Minor Summation Formula and Classical Group Characters of Nearly Rectangular Shape

名古屋大学多元数理科学研究科
岡田 聡一
Soichi Okada
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

1 はじめに

古典群の既約表現の中でもある種の長方形の Young 図形に対応するもの（長方形型表現）は，表現論，組合せ論などで特別な位置を占めている．表現論では，[10] で示されているように，長方形型表現は部分群への制限やテンソル積が無重複分解するという著しい性質をもっている．一方，組合せ論では，このような無重複分解を表す指標の関係式を利用することによって，ある種の平面分割の個数・母関数が簡単な積の形に表されることが証明できる．例えば，[12, 13, 11] を参照されたい．本稿では，長方形型表現の制限，テンソル積の分解を表す指標の関係式の概長方形型への一般化について，石川–若山の小行列式の和公式を利用して証明する方法を解説する．

非負整数の広義単調減少列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ で $\sum_{i \ge 1} \lambda_i < \infty$ となるものを**分割** (partition) という．分割 λ に対して，$l(\lambda) = \#\{i : \lambda_i > 0\}$, $|\lambda| = \sum_{i \ge 1} \lambda_i$ とおき，それぞれ λ の長さ，大きさと呼ぶ．分割 λ をその Young 図形

$$D(\lambda) = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \le i \le l(\lambda),\ 1 \le j \le \lambda_i\}$$

と同一視し，格子点の代わりに単位正方形を置いて Young 図形を図示することが多い．分割 λ, μ に対して，$D(\lambda) \supset D(\mu)$，つまり，$\lambda_i \ge \mu_i$ $(i \ge 1)$ が成り立つとき，$\lambda \supset \mu$ と書く．また，このとき，$D(\lambda) \setminus D(\mu)$ を歪 Young 図形と呼び，$D(\lambda/\mu)$ あるいは単に λ/μ と表す．正の半整数（つまり，$\mathbb{N} + 1/2 = \{1/2, 3/2, \dots\}$ の元）からなる長さ n の広義単調減少列 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ のことを，長さ n の**半整数分割** (half-partition) と呼ぶ．

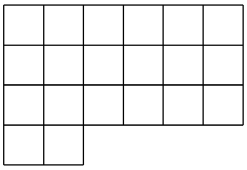
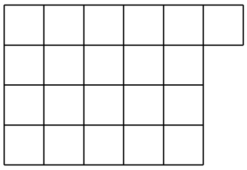
分割，あるいは，半整数分割 λ は

$$\lambda = (\underbrace{r, \dots, r}_{n}) = (r^n)$$

の形をしているとき，**長方形型** (rectangular) であるという．より一般に，

$$\lambda = (\underbrace{r, \dots, r}_{n-1}, p) = (r^{n-1}, p), \quad \text{または} \quad (\underbrace{r, \dots, r}_{p}, \underbrace{r-1, \dots, r-1}_{n-p}) = (r^p, (r-1)^{n-p})$$

の形をしているとき，**概長方形型** (nearly-rectangular) であるという．例えば，

$D((6^3,2)) =$  ,　$D((6,5^3)) =$ 

は概長方形型分割の Young 図形である．

正整数 n を固定し，$\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n)$ を変数とする．また，$\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ を長さ n 以下の分割，あるいは，長さ n の半整数分割とする．このとき，対応する **Schur 関数** (Schur function) を

$$s_\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{\det\left(x_i^{\lambda_j+n-j}\right)_{1\le i,j\le n}}{\det\left(x_i^{n-j}\right)_{1\le i,j\le n}} \tag{1}$$

によって定義する．Schur 関数 $s_\lambda(\boldsymbol{x})$ は，一般線型 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_n = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の $\lambda_1\varepsilon_1+\cdots+\lambda_n\varepsilon_n$ を最高ウェイトとする既約表現 $V_{\mathfrak{gl}_n}(\lambda)$ の指標である．また，対応する**奇数次直交指標** (odd orthogonal character) $\mathrm{so}_{2n+1}(\lambda;\boldsymbol{x})$ を

$$\mathrm{so}_{2n+1}(\lambda;\boldsymbol{x}) = \frac{\det\left(x_i^{\lambda_j+n+1/2-j} - x_i^{-(\lambda_j+n+1/2-j)}\right)_{1\le i,j\le n}}{\det\left(x_i^{n+1/2-j} - x_i^{-(n+1/2-j)}\right)_{1\le i,j\le n}} \tag{2}$$

によって定義する．奇数次直交指標 $\mathrm{so}_{2n+1}(\lambda;\boldsymbol{x})$ は，直交 Lie 代数 $\mathfrak{so}_{2n+1} = \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ の $\lambda_1\varepsilon_1+\cdots+\lambda_n\varepsilon_n$ を最高ウェイトとする既約表現 $V_{\mathfrak{so}_{2n+1}}(\lambda)$ の指標である．長方形型の奇数次直交指標については，次の定理が成り立つ．

定理 1.1.　(a)（Macdonald [9, I.5 Example 16]）非負整数あるいは正の半整数 $r \in \mathbb{N}\cup(\mathbb{N}+1/2)$ に対して，

$$\mathrm{so}_{2n+1}((r^n);\boldsymbol{x}) = (x_1\cdots x_n)^{-r}\cdot\sum_{\lambda\subset((2r)^n)} s_\lambda(\boldsymbol{x}). \tag{3}$$

ここで，和は $\lambda\subset((2r)^n)$ となる分割（つまり，$l(\lambda)\le n$, $\lambda_1\le 2r$ をみたす分割）全体にわたる．

(b)（岡田 [10, Theorem 2.5 (1)]）非負整数あるいは正の半整数 r, $s\in\mathbb{N}\cup(\mathbb{N}+1/2)$（ただし $r\le s$）に対して，

$$\mathrm{so}_{2n+1}((r^n);\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{so}_{2n+1}((s^n);\boldsymbol{x}) = \sum_{\lambda\subset((2r)^n)} \mathrm{so}_{2n+1}(\lambda+(s-r)^n;\boldsymbol{x}). \tag{4}$$

ここで，$\lambda+(s-r)^n = (\lambda_1+s-r,\dots,\lambda_n+s-r)$ である．

表現論的には，この定理の (a) は分割 (r^n) に対応する既約表現を $\mathfrak{so}_{2n+1}$ の極大放物型部分代数の Levi 部分 $\mathfrak{gl}_n$ への制限したときの既約分解を，(b) は分割 (r^n), (s^n) に対応する既約表現のテンソル積の既約分解を表している．Macdonald [9] は，Hall–Littlewood 対称関数を経由して定理 1.1 (a) を証明した．一方，岡田 [10] は，石川–若山の小行列式

