

ランダム複素力学系の平均安定性とその分岐

渡邊天鵬

京都大学理学研究科

Takayuki Watanabe

Graduate School of Science, Kyoto University

E-mail: watanabe.takayuki.3m@kyoto-u.ac.jp

2022年1月28日

概要

二次多項式 $f_c(z) = z^2 + c$ をランダムに選択するときのランダム合成 $f_{c_n} \circ \cdots \circ f_{c_2} \circ f_{c_1}$ に関して、複素平面内のアトラクターが消滅するパラメータ τ_{bif} を決定したい。とくに、パラメータ $c = 0, -1$ 付近における分岐パラメータの非自明な評価を述べる。また、決定論的な文脈における分岐を表すマンデルブロ集合の境界 ∂M との関連性について、ランダム力学系の意味での分岐がどのように関係し、どのように関係しないかを論じたい。

1 背景

素朴なランダム力学系の平均安定性に関する分岐を研究したい。具体的には、 $f_c(z) = z^2 + c$ ($c \in \mathbb{C}$) の形の二次多項式をランダムに選択するときの「ランダム合成」 $f_{c_n} \circ \cdots \circ f_{c_2} \circ f_{c_1}$ に関して、複素平面におけるアトラクターの消失を考える。その動機づけとして、近年のランダム力学系理論の発展と古くからの（決定論的）複素力学系理論について先行研究を紹介する。

ランダム力学系の研究は急速に発展しており、広い範囲の諸科学への応用が期待されている。決定論的な自励力学系では、例えば $x_{n+1} = f(x_n)$ のような差分方程式により時間発展が記述される。その理論は物理学や生物学、工学から経済学まで広範な分野で数理モデルとして応用されている。ランダム力学系理論は、時間発展の法則にランダム性（ノイズ）が加わったモデルの研究であり、数理モデルの観点からもこれらは非常に重要な研究対象であると思われる。例えば、 $x_{n+1} = f(x_n) + \nu_{n+1}$ のようにノイズ項 ν_{n+1} が加わっている状況を想像されたい。

応用への期待もさることながら、ランダム力学系は決定論の自然な発展として数学的な価値があり、ランダム性特有の現象がみられることは最も基本的で重要な事実である。数学的な理論については、Arnold による教科書 [1] などが参考になる。

本稿の範疇である、複素解析的な写像のランダム合成に関する研究は Fornæss と Sibony [4] によって始められた。彼らはノイズが十分小さいときには、平均的に極めて安定的な振る舞いが生じる

ことを証明した. この安定性もランダム性特有の現象の一種である. そこで, ノイズが大きくなるにしたがって力学系がどのように変化するか, という疑問が生じる.

角大輝は Fornæss と Sibony の結果を大幅に拡張して, ノイズが大きい場合でも generic には同様の安定性が生じることを証明した [10]. 角は極小集合を丁寧に分析することで, これを平均安定性という概念へと昇華した. 関連する結果については [11, 12] や, 平均安定性をさらに独立同分布でない場合に拡張した [13, 14] を参照されたい. 本稿では, 2 次多項式族 $\{f_c\}_{c \in \mathbb{C}}$ に関するランダム力学系について, 平均安定でないものを分岐パラメータと考えてそれを詳細に解析することが目標である.

二次多項式 f_c の自励力学系は二十世紀から研究されており, その重要性はいくら強調してもしすぎることはない. その分岐と関係しているのはかの有名なマンデルブロ集合 \mathcal{M} である. Mañé と Sad, Sullivan [6] は f_c のジュリア集合がパラメータに関して連続的に動く挙動を J-stability と名付け, J-stable なパラメータ全体の集合がパラメータ空間で開かつ稠密に存在することを証明した. J-stable でないパラメータの集合はマンデルブロ集合の境界 $\partial\mathcal{M}$ であり, 本稿とは異なる意味で分岐パラメータである. 詳しくは McMullen [7] や Milnor [8] を参照されたい.

