QUASI-SPLIT $\imath$CRYSTALS: DEFINITION AND APPLICATIONS

大阪市立大学　渡邉英也
HIDEYA WATANABE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, OSAKA CITY UNIVERSITY

1. 概要

$\imath$ 量子群とは、量子対称対の理論で現れる、量子群の余イデアル部分代数である。以下で説明する通り、$\imath$ 量子群は量子群の一般化であるとみなせる。事実、普遍 R 行列や標準基底の理論など、量子群に関する様々な重要な結果が $\imath$ 量子群にまで一般化されている。

本稿では、量子群の表現論における重要な対象である結晶基底を $\imath$ 量子群へ一般化した $\imath$ 結晶の定義と、その応用として $\imath$ 標準基底の新しい構成法と、直交群の有限次元表現の新しいタブロー模型を紹介する。

2. 量子群

本稿の主役である $\imath$ 量子群を導入する準備として量子群に関する記号を確認しておく。以下、本稿を通して Dynkin 図形 I をひとつ固定する。さらに、余ルート格子 $Y = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} h_i$ とウェイト格子 $X = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \varpi_i$ 及び perfect pairing $\langle \cdot, \cdot \rangle : Y \times X \to \mathbb{Z}$; $(h_i, \varpi_j) \mapsto \delta_{i,j}$ をとる。

Dynkin 図形 I に付随する量子群と Chevalley 生成元をそれぞれ $\mathbf{U} = \mathbf{U}(I)$, E_i, F_i $(i \in I)$, K_h $(h \in Y)$ と書く。余積 $\Delta : \mathbf{U} \to \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}$ は、いわゆる Lusztig のものとする:

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \quad \Delta(F_i) = 1 \otimes F_i + F_i \otimes K_i^{-1}, \quad \Delta(K_h) = K_h \otimes K_h.$$

量子群 $\mathbf{U}$ は、以下で定義される反代数自己同型写像 $\wp$ をもつ:

$$\wp(E_i) = q_i^{-1} F_i K_i, \quad \wp(F_i) = q_i^{-1} E_i K_i^{-1}, \quad \wp(K_h) = K_h.$$

後で $\imath$ 量子群の bar-involution も出てくるため、量子群の bar-involution は ψ で表すことにする:

$$\psi(E_i) = E_i, \quad \psi(F_i) = F_i, \quad \psi(K_h) = K_{-h}.$$

量子群の負部分 $\mathbf{U}^-$ の標準基底と結晶基底をそれぞれ $\mathbf{B}(\infty)$, $\mathcal{B}(\infty)$ と書く。また、$\mathcal{B}(\infty)$ の最高ウェイト元を b_∞ と書く。

変形量子群 $\dot{\mathbf{U}} = \bigoplus_{\lambda \in X} \dot{\mathbf{U}} \mathbf{1}_\lambda$ の標準基底、結晶基底をそれぞれ $\dot{\mathbf{B}}$, $\dot{\mathcal{B}}$ と書く。

優整ウェイト $\lambda \in X^+$ を最高ウェイトとする $\mathbf{U}$ の既約表現を $V(\lambda)$ と書く。また、$V(\lambda)$ の標準基底、結晶基底をそれぞれ $\mathbf{B}(\lambda)$, $\mathcal{B}(\lambda)$ と書き、$\mathcal{B}(\lambda)$ の最高ウェイト元を b_λ と書く。

$\mathbf{U}^-$-加群の全射 $\mathbf{U}^- \to V(\lambda)$; $1 \mapsto v_\lambda$ は、結晶の射 $\pi = \pi_\lambda : \mathcal{B}(\infty) \to \mathcal{B}(\lambda)$ を誘導する。各 $\lambda, \mu \in X^+$ に対し、

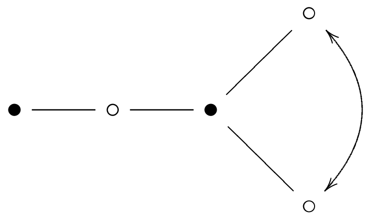
$$\mathcal{B}(\lambda; \mu) := \{\pi_\lambda(b) \mid b \in \mathcal{B}(\infty) \text{ such that } \pi_\mu(\infty) \neq 0\} \setminus \{0\}$$

とおく。

Key words and phrases. $\imath$quantum group, quantum symmetric pair, $\imath$crystal.