の和公式を利用することによって，定理 1.1 (a), (b) だけでなく，他の古典型 Lie 代数についても長方形型指標の部分代数への制限，テンソル積の既約分解を表す関係式を証明している．

Krattenthaler [7] は定理 1.1 の概長方形型分割への一般化として，次の定理を与えている．歪 Young 図形 λ/ν は，各列に高々 1 つの箱しかないとき，つまり，

$$\lambda_1 \geq \nu_1 \geq \lambda_2 \geq \nu_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq \nu_n$$

をみたすとき，**水平帯** (horizontal strip) であるという．

定理 1.2. (a) (Krattenthaler [7, Theorem 2 (3.10), (3.11)]) r を非負整数あるいは正の半整数とし，p を $p \leq r$ となる非負整数とする．このとき，

$$\mathrm{so}_{2n+1}((r^{n-1}, r-p); \boldsymbol{x}) = (x_1 \cdots x_n)^{-r} \cdot \sum_{\lambda \subset ((2r)^n)} a^{(2r)}_{\lambda,p}\, s_\lambda(\boldsymbol{x}). \tag{5}$$

ここで，係数 $a^{(m)}_{\lambda,p}$ は次の 3 条件 (i), (ii), (iii) をみたす分割 μ の個数に等しい：

(i) 歪 Young 図形 λ/ν は水平帯である．

(ii) $|\lambda| - |\nu| = p$.

(iii) 歪 Young 図形 λ/μ において左から i 番目の箱は，第 $(m-2p+2i)$ 列より真に右にある．

(b) (Krattenthaler [7, Theorem 3 (3.19), (3.20)]) r, s を非負整数あるいは正の半整数（簡単のため $r \leq s$ と仮定する）とし，p を $p \leq r$ となる非負整数とする．このとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{so}_{2n+1}((r^{n-1}, r-p); \boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{so}_{2n+1}((s^n); \boldsymbol{x}) \\ = \sum_{\lambda \subset ((2r)^n)} b^{(2r)}_{\lambda,p}\, \mathrm{so}_{2n+1}(\lambda + (s-r)^n; \boldsymbol{x}).\end{aligned} \tag{6}$$

ここで，係数 $b^{(2r)}_{\lambda,p}$ は，次の 2 条件 (i), (ii) をみたす長さ n 以下の分割 μ の個数に等しい：

(i) μ/λ は水平帯である．

(ii) $\mu_1 \leq 2r$, $\mu_n = \lambda_n$ であり，

$$\max\{p - \lambda_n, p - \lambda_{n-1} + \lambda_n\} \leq |\mu| - |\lambda| \leq p,$$
$$2\mu_1 + \cdots + 2\mu_{i-1} + \mu_i \geq 2\lambda_1 + \cdots + 2\lambda_{i-1} + 2p \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

定理 1.2 において，$p = 0$ のときを考えると，$a^{(m)}_{\lambda,0} = b^{(m)}_{\lambda,0} = 1$ となるから，定理 1.1 が得られる．Krattenthaler [7] は，定理 1.2 を純粋に組合せ論的な手法で証明している．(a) では，既約指標 $\mathrm{so}_{2n+1}(\lambda; \boldsymbol{x})$ の Lakshmibai–Musili–Seshadri による半標準盤の母関数としての表示を用い，Robinson–Schensted–Knuth 型アルゴリズムを構成することによって，主張に全単射による証明を与えている．一方，(b) の証明では，Littelmann による Littlewood–Richardson 規則の $\mathfrak{so}_{2n+1}$ への拡張を利用している．

本稿では，定理 1.2 の形の指標の関係式を，石川–若山の小行列式の和公式を用いて用いてどのように代数的に証明するのかを解説する．このアプローチをとることによって，

係数を組合せ論的に簡明に記述することが可能になり，定理 1.2 の組合せ論的記述からはすぐにはわからない等式 $a_{\lambda,p}^{(m)} = b_{\lambda,p}^{(m)}$ を示すこともできる．

本稿の構成は以下の通りである．第 2 節では主定理（定理 2.1）を述べ，定理 2.1 からどのようにして定理 1.2 の形の指標の関係式が導かれるのかを説明する．第 3 節では，小行列式の和公式を利用した定理 2.1 の証明の概要を与える．最後に，第 4 節では関連する結果を紹介する．

2　主定理とその帰結

この節では，本稿の主結果を述べ，定理 1.2 の形の指標の関係式を導く．

非負整数 k と変数 u に対して

$$[k]_u = \frac{u^{k/2} - u^{-k/2}}{u^{1/2} - u^{-1/2}} = u^{k/2-1/2} + u^{k/2-3/2} + \cdots + u^{-(k/2-1/2)}$$

とおく．また，分割 $\lambda \subset (m^n)$ に対して，

$$c_\lambda^{(m)}(u) = [m - \lambda_1 + 1]_u \, [\lambda_1 - \lambda_2 + 1]_u \cdots [\lambda_{n-1} - \lambda_n + 1]_u \, [\lambda_n + 1]_u \tag{7}$$

と定義する．このとき，本稿の主定理は次のように述べることができる．

定理 2.1.　(a) 整数あるいは半整数 $r \in \mathbb{N} \cup (\mathbb{N} + 1/2)$ に対して，

$$\mathrm{so}_{2n+3}((r^{n+1}); x_1, \ldots, x_n, u) = (x_1 \cdots x_n)^{-r} \cdot \sum_{\lambda \subset ((2r)^n)} c_\lambda^{(2r)}(u) \, s_\lambda(x_1, \ldots, x_n). \tag{8}$$

(b) 整数あるいは半整数 $r,\ s \in \mathbb{N} \cup (\mathbb{N} + 1/2)$（ただし $r \le s$）に対して，

$$\begin{aligned} &\mathrm{so}_{2n+3}((r^{n+1}); x_1, \ldots, x_n, u) \cdot \mathrm{so}_{2n+1}((s^n); x_1, \ldots, x_n) \\ &\qquad = \sum_{\lambda \subset ((2r)^n)} c_\lambda^{(2r)}(u) \, \mathrm{so}_{2n+1}(\lambda + (s-r)^n; x_1, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{9}$$