本稿では, 二次多項式のランダム力学系に関する分岐について, 現在得られている結果を紹介する. また, 決定論的な文脈における分岐を表すマンデルブロ集合の境界 $\partial\mathcal{M}$ との関連性について述べたい. 本稿の構成は以下の通りである. 2 節では決定論的な力学系の基本的な用語を準備する. 古典的な複素力学系理論を既に知っている読者はこの節を読み飛ばして 3 節に進むとよい. 3 節ではランダム力学系に関する先行研究を紹介しつつ, 本稿の考察対象である「分岐半径」を定義する. その後, 4 節で主結果を述べる. 本稿の主結果はパラメータ $c = 0, -1$ の付近で分岐半径に関する非自明な評価を得たことである. さらに, マンデルブロ集合 \mathcal{M} とランダム力学系の意味での分岐がどのように関係し, どのように関係しないかを論じたい. そして 5 節では 4 節の内容を振り返りつつ, いくつかの問題と予想を提示する.

2 決定論的自励力学系からの準備

決定論的な自励力学系の用語と基本的な結果について復習する. 以下, 多項式写像 g を複素平面 \mathbb{C} からそれ自身への写像とみて, その力学系を考える. 証明は抜きで主張を述べるが, 詳細は Milnor [8] を参照されたい.

Definition 2.1. 多項式 g に対して, その充填ジュリア集合を

$$K(g) = \{z \in \mathbb{C} : g^{\circ n}(z) \not\rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)\}$$

により定義する. その境界 $\partial K(g) = J(g)$ をジュリア集合と呼ぶ. ここで, $g^{\circ n} = g \circ \cdots \circ g \circ g$ は g の n 回合成である.

マンデルブロ集合が c 平面内の集合であるのに対して, (充填)ジュリア集合は z 平面内であるのに注意せよ. ジュリア集合及び充填ジュリア集合は g の作用に関して完全不変になっており, そのでの力学系は非自明である. しかし, 以下の定理により大部分が理解できる.

Theorem 2.2. 充填ジュリア集合の内部 $\text{int}K(g)$ について、その連結成分 U' は前周期的である。すなわち、ある $n, p \in \mathbb{N}$ に対し、像 $U = g^{\circ n}(U')$ もまた $\text{int}K(g)$ の連結成分であり $g^{\circ p}$ は U から U への正則分岐被覆写像である。この連結成分 U を周期成分と呼ぶ。さらに、制限した力学系 $g^{\circ p}: U \rightarrow U$ は以下のいずれかに分類される。

- 吸引的: 成分 U は吸引的周期点を含む。すなわち、 $a \in U$ が存在して $g^{\circ p}(a) = a$ かつ複素微分の絶対値が $|(g^{\circ p})'(a)| < 1$ を満たす。このとき、任意の $z \in U$ に対して $g^{\circ kp}(z) \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$ が成り立つ。
- 放物的: 成分の境界 ∂U は放物的周期点を含む。すなわち、 $b \in \partial U$ が存在して $g^{\circ p}(b) = b$ かつ複素微分が $(g^{\circ p})'(b) = 1$ を満たす。このとき、任意の $z \in U$ に対して $g^{\circ kp}(z) \rightarrow b (k \rightarrow \infty)$ が成り立つ。
- 回転的: 力学系 $g^{\circ p}: U \rightarrow U$ は単位円板上の無理数回転と共役である。

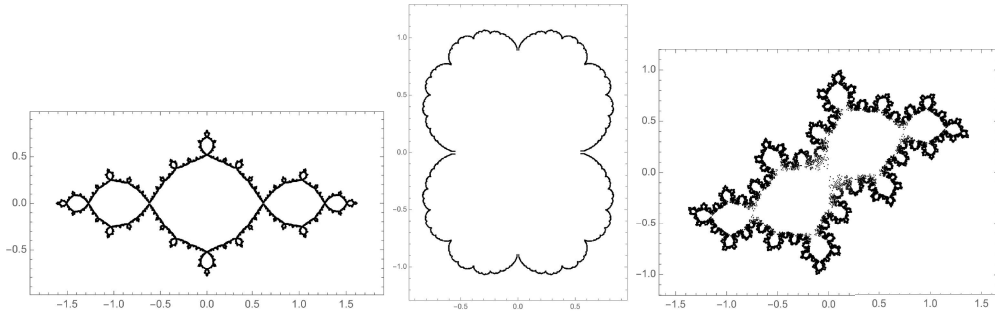


図1 黒い部分がジュリア集合 $J(g)$ であり、その内側を「充填」したものが $K(g)$ である。左からそれぞれ吸引的、放物的、回転的な連結成分をもつ多項式 g の例である。