3. $\imath$ 量子群

量子群が Dynkin 図形で表されるように、$\imath$ 量子群は 佐武図形 $(I, I_\bullet, \tau)$ といくつかのパラメータ $\boldsymbol{\varsigma} = (\varsigma_i)_{i \in I_\circ} \in (\mathbb{Q}(q)^\times)^{I_\circ}$, $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_i)_{i \in I_\circ} \in \mathbb{Q}(q)^\times$ で表される。ここで、$I_\circ := I \backslash I_\bullet$ である。正確な定義は割愛するが、$I_\bullet$ は Dynkin 図形 I の部分図形で、それ自身が有限型の Dynkin 図形になっているもの、τ は I の自己同型写像で $\tau^2 = \mathrm{id}$ を満たすものである。佐武図形は、Dynkin 図形を、$I_\bullet$ に含まれる頂点を黒く塗り潰し、$\tau(i) \neq i$ なる頂点 $i, \tau(i)$ を両側矢印で結ぶことで表される:



Dynkin 図形 I の自己同型写像 τ は、余ウェイト格子 Y とウェイト格子 X 上に、次のような自己同型写像 τ を誘導すると仮定する:

- $\tau(h_i) = h_{\tau(i)}$.
- $\tau(\alpha_i) = \alpha_{\tau(i)}$.
- $\langle \tau(h), \tau(\lambda) \rangle = \langle h, \lambda \rangle$.

この仮定は、I が有限型のときは自動的に満たされている。

以下、$I_\bullet = \emptyset$ とし、佐武図形は (I, τ) と略記する。佐武図形 (I, τ) とパラメータ $\boldsymbol{\varsigma}$, $\boldsymbol{\kappa}$ に付随する $\imath$ 量子群 $\mathbf{U}^\imath = \mathbf{U}^\imath(I, \tau)_{\boldsymbol{\varsigma}, \boldsymbol{\kappa}}$ とは、量子群 $\mathbf{U}$ の部分代数で、以下の元で生成されるものである:

- $B_i := F_i + \varsigma_i E_{\tau(i)} K_i^{-1}$, $i \in I$.
- K_h, $h \in Y^\imath := \{h \in Y \mid \tau(h) = -h\}$.

Example 3.1. $I = I_1 \sqcup I_2$ と分解し、$\tau \in \mathrm{Aut}(I)$ が同型写像 $\tau : I_1 \to I_2$ を誘導するとき、佐武図形 (I, τ) は対角型であるという。パラメータ $\boldsymbol{\varsigma}, \boldsymbol{\kappa}$ を $\varsigma_i = 1$, $\kappa_i = 0$ ととり、量子群 $\mathbf{U}$ を適切に $\mathbf{U}(I_2) \otimes \mathbf{U}(I_2)$ と同一視すると、$\imath$ 量子群 $\mathbf{U}^\imath$ は $\Delta(\mathbf{U}(I_2))$ に一致する。つまり、代数としては $\mathbf{U}^\imath$ は $\mathbf{U}(I_2)$ に同型である。この意味で、量子群は対角型 $\imath$ 量子群であると言える。

$\imath$ 量子群は、bar-involution $\psi^\imath$ をもつ：

$$\psi^\imath(B_i) = B_i, \quad \psi^\imath(K_h) = K_{-h}.$$

定義より直ちにわかることだが、$\psi^\imath$ は、量子群の bar-involution ψ の $\mathbf{U}^\imath$ への制限ではない。対角型のときは、$\psi^\imath$ は $\mathbf{U}(I_2)$ 上の bar-involution ψ_{I_2} (と余積 Δ の合成) であり、ψ は $\psi_{I_2} \otimes \psi_{I_2}$ である。

$X^\imath := X / \{\lambda + \tau(\lambda) \mid \lambda \in X\}$ とおき、商写像を $\overline{\cdot} : X \to X^\imath$ と書く。

4. $\imath$ 標準基底

優整ウェイト $\lambda, \nu \in X^+$ に対し、最高ウェイト表現 $V(\lambda + \nu + \tau(\nu)), V(\lambda)$ を考える。このとき、最高ウェイトベクトル $v_{\lambda+\nu+\tau(\nu)}$ を v_λ に送る $\mathbf{U}^\imath$-準同型写像 $\pi = \pi_{\lambda,\nu} : V(\lambda + \nu + \tau(\nu)) \to V(\lambda)$ が存在する。従って、射影系 $\{V(\lambda + \nu + \tau(\nu))\}_{\nu \in X^+}$ が存在する。Bao-Wang の $\imath$ 標準基底の理論は、この射影系が漸近的極限をもつことを主張する:

Theorem 4.1 ([1, 2])**.** $\zeta \in X^\imath$, $b \in \mathcal{B}(\infty)$ とする。このとき、$\overline{\lambda} = \zeta$ なる十分優な任意の $\lambda \in X^+$ に対し

$$G^\imath_\zeta(b) v_\lambda = G^\imath(\pi_\lambda(b))$$

を満たすような $G^\imath_\zeta(b) \in \dot{\mathbf{U}}^\imath \mathbf{1}_\zeta$ が唯一つ存在する。さらに、$\dot{\mathbf{B}}^\imath := \{G^\imath_\zeta(b) \mid \zeta \in X^\imath,\ b \in \mathcal{B}(\infty)\}$ は $\dot{\mathbf{U}}^\imath$ の、$\psi^\imath$ で不変な基底をなす。

この基底 $\dot{\mathbf{B}}^\imath$ は $\imath$ 標準基底と呼ばれている。対角型の場合は、変形 $\imath$ 量子群の $\imath$ 標準基底は、変形量子群の標準基底に他ならない。

5. $\imath$ 結晶

天下り的であるが、$\imath$ 結晶という概念を次のように定義する。

Definition 5.1. $\imath$ 結晶とは、集合 $\mathcal{B}$ であって、以下の構造

- $\mathrm{wt}^\imath : \mathcal{B} \to X^\imath$
- $\beta_i : \mathcal{B} \to \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty, -\infty_{\mathrm{ev}}, -\infty_{\mathrm{odd}}\}$
- $\widetilde{B}_i \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\overline{\mathcal{L}})$ $(\overline{\mathcal{L}} := \mathbb{C}\mathcal{B})$.

を持ち、次の公理を満たすものである： $i \in I,\ b, b' \in \mathcal{B}$ とし、$(\cdot,\cdot)$ は $\mathcal{B}$ を正規直交基底とする $\overline{\mathcal{L}}$ のエルミート内積とする。

(1) $\beta_i(b) \notin \mathbb{Z}$ ならば $\widetilde{B}_i b = 0$.
(2) $(\widetilde{B}_i b, b') \neq 0$ ならば $\mathrm{wt}^\imath(b') = \mathrm{wt}^\imath(b) - \overline{\alpha_i}$.
(3) $(\widetilde{B}_i b, b') \neq 0$ ならば $(\widetilde{B}_i b, b') = (b, \widetilde{B}_{\tau(i)} b')$.
(4) $\widetilde{B}_i b \in \mathcal{B}$ ならば $\widetilde{B}_{\tau(i)} \widetilde{B}_i b = b$.
(5) $a_{i,\tau(i)} = 2$ ならば
 (a) $\beta_i(b) \in \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty_{\mathrm{ev}}, -\infty_{\mathrm{odd}}\}$.
 (b) $\overline{\beta_i(b) + s_i} = \mathrm{wt}^\imath_i(b)$.
 (c) $(\widetilde{B}_i b, b') \neq 0$ ならば $\beta_i(b') = \beta_i(b)$.
(6) $a_{i,\tau(i)} = 0$ ならば
 (a) $\beta_i(b) \in \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}$.
 (b) $\beta_i(b) = \beta_{\tau(i)}(b) + \mathrm{wt}^\imath_i(b)$. ただし、$\mathrm{wt}^\imath_i(b) := \langle h_i - h_{\tau(i)}, \mathrm{wt}^\imath(b) \rangle$.
 (c) $(\widetilde{B}_i b, b') \neq 0$ ならば $b' = \widetilde{B}_i b$ かつ $\beta_i(b') = \beta_i(b) - 1$.
(7) $a_{i,\tau(i)} = -1$ ならば
 (a) $\beta_i(b) \in \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}$.
 (b) $\beta_i(b) = \beta_{\tau(i)}(b) + \mathrm{wt}^\imath_i(b) - s_i$ または $\beta_i(b) = \beta_{\tau(i)}(b) + \mathrm{wt}^\imath_i(b) - s_i + 1$. ただし、$\mathrm{wt}^\imath_i(b) := \langle h_i - h_{\tau(i)}, \mathrm{wt}^\imath(b) \rangle$.
 (c) $\beta_i(b) \neq \beta_{\tau(i)}(b) + \mathrm{wt}^\imath_i(b) - s_i$ かつ $(\widetilde{B}_i b, b') \neq 0$ ならば $b' = \widetilde{B}_i b$ かつ $\beta_i(b') \neq \beta_{\tau(i)}(b') + \mathrm{wt}^\imath_i(b') - s_i$.
 (d) $(\widetilde{B}_i b, b') \neq 0$ かつ $\beta_i(b') \neq \beta_{\tau(i)}(b') + \mathrm{wt}^\imath_i(b') - s_i$ ならば $\beta_i(b') = \beta_i(b) - 1$.