この定理の証明の概要は次節で与える．この節では，この定理から定理 1.2 で与えた形の概長方形型指標の関係式を導く．その際の鍵は，次の命題である．

命題 2.2.（岡田 [10, Theorem 2.2 (a) とその下の Remark]）整数あるいは半整数 $r \in \mathbb{N} \cup (\mathbb{N} + 1/2)$ に対して，

$$\mathrm{so}_{2n+3}((r^{n+1}); x_1, \ldots, x_n, u) = \sum_{p=0}^{\lfloor r \rfloor} [2r - 2p + 1]_u \, \mathrm{so}_{2n+1}((r^{n-1}, r-p); x_1, \ldots, x_n). \tag{10}$$

相反 Laurent 多項式 $f(u) \in \mathbb{Z}[u^{1/2}, u^{-1/2}]$（ただし $f(u^{-1}) = f(u)$）全体のなす $\mathbb{Z}$ 加群の基底として $\{[k+1]_u : k \in \mathbb{N}\}$ をとることができるから，$c_\lambda^{(m)}(u)$ は

$$c_\lambda^{(m)}(u) = \sum_{p=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} c_{\lambda,p}^{(m)} \, [m - 2p + 1]_u \tag{11}$$

の形に展開でき，係数 $c_{\lambda,p}^{(m)} \in \mathbb{Z}$ が定まる．すると，命題 2.2 に注意して，定理 2.1 の (8), (9) における $[2r - 2p + 1]_u$ の係数を比較することにより，次の系の (a), (b) が得られる．

系 2.3. (a) 非負整数あるいは正の半整数 r と $p \leq r$ となる非負整数 p に対して，

$$\mathrm{so}_{2n+1}((r^{n-1}, r-p); \boldsymbol{x}) = (x_1 \cdots x_n)^{-r} \cdot \sum_{\lambda \subset ((2r)^n)} c_{\lambda,p}^{(2r)} \, s_\lambda(\boldsymbol{x}).$$

(b) 非負整数あるいは正の半整数 r, s（ただし $r \leq s$）と $p \leq r$ となる非負整数 p に対して，

$$\mathrm{so}_{2n+1}((r^{n-1}, r-p); \boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{so}_{2n+1}((s^n); \boldsymbol{x}) = \sum_{\lambda \subset ((2r)^n)} c_{\lambda,p}^{(2r)} \, \mathrm{so}_{2n+1}(\lambda + (s-r)^n; \boldsymbol{x}).$$

(c) 係数 $c_{\lambda,p}^{(m)}$ は，次の 3 条件 (i), (ii), (iii) をみたす長さ $n+1$ 以下の分割 μ の個数に等しい：

(i) μ/λ は水平帯である．

(ii) $|\mu| - |\lambda| = 2r - p$.

(iii) $\mu_1 = 2r$ であり，

$$\mu_1 + 2\mu_2 + \cdots + 2\mu_{i-1} + \mu_i \geq 2\lambda_1 + \cdots + 2\lambda_{i-1} \quad (2 \leq i \leq n+1).$$

特に，(a), (b) から，

$$\begin{aligned}\Big[V_{\mathfrak{gl}_n}((r^n)) \otimes \mathrm{Res}_{\mathfrak{gl}_n}^{\mathfrak{so}_{2n+1}} V_{\mathfrak{so}_{2n+1}}((r^{n-1}, r-p)) : V_{\mathfrak{gl}_n}(\lambda)\Big]_{\mathfrak{gl}_n} \\ = \Big[V_{\mathfrak{so}_{2n+1}}((r^n)) \otimes V_{\mathfrak{so}_{2n+1}}((r^{n-1}, r-p)) : V_{\mathfrak{so}_{2n+1}}(\lambda)\Big]_{\mathfrak{so}_{2n+1}} \end{aligned} \tag{12}$$

と，$\mathfrak{so}_{2n+1}$ から部分代数 $\mathfrak{gl}_n$ に制限したときの重複度とテンソル積の分解における重複度が一致することがわかる．(定理 1.2 の係数の組合せ論的記述からはすぐにはわからない．) 後で定理 4.3 で見るように，この重複度の一致は，概長方形型の分割に限らず，より一般の分割に対しても成り立つ．

この節の残りでは，結晶基底の理論を用いて系 2.3 (c) を証明する．(結晶基底については [2] を参照されたい．) 非負整数 k に対して，量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の $(k+1)$ 次元既約表現を $V(k)$ と表す．このとき，$V(k)$ の指標が $[k+1]_{u^2}$（ただし，ϖ を基本ウェイトとするとき，$u = e^\varpi$ である）に等しいことに注意すると，係数 $c_{\lambda,p}^{(m)}$ はその定義 (7), (11) から

$$c_{\lambda,p}^{(m)} = \big[V(m-\lambda_1) \otimes V(\lambda_1 - \lambda_2) \otimes \cdots \otimes V(\lambda_{n-1} - \lambda_n) \otimes V(\lambda_n) : V(m-2p)\big]_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}$$

と既約表現 $V(m-2p)$ の重複度として与えられる．よって，$V(k)$ の結晶基底を $B(k)$ とするとき，

$$c_{\lambda,p}^{(m)} = \# \left\{ \begin{array}{r} b \in B(m-\lambda_1) \otimes B(\lambda_1 - \lambda_2) \otimes \cdots \otimes B(\lambda_{n-1} - \lambda_n) \otimes B(\lambda_n) \\ : \widetilde{e}(b) = 0, \ \mathrm{wt}(b) = (m-2p)\varpi \end{array} \right\} \tag{13}$$

となる．ここで，$\widetilde{e}$ は柏原作用素であり，wt はウェイトを対応させる写像である．

既約表現 $V(k)$ の結晶グラフ $B(k)$ は

$$u_0^{(k)} \longrightarrow u_1^{(k)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow u_k^{(k)}$$

で与えられ，

$$\mathrm{wt}(u_i^{(k)}) = (k-2i)\varpi, \quad \varepsilon(u_i^{(k)}) = i \quad (0 \le i \le k)$$

である．分割 $\lambda \subset (m^n)$ に対して，$\mu \subset (m^{n+1})$ であり μ/λ が水平帯となる分割 μ 全体のなす集合を $\mathcal{B}_\lambda$ とおく．つまり，

$$\mathcal{B}_\lambda = \left\{(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1} : m \ge \mu_1 \ge \lambda_1 \ge \mu_2 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge \mu_{n+1} \ge 0\right\}.$$