多項式 g の力学系を考える上で無限遠点 ∞ を考えることで、無限遠に収束する初期点の集合 $\{\infty\} \cup \mathbb{C} \setminus K(g)$ も（超）吸引的（ファトウ）成分であるが、今回は平面的な領域しか考えないことにする。さて、上記で分類した連結成分は、臨界点の軌道と密接に関係する。二次多項式 $f_c(z) = z^2 + c$ に対しては、 $z = 0$ が共通の臨界点である。

Theorem 2.3. 力学系 $f_c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ について、以下が成り立つ。

- 内部 $\text{int}K(f_c)$ が吸引的な周期成分 U をもつとき、 $0 \in U$ である。
- 内部 $\text{int}K(f_c)$ が放物的な周期成分 U をもつとき、 $0 \in U$ である。
- 内部 $\text{int}K(f_c)$ が回転的な周期成分 U をもつとき、軌道の閉包 $\overline{\{f_c^{\circ n}(0): n \in \mathbb{N}\}}$ が境界 ∂U を含む。

特に、二次多項式の場合は高々一つの周期成分しか（平面内には）存在しない。

上の分類により、パラメータ c を分類することができる。

Definition 2.4. 吸引的な周期成分しか持たないパラメータ c を双曲的パラメータと呼ぶ.

放物的・回転的なパラメータもそれぞれ存在するが、本稿では必要としない. なお、「双曲的」という用語は力学系全般での用語と共通であり、複素一次元の場合はジュリア集合上で拡大的であることと同値である.

双曲的パラメータは Mañé-Sad-Sullivan の意味での J-stable なパラメータであるが、逆に J-stable なら双曲的であろうと予想されている. これは複素力学系理論における最も重要な予想の一つであるが、二次多項式の場合はマンデルブロ集合の境界 ∂M が局所連結であろうという予想が正しければこれも正しい [7]. このように、マンデルブロ集合（とくにその境界）は重要な未解決問題を含む興味深い研究対象であるが、本稿では予想の重要性を強調するに留めてこれ以上深くには踏み込まない.

改めて、マンデルブロ集合を定義する. ここでも臨界点 $z = 0$ が重要な役割を果たしていることに注意せよ.

Definition 2.5. 以下の集合をマンデルブロ集合という.

$$M = \{c \in \mathbb{C} : f_c^{o n}(0) \not\rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)\}.$$

また、マンデルブロ集合 M 内の双曲的パラメータ全体の集合を \mathcal{H} と表記する.

Theorem 2.3 と関連して、次のことが知られている. パラメータ $c \in M$ ならば充填ジュリア集合及びジュリア集合は連結である. 逆に、 $c \notin M$ ならば充填ジュリア集合 $K(f_c)$ は内点を含まず $K(f_c) = J(f_c)$ である. さらにこのとき、 $J(f_c)$ は完全不連結で孤立点を持たない、カントール型の集合である.

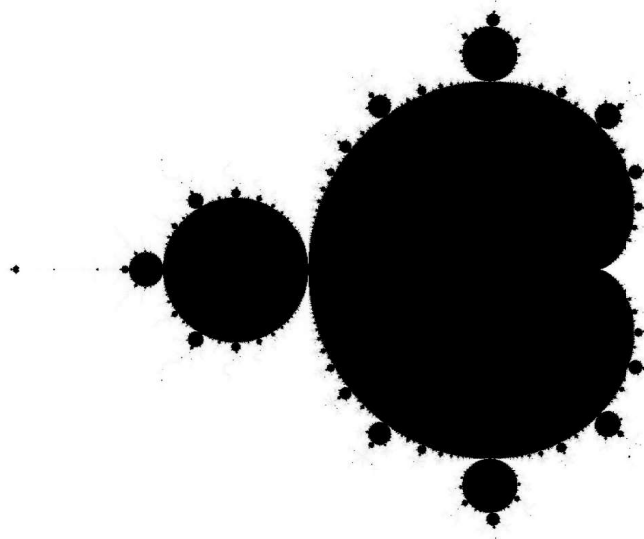


図2 マンデルブロ集合 M .

