 + 35R_3R_2 + 84R_3.\\
\mathrm{Ch}_7 =& R_8 + 70R_6 + 84R_4R_2 + 56R_3^2 + 14R_2^3 + 469R_4 + 224R_2^2 + 180R_2.
\end{aligned}$$

定理 2.1, 定理 2.5, および命題 5.1 から, λ が長方形ヤング図形のときの自由キュムラントは次のように表されることが分かった.

系 5.4. j を正の整数とする．このとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned} R_{2j}\Big((e-d)\times(e+d)\Big) =& (-1)^{j-1}\operatorname{Cat}(j-1)\sum_{k=0}^{j} f_k(j) d^{2k} e^{2j-2k}, \\ R_{2j+1}\Big((e-d)\times(e+d)\Big) =& (-1)^{j-1}\binom{2j}{j}\sum_{k=0}^{j} g_k(j) d^{2k+1} e^{2j-2k}, \end{aligned}$$

ここで $f_k(j), g_k(j)$ はそれぞれ定理 2.1, 定理 2.5 で定義されている．

5.2 特別な指標値の消滅

系 2.2 とその直後の例において, $j \geq 2$, $d = \frac{3}{2}$ の場合を再度見てみよう．このとき $n = p(p+3)$ だから,

$$H_{\frac{3}{2}}(j,n) = n+2-2j(2j-1) = p(p+3)+2-2j(2j-1) = (p-2j+2)(p+2j+1)$$

と, p の多項式として因数分解される．したがって,

$$\operatorname{Ch}_{2j-1}(p\times(p+3)) = (-1)^{j-1}\operatorname{Cat}(j-1)(p-2j+2)(p+2j+1)\prod_{r=0}^{j-2}(p(p+3)-r(r+3))$$

とかける．この右辺は $p = 2j-2$ のとき消えるため, $\operatorname{Ch}_{2j-1}((2j-2)\times(2j+1)) = 0$ が言える．言い換えると,

$$\chi^{(2j-2)\times(2j+1)}_{(2j-1,1^{(2j-3)(2j-1)})} = 0$$

が成り立つことが分かった．すなわち, 指標 $\chi^{(2j-2)\times(2j+1)}$ は長さ $2j-1$ のサイクルにおいて消滅する．これは古典的な事実 (例えばムルナガン–中山の公式など, 特に補題 4.2) から見つけることは容易でないように見える．

5.3 スピン指標

正規化指標 $\operatorname{Ch}_\pi(\lambda)$ の代表的な類似物として, スピン指標がある．対称群のスピン表現から自然に定まるものである．

各成分が奇数であるような分割を, 奇数分割という．また, 成分が全て異なる分割は, ストリクト (strict) であるという．指標値 χ^λ_μ の「スピン版」は, X^ξ_ρ である．ただし, ξ は n のストリクト分割で, ρ は n の奇数分割である．量 X^ξ_ρ は例えば対称関数の等式

$$p_\rho = \sum_\xi X^\xi_\rho 2^{-\ell(\xi)} Q_\xi$$

を通じて得られる．ここで p_ρ はべき和対称関数, Q_ξ は Schur の Q-関数である．

定義 5.5 (対称群のスピン正規化指標)**.** π を k の奇数分割とする．任意のストリクト分割 ξ に対し, $\mathrm{Ch}_\pi^{\mathrm{spin}}(\xi)$ を次で定義する．$n := |\xi| \geq k$ のとき,

$$\mathrm{Ch}_\pi^{\mathrm{spin}}(\xi) = n(n-1)\cdots(n-k+1)\frac{X^\xi_{\pi\cup(1^{n-k})}}{X^\xi_{(1^n)}}.$$

また, $n < k$ のときは $\mathrm{Ch}_\pi^{\mathrm{spin}}(\xi) = 0$ と定める．

Kerov 多項式の「スピン版」は, 筆者 [7, 8] において初めて考察された．さらにスピン版 Stanely 指標公式も [11] で得られた．本稿の主結果のスピン版はあるだろうか? まず, 長方形ヤング図形は一般にストリクトではないので, $\mathrm{Ch}_\pi^{\mathrm{spin}}(p \times q)$ というものは意味を持たない．次の結果が De Stavola [1, Proposition 4.18, page 91] により初めて発見された．我々は別証明を与える．