そして，$\mu \in \mathcal{B}_\lambda$ と

$$u_{m-\mu_1}^{(m-\lambda_1)} \otimes u_{\lambda_1-\mu_2}^{(\lambda_1-\lambda_2)} \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_{n-1}-\mu_n}^{(\lambda_{n-1}-\lambda_n)} \otimes u_{\lambda_n-\mu_{n+1}}^{(\lambda_n)}$$
$$\in B(m-\lambda_1) \otimes B(\lambda_1-\lambda_2) \otimes \cdots \otimes B(\lambda_{n-1}-\lambda_n) \otimes B(\lambda_n)$$

を同一視することにより，$\mathcal{B}_\lambda$ に結晶基底の構造を入れる．このとき，結晶として $\mathcal{B}_\lambda \cong B(m-\lambda_1) \otimes B(\lambda_1-\lambda_2) \otimes \cdots \otimes B(\lambda_{n-1}-\lambda_n) \otimes B(\lambda_n)$ であり，$\mu \in \mathcal{B}_\lambda$ に対して

$$\mathrm{wt}(\mu) = 2|\mu| - 2|\lambda| - m \tag{14}$$

である．また，次の補題を用いると，$\widetilde{e}(\mu) = 0$ となるための条件を書き下すことができる．

補題 2.4. ([2, Corollary 4.4.4]) $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_N$ を $\mathfrak{sl}_2$ 結晶基底とし，$b_i \in \mathcal{B}_i$ $(1 \le i \le N)$ とする．このとき，

(1) $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ において $\widetilde{e}(b_1 \otimes b_2) = 0$ となるための必要十分条件は，$\langle \mathrm{wt}(b_1), h\rangle \ge \varepsilon(b_2)$ となることである．ここで，$h \in \mathfrak{sl}_2$ は単純コルートである．

(2) $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_N$ において $\widetilde{e}(b_1 \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_N) = 0$ となるための必要十分条件は，すべての $k = 1, 2, \ldots, N$ に対して $\widetilde{e}(b_1 \otimes \cdots \otimes b_k) = 0$ となることである．

この補題を用いて，系 2.3 (c) の証明を完成させる．

系 2.3 (c) の証明. (13), (14) により，

$$c_{\lambda,p}^{(m)} = \#\{\mu \in \mathcal{B}_\lambda : \widetilde{e}(\mu) = 0,\ |\lambda| - |\mu| = m - p\}.$$

よって，$\mu \in \mathcal{B}_\lambda$ に対して，$\widetilde{e}(\mu) = 0$ となるための必要十分条件が

$$\mu_1 = m, \quad \mu_1 + 2\mu_2 + \cdots + 2\mu_{k-1} + \mu_k \ge 2\lambda_1 + \cdots + 2\lambda_{k-1} \quad (2 \le k \le n+1)$$

で与えられることを示せばよい．

補題 2.4 を，$\mathcal{B}_i = B(\lambda_{i-1} - \lambda_i)$, $b_i = u_{\lambda_{i-1}-\mu_i}^{(\lambda_{i-1}-\lambda_i)}$ $(1 \le i \le n+1)$ に対して適用する．ただし，$\lambda_0 = m$, $\lambda_{n+1} = 0$ であると約束する．まず，$B(m-\lambda_1)$ の結晶グラフから，$\widetilde{e}(b_1) = \widetilde{e}(u_{m-\mu_1}^{(m-\lambda_1)}) = 0$ は $\mu_1 = m$ と同値である．また，$k \ge 2$ のときは，$\mathrm{wt}(b_i) = 2\mu_i - \lambda_i - \lambda_{i-1}$ $(1 \le i \le k-1)$, $\varepsilon(b_k) = \lambda_{k-1} - \mu_k$ を用いると，条件 $\langle \mathrm{wt}(b_1 \otimes \cdots \otimes b_{k-1}), h\rangle \ge \varepsilon(b_k)$ は $\mu_1 + 2\mu_2 + \cdots + 2\mu_{k-1} + \mu_k \ge 2\lambda_1 + \cdots + 2\lambda_{k-1}$ と書き直すことができる．よって，補題 2.4 により，求める結論が得られる． □

3　主定理（定理 2.1）の証明

この節では，定理 2.1 の証明の概要を説明する．

定理 2.1 の証明方法は，[10] で与えた長方形型分割に対応する既約指標の場合と同様であり，次の 3 ステップからなる．

ステップ 1： 係数 $c_\lambda^{(m)}$ をある交代行列の部分パフィアンを用いて表す．

ステップ 2： 示すべき関係式 (8), (9) の右辺の和を，石川–若山の小行列式の和公式を用いて 1 つのパフィアンで表す．

ステップ 3： ステップ 2 で得られたパフィアンを行列式の形に変形する．

まず，パフィアンの定義を思い出し，小行列を表す記号を導入しておく．（パフィアンについては，[3] を参照されたい．）偶数次交代行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 2m}$ に対して，そのパフィアン $\operatorname{Pf} A$ は

$$\operatorname{Pf} A = \sum_{\pi \in F_{2m}} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),\pi(2)} a_{\pi(3),\pi(4)} \cdots a_{\pi(2m-1),\pi(2m)},$$

によって定義される．ここで，F_{2m} は

$$F_{2m} = \{\pi \in S_{2m} : \pi(1) < \pi(3) < \cdots < \pi(2m-1),\ \pi(2i-1) < \pi(2i)\ (1 \le i \le m)\}$$

で与えられる $2m$ 次対称群 S_{2m} の部分集合である．また，$(N+1)$ 次交代行列 $A = (a_{ij})_{0 \le i,j \le N}$，$n \times (N+1)$ 行列 $T = (t_{ij})_{1 \le i \le n,\, 0 \le j \le N}$ と $[0,N] = \{0,1,\dots,N\}$ の n 元部分集合 $I = \{i_1,\dots,i_n\}$ $(i_1 < \cdots < i_n)$ に対して，

$$A(I) = \left(a_{i_p,i_q}\right)_{1 \le p,\, q \le n}, \quad T([n];I) = \left(t_{p,i_q}\right)_{1 \le p,\, q \le n}$$