図2を見ると、中央やや右にカーゴイド形があり、中央より少し左側に円板形の部位が見える.

実際にこの観察は正しく、以下のように定式化できる。

Theorem 2.6. 領域を $D_1 = \{c = -\lambda^2/4 + \lambda/2 \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ と $D_2 = \{c \in \mathbb{C} : |4c + 4| < 1\}$ により定める。このとき、 $p = 1, 2$ に対して $c \in D_p$ ならば f_c は周期 p の吸引的周期点をもつ。さらに、 D_p は \mathcal{H} の連結成分の一つである。

より一般に、双曲パラメータ集合 \mathcal{H} の連結成分は、吸引的周期点の multiplier（周期点での複素微分の値）により単位円板へと双正則に写像されることが知られている [3]。上記の定理は、周期が 1 及び 2 の場合に計算したものを具体的に表している。

以下の注意にて、本節での準備を終える。

Remark 2.7. パラメータ $c = 0, -1$ はそれぞれ連結成分 D_1, D_2 の「中心」に相当する。すなわち、これらのパラメータにおいて f_c は multiplier が 0 の（超吸引的）周期軌道をもつ。

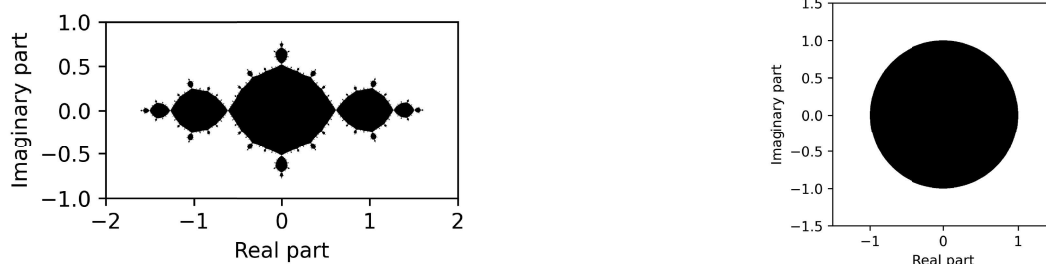


図 3 充填ジュリア集合 $K(f_c)$. 左が $c = -1$, 右が $c = 0$.

3 ランダム力学系の先行研究

正則写像をランダムに選択したときの漸近挙動は、Fornæss と Sibony により最初に研究された。その後の角による発展と関連する結果を本節で紹介しつつ、本稿での主結果を述べるために必要不可欠な「分岐半径」を Definition 3.5 で定義する。本稿の主題は二次多項式なので、例えば有理関数の力学系などの一般的な状況でも成立する結果について、少し特殊な設定で主張を述べることにする。興味のある読者は原論文を参照されたい。

さて、数学的な設定を以下で定義する。

Setting 3.1. パラメータ平面 \mathbb{C} 上のボレル確率測度 μ を中心 c 、半径 $r > 0$ の閉円板 $\bar{B}(c, r) = \{c' \in \mathbb{C} : |c' - c| \leq r\}$ 上の正規化されたルベーグ測度とする。ただし、 $r = 0$ のときは点 c 上のディラック測度とする。片側無限直積空間 $\Omega = \prod_{n=1}^{\infty} \bar{B}(c, r)$ 上のボレル確率測度 \mathbb{P} を μ の片側無限積

とする。パラメータの無限列 $\omega = (c_n)_{n=1}^\infty \in \Omega$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して、ランダム合成（または非自励的合成）を $F_\omega^{(n)} := f_{c_n} \circ \cdots \circ f_{c_2} \circ f_{c_1}$ によって定義する。