公理 (5)–(7) で、頂点 $i \in I$ が 3 種類に場合分けされているのは、Dynkin 図形の頂点は全て等価 (A_1 型) であるのに対し、佐竹図形の頂点は AI 型 ($a_{i,\tau(i)} = 2$)、AIII 型 ($a_{i,\tau(i)} = 0$)、AIV 型 ($a_{i,\tau(i)} = -1$) の 3 種類があるためである。

$\imath$ 結晶は、通常の結晶の自然な一般化であり、その公理系は、通常の結晶と同様に、$\imath$ 量子群の表現論から来ている。対角型の場合は、$\imath$ 標準基底は結晶基底に他ならない。

通常の結晶のテンソル積則のように、$\imath$ 結晶 $\mathcal{B}_1$ と結晶 $\mathcal{B}_2$ の直積 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ に $\imath$ 結晶の構造を入れることができる。これは、$\imath$ 量子群が右余イデアルであることを反映している。このテンソル積則を、特に $\mathcal{B}_1$ が「自明な $\imath$ 結晶」である場合に適用すると、$\imath$ 結晶 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ は集合としては $\mathcal{B}_2$ と同一視できる。このようにして、結晶 $\imath$ 結晶の構造をもつ。これは、$\imath$ 量子群が量子群の部分代数であることを反映している。対角型の場合は、結晶に $\imath$ 結晶の構造を入れることは、結晶のテンソル積則に他ならない。

6. $\imath$ 標準基底と $\imath$ 結晶基底

$\imath$ 結晶を用いると、$\imath$ 標準基底をより自然に構成することができる。

Theorem 6.1 ([4])**.** 以下を満たすような $\sigma \in X^+$ が存在する：

(1) 任意の $\lambda \in X^+$ に対し、$\mathcal{B}(\lambda+\sigma)$ の部分集合 $\mathcal{B}(\lambda+\sigma;\lambda)$ は部分 $\imath$ 結晶をなす。これを $\mathcal{B}(\lambda)^\sigma$ と書く。
(2) 任意の $\lambda, \nu \in X^+$ に対し、$\imath$ 結晶の射 $\mathcal{B}(\lambda+\nu+\tau(\nu))^\sigma \to \mathcal{B}(\lambda)^\sigma$ が存在する。従って、$\zeta \in X^\imath$ でパラメータ付けられる射影系 $\{\mathcal{B}(\lambda)^\sigma\}_{\overline{\lambda+\sigma}=\zeta}$ の族が得られる。
(3) 射影系 $\{\mathcal{B}(\lambda)^\sigma\}_{\overline{\lambda+\sigma}=\zeta}$ は、射影極限をもち、それは $\mathcal{T}_\zeta \otimes \mathcal{B}(\infty)$ に同型である。ここで、$\mathcal{T}_\zeta$ は、*1* 元からなるある $\imath$ 結晶である。
(4) 任意の $\lambda \in X^+$ に対し、$V(\lambda+\sigma)$ の部分 $\mathbf{U}^\imath$-加群で、$\imath$ 標準基底を持ち、その $q \to \infty$ 極限が $\mathcal{B}(\lambda+\sigma;\lambda)$ であるものが存在する。これを $V(\lambda)^\sigma$ と書く。
(5) 任意の $\lambda, \nu \in X^+$ に対し、$\mathbf{U}^\imath$-加群の射 $V(\lambda+\nu+\tau(\nu))^\sigma \to V(\lambda)^\sigma$ であって、$\imath$ 標準基底を保つものが存在する。従って、$\zeta \in X^\imath$ でパラメータ付けられる射影系 $\{V(\lambda)^\sigma\}_{\overline{\lambda+\sigma}=\zeta}$ の族が得られる。
(6) 射影系 $\{V(\lambda)^\sigma\}_{\overline{\lambda+\sigma}=\zeta}$ は、射影極限をもち、それは $\dot{\mathbf{U}}^\imath\mathbf{1}_\zeta$ に同型である。