と表す．さらに，n を正整数，m を非負整数とするとき，分割 $\lambda \subset (m^n)$ に対して，

$$I_n(\lambda) = \{\lambda_n, \lambda_{n-1}+1, \dots, \lambda_2+n-2, \lambda_1+n-1\}$$

とおく．このとき，対応 $\lambda \mapsto I_n(\lambda)$ は，(m^n) に含まれる分割と $[0,n+m-1]$ の n 元部分集合との間の全単射を与える．

定理 2.1 の主張は n の偶奇によらないが，次の補題により，その証明は n が偶数である場合に帰着できる．

補題 3.1. 分割 $\lambda \subset (m^n)$ に対して，

$$\left[x_1^m \operatorname{so}_{2n+1}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n; x_1,x_2,\dots,x_n)\right]\Big|_{x_1=0} = \begin{cases} \operatorname{so}_{2n-1}(\lambda_2,\dots,\lambda_n; x_2,\dots,x_n) & (\lambda_1 = m \text{ のとき}) \\ 0 & (\lambda_1 < m \text{ のとき}). \end{cases}$$

そこで，以下では n は偶数であると仮定する．

3.1　ステップ 1

定理 2.1 に現れる係数 $c_\lambda^{(m)}$ は次のようにある交代行列の部分パフィアンとして表される．

命題 3.2. n を正の偶数，m を非負整数とし，交代行列 $A=(a_{i,j})_{0\le i,j\le m+n-1}$ を

$$a_{i,j}=[m+n-j]_u\,[j-i]_u\,[i+1]_u \quad (0\le i<j\le m+n-1)$$

によって定める．このとき，分割 $\lambda\subset(m^n)$ に対応する A の部分パフィアンは

$$\operatorname{Pf} A(I_n(\lambda))=[m+n+1]_u^{n/2-1}\,c_\lambda^{(m)}(u)$$

で与えられる．

この命題は，次のより一般的な補題で

$$x_0=u^{m+n},\quad x_i=u^{\lambda_i+n-i}\quad(1\le i\le n),\quad x_{n+1}=u^{-1}$$

と特殊化することによって得られる．

補題 3.3. n を偶数，$x_0,x_1,\dots,x_n,x_{n+1}$ を変数とし，交代行列 $Z=(z_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ を

$$z_{i,j}=(x_0-x_i)(x_i-x_j)(x_j-x_{n+1})\quad(1\le i<j\le n)$$

によって定める．このとき，

$$\operatorname{Pf} Z=(x_0-x_{n+1})^{n/2-1}\prod_{i=0}^{n}(x_i-x_{i+1}).$$

証明. n に関する帰納法とパフィアン版 Desnanot–Jacobi の等式（例えば [3, 命題 2.5] を見よ）

$$\operatorname{Pf} A\cdot\operatorname{Pf} A^{i,j,k,l}=\operatorname{Pf} A^{i,j}\cdot\operatorname{Pf} A^{k,l}-\operatorname{Pf} A^{i,k}\cdot\operatorname{Pf} A^{j,l}+\operatorname{Pf} A^{i,l}\cdot\operatorname{Pf} A^{j,k}$$

（ここで，$A^{i,j}=A([n]\setminus\{i,j\})$, $A^{i,j,k,l}=A([n]\setminus\{i,j,k,l\})$ である）を用いればよい． □

3.2　ステップ 2

次の石川–若山の小行列の和公式を利用して，示すべき等式 (8), (9) の右辺の和を 1 つのパフィアンで表す．

定理 3.4. （石川–若山 [5, Theorem 1]）n を偶数とする．$(N+1)$ 次交代行列 $A=(a_{ij})_{0\le i,j\le N}$ と $n\times(N+1)$ 行列 $T=(t_{ij})_{1\le i\le n,\,0\le j\le N}$ に対して，

$$\sum_J \operatorname{Pf} A(J)\cdot\det T\,([n];J)=\operatorname{Pf}\left(TA\,{}^t T\right).$$

ここで，和は $[0,N]$ の n 元部分集合 J 全体にわたる．

定理 2.1 の証明では，石川–若山の小行列式の和公式を，命題 3.2 の交代行列 A と

$$T = T^A = \left(x_i^j\right)_{1\le i\le n,\,0\le j\le m+n-1}$$

あるいは

$$T = T_a^B = \left(x_i^{a+j+1/2} - x_i^{-(a+j+1/2)}\right)_{1\le i\le n,\,0\le j\le m+n-1}$$

（ただし，$m = 2r$，$a = s - r$ である）に対して適用する．このとき，Schur 関数，奇数次直交指標の定義 (1), (2) から，分割 $\lambda \subset (m^n)$ に対して

$$s_\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\Delta(\boldsymbol{x})} \det T^A([n]; I_n(\lambda)), \quad \mathrm{so}_{2n+1}(\lambda + (a^n); \boldsymbol{x}) = \frac{1}{\Delta^B(\boldsymbol{x})} \det T_a^B([n]; I_n(\lambda))$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned}
\Delta(\boldsymbol{x}) &= \det\left(x_i^{j-1}\right)_{1\le i,j\le n} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i), \\
\Delta^B(\boldsymbol{x}) &= \det\left(x_i^{j-1/2} - x_i^{-(j-1/2)}\right)_{1\le i,j\le n} \\
&= (-1)^{n(n+1)/2} \prod_{i=1}^n x_i^{-n+1/2} \prod_{i=1}^n (1 - x_i) \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)(1 - x_i x_j)
\end{aligned}$$

とおいた．よって，命題 3.2 と小行列式の和公式（定理 3.4）により，

$$\begin{aligned}
[m+n+1]_u^{n/2-1} \sum_{\lambda\subset(m^n)} c_\lambda^{(m)}(u)\, s_\lambda(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{\Delta(\boldsymbol{x})} \operatorname{Pf}\left(T^A\, A\, {}^t T^A\right), \\
[m+n+1]_u^{n/2-1} \sum_{\lambda\subset(m^n)} c_\lambda^{(m)}(u)\, \mathrm{so}_{\lambda+(a^n)}(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{\Delta^B(\boldsymbol{x})} \operatorname{Pf}\left(T_a^B\, A\, {}^t T_a^B\right)
\end{aligned}$$

となることがわかる．

次に，交代行列 $T^A\, A\, {}^tT^A$, $T_a^B\, A\, {}^tT_a^B$ の成分を具体的に計算する．変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$ に対して，n 次正方行列 $W^n(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{a})$ を

$$W^n(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{a}) = \left(x_i^{j-1} + a_i x_i^{n-j}\right)_{1\le i,j\le n} \tag{15}$$