系 5.6. j, p を正の整数とする．階段ヤング図形

$$\Delta_p = (p, p-1, p-2, \ldots, 2, 1)$$

に対し,

$$2\,\mathrm{Ch}^{\mathrm{spin}}_{2j-1}(\Delta_p) = (-1)^{j-1}\,\mathrm{Cat}(j-1)\prod_{r=0}^{j-1}\Big(p(p+1) - r(r+1)\Big)$$

が成り立つ．

証明　[11] の結果から, スピン正規化指標は, 正規化指標を用いて表すことができる．実際, 任意のストリクト分割 ξ に対して, 等式

$$2\,\mathrm{Ch}^{\mathrm{spin}}_{2j-1}(\xi) = \mathrm{Ch}_{2j-1}(D(\xi))$$

が成り立つ．ここで $D(\xi)$ は ξ のダブルヤング図形であり, 特に $D(\Delta_p) = p \times (p+1)$ となる．よって系 2.2 を適用することでこの系を得る．$\square$

5.4 まとめ

本稿では定義 1.1 で定まる正規化指標 $\mathrm{Ch}_\pi(\lambda)$ について,

π は 1 行ヤング図形 $\pi = (k)$　　かつ　　λ は長方形ヤング図形 $\lambda = p \times q$

の場合に限り新しい表示を得た．もちろん，「π が 2 行以上ある場合」や「λ が長方形でない場合」を考えることは自然な拡張であろう．スピン正規化指標 $\mathrm{Ch}_{\pi}^{\mathrm{spin}}(\xi)$ に関する §5.3 で述べた結果も同様の拡張が問われる．

他の拡張の方向性として，Jack 正規化指標 $\mathrm{Ch}_{\pi}^{(\alpha)}(\lambda)$ を考えることができる．これは Jack 対称関数に付随して自然に定めることができる．例えば [2] を参照．

参考文献

[1] Dario De Stavola. *Asymptotic results for Representation Theory.* PhD thesis, Universität Zürich, 2017. Preprint arXiv:1805.04065v1.

[2] Maciej Dołęga, Valentin Féray, and Piotr Śniady. Jack polynomials and orientability generating series of maps. *Sém. Lothar. Combin.*, Vol. 70, No. B70j, 2014. 50 pages.

[3] V. Féray and P. Śniady. Asymptotics of characters of symmetric groups related to Stanley character formula. *Ann. of Math.*, Vol. 173, No. 2, pp. 887–906, 2011.

[4] Valentin Féray. Combinatorial interpretation and positivity of Kerov's character polynomials. *J. Algebraic Combin.*, Vol. 29, No. 4, pp. 473–507, 2009.

[5] Valentin Féray. Stanley's formula for characters of the symmetric group. *Ann. Comb.*, Vol. 13, No. 4, pp. 453–461, 2010.

[6] 洞彰人．対称群の表現とヤング図形集団の解析学 — 漸近的表現論への序説．数学の杜 4．数学書房, 2017.

[7] Sho Matsumoto. A spin analogue of Kerov polynomials. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, Vol. 14, No. 053, 2018. 13 pages.

[8] 松本詔．対称群のスピン表現に対する Kerov 多項式．組合せ論的表現論の諸相, 数理解析研究所講究録, 第 2127 巻, pp. 50–65. 京都大学, 2019.

[9] 松本詔．対称群のスピン表現に対する Stanley 指標多項式．表現論とその組合せ論的側面, 数理解析研究所講究録, 第 2161 巻, pp. 58–72. 京都大学, 2020.

[10] Sho Matsumoto and Piotr Śniady. Symmetric group characters of almost square shape. arXiv:2108.12939.

[11] Sho Matsumoto and Piotr Śniady. Linear versus spin: representation theory of the symmetric groups. *Algebraic Combinatorics*, Vol. 3, No. 1, pp. 249–280, 2020.

[12] Alexandru Nica and Roland Speicher. *Lectures on the combinatorics of free probability*, Vol. 335. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[13] Richard P. Stanley. A conjectured combinatorial interpretation of the normalized irreducible character values of the symmetric group. arXiv:math/0606467.

[14] Richard P. Stanley. Irreducible symmetric group characters of rectangular shape. *Sém. Lothar. Combin.*, Vol. 50, pp. Art. B50d, 11 pages, 2004.