この定理から、$\imath$ 結晶 $\bigsqcup_{\zeta\in X^\imath} \mathcal{T}_\zeta \otimes \mathcal{B}(\infty)$ を、変形 $\imath$ 量子群 $\dot{\mathbf{U}}^\imath$ の結晶基底と呼ぶのが妥当である。対角型の場合は、変形 $\imath$ 量子群の結晶基底は、変形量子群の結晶基底 $\dot{\mathcal{B}}$ に他ならない。

7. 既約 O_n-加群のタブロー模型

$\imath$ 結晶の応用として、直交群 O_n の有限次元既約表現の新しい組合せ論的模型を紹介する。

Dynkin 図形 I が A_{n-1} 型で、$\tau = \mathrm{id}$ の場合の佐竹図形と、パラメータ $\boldsymbol{\varsigma} = (q^{-1})_{i\in I}$, $\boldsymbol{\kappa} = (0)_{i\in I}$ に付随する $\imath$ 量子群を考える。この場合、古典極限を取ると $\mathbf{U}, \mathbf{U}^\imath$ はそれぞれ $\mathfrak{sl}_n$, $\mathfrak{so}_n$ の普遍包絡代数になる。従って (これは正確な主張ではないが)、$\mathbf{U}$ の有限次元表現の結晶基底を $\imath$ 結晶とみなしたものの「既約成分」は、$\mathfrak{so}_n$ の既約表現の組合せ論的模型になる。よく知られている通り、$\mathbf{U}$ の有限次元表現の結晶基底は半標準盤で実現される。この実現の下で、$\imath$ 結晶としての「既約成分」は次にように記述される：

Definition 7.1. $m := \mathrm{rank}\, \mathfrak{so}_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{if } n \text{ is even,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$ とおく。長さ m 以下の分割 ρ に対し

$$\mathrm{SST}_n^{\mathrm{AI}}(\rho) := \{T \in \mathrm{SST}_n(\rho) \mid t^c_{1,j} \leq t_{2,j} \text{ for all } j = 1,2,\dots,d_2\}$$

と定める。ここで、$\mathrm{SST}_n(\rho)$ は、型 ρ、文字 $\{1,2,\dots,n\}$ の半標準の集合であり、$T \in \mathrm{SST}_n(\rho)$ に対し、$t_{i,j}$ は T の第 (i,j) 成分、d_j は T の第 j 列の長さ、$\{t^c_{1,1}, t^c_{1,2}, \dots, t^c_{1,d_1}\} := \{1,2,\dots,n\} \setminus \{t_{1,1}, t_{1,2}, \dots, t_{1,d_1}\}$ である。

Theorem 7.2 ([3])**.** λ を、長さ n 以下の分割とする。結晶基底 $\mathrm{SST}_n(\lambda)$ は、$\imath$ 結晶として $\mathrm{SST}_n^{\mathrm{AI}}(\rho)$ たちの和に分解する。さらに、$\mathrm{SST}_n^{\mathrm{AI}}(\rho)$ から、ρ に対応する O_n の既約指標が

$$\frac{1}{2^m} \sum_{T \in \mathrm{SST}_n^{\mathrm{AI}}(\rho)} \sum_{\sigma_{2i-1}\in\{+,-\}} y_1^{\sigma_1\beta_1(T)} y_3^{\sigma_3\beta_3(T)} \cdots y_{2m-1}^{\sigma_{2m-1}\beta_{2m-1}(T)}$$

と求まる。

謝辞

最後に、研究集会「組合せ論的表現論および関連分野との連携」の開催にご尽力くださり、筆者に講演の機会を与えてくださった茂木康平さんに感謝の意を表します。

References

[1] H. Bao and W. Wang, Canonical bases arising from quantum symmetric pairs, Invent. Math. 213 (2018), no. 3, 1099–1177.
[2] H. Bao and W. Wang, Canonical bases arising from quantum symmetric pairs of Kac-Moody type, Compos. Math. 157 (2021), no. 7, 1507–1537.
[3] H. Watanabe, A new tableau model for irreducible polynomial representations of the orthogonal group, arXiv:2107.00170.
[4] H. Watanabe, Crystal bases of modified $\imath$quantum groups of certain quasi-split types, arXiv:2110.07177.

(H. Watanabe) Department of Mathematics, Osaka City University, Osaka, 558-8585, Japan
Email address: `hideya@kurims.kyoto-u.ac.jp`