とおいて定義する．すると，直接計算により次の補題を確かめることができる．

補題 3.5. 正整数 M に対して，

$$\begin{aligned}
&\sum_{0\le i<j\le M} [M+1-j]_u [j-i]_u [i+1]_u \det\begin{pmatrix} x^i & x^j \\ y^i & y^j \end{pmatrix} \\
&\quad = \frac{1}{u^{(M-1)/2}(1-x)(1-y)(1-u)(u-x)(u-y)(1-ux)(1-uy)} \\
&\qquad\qquad \times \frac{\det W^3(x, y, u; -x^{M+2}, -y^{M+2}, -u^{M+2})}{1 - xy},
\end{aligned}$$

$$
\sum_{0\le i<j\le M} [M{+}1{-}j]_u[j{-}i]_u[i{+}1]_u \,\det\begin{pmatrix} x^{i+1/2+a}-x^{-(i+1/2+a)} & x^{j+1/2+a}-x^{-(j+1/2+a)} \\ y^{i+1/2+a}-y^{-(i+1/2+a)} & y^{j+1/2+a}-y^{-(j+1/2+a)} \end{pmatrix}
$$
$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{u^{(M-1)/2}x^{M+1/2+a}y^{M+1/2+a}(1-x)(1-y)(1-u)(u-x)(u-y)(1-ux)(1-uy)} \\
&\quad \times \frac{\det W^2(x,y;-x^{M+1+2a},-y^{M+1+2a})\det W^3(x,y,u;-x^{M+2},-y^{M+2},-u^{M+2})}{(y-x)(1-xy)}.
\end{aligned}
$$

以上をまとめると，定理 2.1 (8), (9) の右辺を次のように 1 つのパフィアンで表すことができる．

命題 3.6. 正の偶数 n と非負整数 m に対して，

$$
\begin{aligned}
&[m+n+1]_u^{n/2-1}\sum_{\lambda\subset(m^n)} c_\lambda^{(m)}(u)\, s_\lambda(\boldsymbol{x}) \\
&\qquad = \frac{1}{\Delta(\boldsymbol{x})}\frac{1}{u^{(m+n-2)/2\cdot n/2}(1-u)^{n/2-1}\prod_{i=1}^n(1-x_i)(u-x_i)(1-x_iu)} \\
&\qquad\quad \times \mathrm{Pf}\left(\frac{\det W^3(x_i,x_j,u;-x_i^{m+n+1},-x_j^{m+n+1},-u^{m+n+1})}{1-x_ix_j}\right)_{1\le i,j\le n}, \qquad (16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[m+n+1]_u^{n/2-1}\sum_{\lambda\subset(m^n)} c_\lambda(u)\, \mathrm{so}_{2n+1}(\lambda;\boldsymbol{x}) \\
&= \frac{1}{\Delta^B(\boldsymbol{x})}\frac{(-1)^{n/2}}{u^{(m+n-2)/2\cdot n/2}(1-u)^{n/2-1}\prod_{i=1}^n x_i^{m+n-1/2+a}\prod_{i=1}^n(1-x_i)(u-x_i)(1-x_iu)} \\
&\quad \times \mathrm{Pf}\left(\frac{\begin{array}{c}\det W^2(x_i,x_j;-x_i^{m+n+2a},-x_j^{m+n+2a}) \\ \times\det W^3(x_i,x_j,u;-x_i^{m+n+1},-x_j^{m+n+1},-u^{m+n+1})\end{array}}{(x_j-x_i)(1-x_ix_j)}\right)_{1\le i,j\le n}. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

3.3 ステップ 3

最後に，命題 3.6 (16), (17) の右辺に現れたパフィアンを行列式の形に書き換え，奇数次直交指標を用いて表示する．そのために次の定理を用いる．

定理 3.7. （石川–岡田–田川–Zeng [4, Theorem 1.1 (d)]）n を正の偶数とし，p, q を非負整数とする．変数

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n),\quad \boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_n),\quad \boldsymbol{b}=(b_1,\dots,b_n), \\
\boldsymbol{z}=(z_1,\dots,z_p),\quad \boldsymbol{c}=(c_1,\dots,c_p),\quad \boldsymbol{w}=(w_1,\dots,w_q),\quad \boldsymbol{d}=(d_1,\dots,d_q),
\end{gathered}
$$

に対して，

$$
\mathrm{Pf}\left(\frac{\det W^{p+2}(x_i,x_j,\boldsymbol{z};a_i,a_j,\boldsymbol{c})\det W^{q+2}(x_i,x_j,\boldsymbol{w};b_i,b_j,\boldsymbol{d})}{(x_j-x_i)(1-x_ix_j)}\right)_{1\le i,j\le n}
$$

$$= \frac{1}{\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)(1-x_ix_j)} \det W^p(\boldsymbol{z};\boldsymbol{c})^{n/2-1} \det W^q(\boldsymbol{w};\boldsymbol{d})^{n/2-1}$$
$$\times \det W^{n+p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z};\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) \det W^{n+q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w};\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}).$$

特に，$p=0$, $q=1$ の場合を考えると，

$$\operatorname{Pf}\left(\frac{\det W^2(x_i,x_j;a_i,a_j)\det W^3(x_i,x_j,w;b_i,b_j,d)}{(x_j-x_i)(1-x_ix_j)}\right)_{1\le i,j\le n}$$
$$= \frac{1}{\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)(1-x_ix_j)} \det W^1(w;d)^{n/2-1} \det W^n(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a}) \det W^{n+1}(\boldsymbol{x},w;\boldsymbol{b},d). \tag{18}$$

さらに，$a_1=\cdots=a_n=0$ を代入すると，$\det W^n(\boldsymbol{x};0)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$ だから，

$$\operatorname{Pf}\left(\frac{\det W^3(x_i,x_j,w;b_i,b_j,d)}{1-x_ix_j}\right)_{1\le i,j\le n}$$
$$= \frac{1}{\prod_{1\le i<j\le n}(1-x_ix_j)} \det W^1(w;d)^{n/2-1} \det W^{n+1}(\boldsymbol{x},w;\boldsymbol{b},d). \tag{19}$$

以上を用いると，定理 2.1 の証明を完成させることができる．

定理 2.1 の証明． 奇数次直交指標の定義 (2) と行列 $W^n(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a})$ の定義 (15) を比較すると，

$$\det W^n(\boldsymbol{x};-\boldsymbol{x}^{2r+n}) = \prod_{i=1}^n x_i^r \prod_{i=1}^n (1-x_i) \prod_{1\le i<j\le n} (x_j-x_i)(1-x_ix_j)\cdot \mathrm{so}_{2n+1}((r^n);\boldsymbol{x})$$

と表されることがわかる．ここで，$-\boldsymbol{x}^{2r+n}=(-x_1^{2r+n},\dots,-x_n^{2r+n})$ である．また，

$$[m+n+1]_u = u^{-(m+n)/2}\cdot\frac{\det W^1(u;-u^{m+n+1})}{1-u}.$$

である．これらの関係式に注意すると，(a) は，(19) において $b_i=-x_i^{n+2r+1}$ $(1\le i\le n)$, $w=u$, $d=-u^{n+2r+1}$ と特殊化したものを用いて，(16) の右辺を書き直すことによって得られる．また，(b) は，(18) において $a_i=-x_i^{n+2s}$, $b_i=-x_i^{n+2r+1}$ $(1\le i\le n)$, $w=u$, $d=-u^{n+2r+1}$ と特殊化したものを用いて，(17) の右辺を変形することによって得られる． □

4 関連する結果

最後に，関連する結果をいくつか紹介する．

本稿では，奇数次直交指標の場合を扱ったが，斜交指標など他の古典型 Lie 代数の概長方形型指標についても同様の結果が得られる．長さ n 以下の分割 λ に対して，

$$\mathrm{sp}_{2n}(\lambda;\boldsymbol{x}) = \frac{\det\left(x_i^{\lambda_j+n+1-j}-x_i^{-(\lambda_j+n+1-j)}\right)_{1\le i,j\le n}}{\det\left(x_i^{n+1-j}-x_i^{-(n+1-j)}\right)_{1\le i,j\le n}}$$

とおき，**斜交指標** (symplectic character) と呼ぶ．斜交指標 $\mathrm{sp}_{2n}(\lambda;\boldsymbol{x})$ は，斜交 Lie 代数 $\mathfrak{sp}_{2n}=\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ の $\lambda_1\varepsilon_1+\cdots+\lambda_n\varepsilon_n$ を最高ウェイトとする既約表現 $V_{\mathfrak{sp}_{2n}}(\lambda)$ の指標である．非負整数 a, b（ただし $a\geq b$ とする）に対して

$$\langle a,b\rangle_u=\begin{cases}[(a-b+2)/2]_{u^2} & (a,\,b\text{ がともに偶数であるとき})\\ [(a-b+1)/2]_{u^2} & (a,\,b\text{ の一方が偶数，他方が奇数であるとき})\\ [(a-b)/2]_{u^2} & (a,\,b\text{ がともに奇数であるとき})\end{cases}$$

とおき，分割 $\lambda\subset(m^n)$ に対して

$$d_\lambda^{(m)}(u)=\langle m,\lambda_1\rangle_u\,\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle_u\cdots\langle\lambda_{n-1},\lambda_n\rangle_u\langle\lambda_n,0\rangle_u$$

と定義する．このとき，

定理 4.1. (a) 非負整数 r に対して，

$$\mathrm{sp}_{2n+2}((r^{n+1});x_1,\dots,x_n,u)=(x_1\cdots x_n)^{-r}\sum_{\lambda\subset((2r)^n)}d_\lambda^{(2r)}(u)\,s_\lambda(x_1,\dots,x_n).$$

(b) 非負整数 r, s（ただし $r\leq s$ とする）に対して，

$$\begin{aligned}&\mathrm{sp}_{2n+2}((r^{n+1});x_1,\dots,x_n,u)\cdot\mathrm{sp}_{2n}((s^n);x_1,\dots,x_n)\\&\qquad=\sum_{\lambda\subset((2r)^n)}d_\lambda^{(2r)}(u)\,\mathrm{sp}_{2n}(\lambda+(s-r)^n;x_1,\dots,x_n).\end{aligned}$$

偶数 $m=2r$ と分割 $\lambda\subset(r^n)$ に対して，

$$d_\lambda^{(2r)}(u)=\sum_{p=0}^{r}d_{\lambda,p}^{(2r)}\,[r-p+1]_{u^2}$$

と展開して，係数 $d_{\lambda,p}^{(2r)}\in\mathbb{Z}$ を定義する．このとき，

系 4.2. (a) 非負整数 r と $p\leq r$ となる非負整数 p に対して，

$$\mathrm{sp}_{2n}((r^{n-1},r-p);\boldsymbol{x})=(x_1\cdots x_n)^{-r}\cdot\sum_{\lambda\subset((2r)^n)}d_{\lambda,p}^{(2r)}\,s_\lambda(\boldsymbol{x}).$$

(b) 非負整数 r, s（ただし $r\leq s$）と $p\leq r$ となる非負整数 p に対して，

$$\mathrm{sp}_{2n}((r^{n-1},r-p);\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{sp}_{2n}(s^n;\boldsymbol{x})=\sum_{\lambda\subset((2r)^n)}d_{\lambda,p}^{(2r)}\,\mathrm{sp}_{2n}(\lambda+(s-r)^n;\boldsymbol{x}).$$

(c) 係数 $d_{\lambda,p}^{(2r)}$ は，次の 4 条件 (i), (ii), (iii), (iv) をみたす長さ $n+1$ 以下の分割 μ の個数に等しい：

(i) μ/λ は水平帯である．

(ii) $|\mu|-|\lambda|=2r-p$.

(iii) $\mu_1,\dots,\mu_{n+1}$ はすべて偶数である．

(iv) $\mu_1 = 2r$ であり，

$$\mu_1 + 2\mu_2 + \cdots + 2\mu_{i-1} + \mu_i \geq 2\lambda_1 + \cdots + 2\lambda_{i-1} \quad (2 \leq i \leq n+1).$$

注意. Krattenthaler [7] は，その論文の Remark 2, 3 において Theorem 2, 3 の議論を修正することで系 4.2 の場合の公式を導くことができると書いているが，具体的な公式自体は与えていない．

第 2 節では，主定理（定理 2.1）の帰結として (12) 式で，概長方形型既約指標を部分代数に制限したときの重複度とテンソル積の分解における重複度が一致することを見た．この重複度の一致は，次のようにより一般の分割に対しても成り立つ．

定理 4.3. (1) 非負整数あるいは正の半整数 r と，$\mu_1 \leq r$ となる分割あるいは半整数分割 μ が与えられたとき，長さ n 以下の任意の分割 λ に対して，

$$\begin{aligned}\Big[V_{\mathfrak{gl}_n}((r^n)) \otimes \operatorname{Res}^{\mathfrak{so}_{2n+1}}_{\mathfrak{gl}_n} V_{\mathfrak{so}_{2n+1}}(\mu) : V_{\mathfrak{gl}_n}(\lambda)\Big]_{\mathfrak{gl}_n} \\ = \Big[V_{\mathfrak{so}_{2n+1}}((r^n)) \otimes V_{\mathfrak{so}_{2n+1}}(\mu) : V_{\mathfrak{so}_{2n+1}}(\lambda)\Big]_{\mathfrak{so}_{2n+1}}.\end{aligned}$$

(2) 非負整数 r と，$\mu_1 \leq r$ となる分割 μ が与えられたとき，長さ n 以下の任意の分割 λ に対して，

$$\begin{aligned}\Big[V_{\mathfrak{gl}_n}((r^n)) \otimes \operatorname{Res}^{\mathfrak{sp}_{2n}}_{\mathfrak{gl}_n} V_{\mathfrak{sp}_{2n}}(\mu) : V_{\mathfrak{gl}_n}(\lambda)\Big]_{\mathfrak{gl}_n} \\ = \Big[V_{\mathfrak{sp}_{2n}}((r^n)) \otimes V_{\mathfrak{sp}_{2n}}(\mu) : V_{\mathfrak{sp}_{2n}}(\lambda)\Big]_{\mathfrak{sp}_{2n}}.\end{aligned}$$

この定理の小行列式の和公式を用いた証明は，重複度のある種の母関数が共通のパフィアンで表されることを示すことによってなされる．なお，この定理は，Littelmann [8, Decomopsition rule, Branching rule] が与えた Lakshmibai–Seshadri paths による重複度の公式からも容易に従う．また，King らの結果 [6, (3.7)], [1, (6.9)] を用いて証明することもできる．

小行列式の和公式を用いた手法は，直接表現論と関係しない場合にも適用できる．つまり，異なる系列に属する古典型 Lie 代数の既約指標を変数 $x_1, \ldots, x_n$ に関する対称な Laurent 多項式とみて，その積を分解する公式を与えることができる．例えば，次のような定理を証明することができる．

定理 4.4. 整数 r, s（ただし $0 < r \leq s$）に対して，

$$\begin{aligned}&\mathrm{o}_{2n+2}((r^{n+1}); x_1, \ldots, x_n, u) \cdot \mathrm{sp}_{2n}((s^n); x_1, \ldots, x_n) \\ &\qquad = \sum_{\lambda \subset ((2r)^n)} \left(u^{r-c(\lambda)} + u^{-r+c(\lambda)}\right) \mathrm{sp}_{2n}(\lambda + (s-r)^n; x_1, \ldots, x_n),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{sp}_{2n+2}(((r-1)^{n+1}); x_1, \ldots, x_n, u) \cdot \mathrm{o}_{2n}(((s+1)^n); x_1, \ldots, x_n) \cdot (u - u^{-1}) \\ &\qquad = (-1)^n \sum_{\lambda \subset ((2r)^n)} \left(u^{r-c(\lambda)} - u^{-r+c(\lambda)}\right) \mathrm{sp}_{2n}(\lambda + (s-r)^n; x_1, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{o}_{2n}(\lambda;\boldsymbol{x})$ は

$$\mathrm{o}_{2n}(\lambda;\boldsymbol{x}) = \frac{\det\left(x_i^{\lambda_j+n-j} + x_i^{-(\lambda_j+n-j)}\right)_{1\le i,j\le n}}{\det\left(x_i^{n-j} + x_i^{-(n-j)}\right)_{1\le i,j\le n}} \times \begin{cases} 2 & （\lambda_n > 0 \text{ のとき}） \\ 1 & （\lambda_n = 0 \text{ のとき}） \end{cases}$$

によって与えられる偶数次直交指標であり，$c(\lambda)$ は λ の Young 図形における長さ奇数の列の個数である．

この定理は，台形の枠 $(2n, 2n-2, \ldots, 4, 2)$ をもつある種の変形平面分割の数え上げ問題に応用できる．

参考文献

[1] G. R. E. Black, R. C. King, and B. G. Wybourne, Kronecker products for compact semisimple Lie groups, J. Phys. A **16** (1983), 1555–1589.

[2] J. Hong and S.-J. Kang, “Introduction to Quantum Groups and Crystal Bases”, Grad. Stud. Math. **42**, Amer. Math. Soc., 2002

[3] 石川 雅雄，岡田 聡一，行列式・パフィアンに関する等式とその表現論，組合せ論への応用，数学 **62** (2010), 85–114.

[4] M. Ishikawa, S. Okada, H. Tagawa and J. Zeng, Generalizations of Cauchy’s determinant and Schur’s Pfaffian, Adv. in Appl. Math. **36** (2006), 251–287.

[5] M. Ishikawa and M. Wakayama, Minor summation formula of Pfaffians, Linear and Multilinear Algebra, **39** (1995), 285–305.

[6] R. C. King, Kronecker products of representations of exceptional Lie groups, J. Phys. A **14** (1981) 77–83.

[7] C. Krattenthaler, Identities for classical group characters of nearly rectangular shape, J. Algebra **209** (1998), 1–64.

[8] P. Littelmann, A Littlewood–Richardson rule for symmetrizable Kae–Moody algebras, Invent. Math. **116** (1994), 329–346.

[9] I. G. Macdonald, “Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd ed.”, Oxford Univ. Press, 1995.

[10] S. Okada, Applications of minor summation formulas to rectangular-shaped representations of classical group, J. Algebra **205** (1998), 337–367.

[11] S. Okada, Intermediate symplectic characters and shifted plane partitions of shifted double staircase shape, Combinatorial Theory **1** (2021), # 10.

[12] R. A. Proctor, Shifted plane partitions of trapezoidal shape, Proc. Amer. Math. Soc. **89** (1983), 553–559.

[13] R. A. Proctor, New symmetric plane partition identities from invariant theory work of De Concini and Procesi, European J. Combin. **11** (1990), 289–300.