この Setting は、以下のような確率過程としても解釈できる。Setting 3.1 で与えられた確率測度 μ を $-c$ だけ平行移動したものを μ_0 とすると、その台は $\bar{B}(0, r)$ である。その μ_0 にしたがう、複素数値の独立確率変数列 $\{\nu_n\}_{n=1}^\infty$ に対して、確率過程を $z_{n+1} = f_c(z_n) + \nu_{n+1}$ によって帰納的に定めたとき、確率変数 z_n は Setting 3.1 における $f_{c_n} \circ \cdots \circ f_{c_2} \circ f_{c_1}(z_0)$ と等価である。いずれにしても、このランダム力学系は f_c の決定論的自励力学系の「ランダム摂動」であり、半径パラメータ r はノイズの大きさを記述している。

本設定は一様分布にしたがうランダム力学系であるが、後述するように分布 μ よりむしろその台 $\bar{B}(c, r)$ の方が重要である。

さて、ランダム力学系に関する結果を決定論の場合と比較しながら紹介したい。

Definition 3.2. Setting 3.1 のもと、各 $\omega \in \Omega$ に対して sample-wise Julia set またはランダムジュリア集合を $J_\omega = \partial\{z \in \mathbb{C} : F_\omega^{(n)}(z) \not\rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)\}$ によって定義する。

Definition 2.1 と比較すれば、上記の定義は決定論的自励力学系の場合の自然な拡張であることがわかる。また、古典的な場合と同様に、 J_ω は $\{F_\omega^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ が同程度連続でない点全体と一致する。

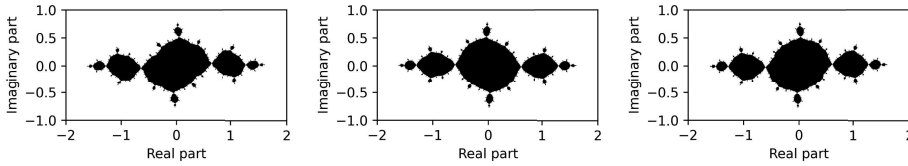


図 4 三つのサンプルに対して描画した sample-wise Julia sets（黒い部分の境界）。

Fornæss と Sibony は微小なノイズが、極めて安定的な力学系をつくることを証明した。

Theorem 3.3 ([4]). Setting 3.1 のもと、十分小さい $r > 0$ に対して以下のことが成り立つ。

- パラメータが $c \notin \mathcal{H}$ のとき、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、 \mathbb{P} に関してほとんど全ての $\omega \in \Omega$ について $F_\omega^{(n)}(z) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ となる。
- パラメータが $c \in \mathcal{H}$ のとき、連続関数 $T_\infty : \mathbb{C} \rightarrow [0, 1]$ が存在して、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して以下が成り立つ。
 - ボレル集合 $\mathfrak{B}_z \subset \Omega$ が存在して $T_\infty(z) = \mathbb{P}(\mathfrak{B}_z)$ かつ任意の $\omega \in \mathfrak{B}_z$ に対して $F_\omega^{(n)}(z) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ となる。
 - ボレル集合 $\mathfrak{C}_z \subset \Omega$ が存在して $1 - T_\infty(z) = \mathbb{P}(\mathfrak{C}_z)$ かつ任意の $\omega \in \mathfrak{C}_z$ に対して $F_\omega^{(n)}(z)$ は f_c の吸引的周期軌道の近傍に近づく。

すなわち、ランダム軌道 $F_\omega^{(n)}(z)$ は確率 $T_\infty(z)$ で無限遠点 ∞ に収束し、確率 $1 - T_\infty(z)$ で f_c の

吸引的周期軌道の近傍に近付くのであり、どちらにしても安定的な振る舞いをする。この系として、ランダムジュリア集合 J_ω は \mathbb{P} に関してほとんど全ての $\omega \in \Omega$ についてルベグ測度 0 であることがわかる。

Fornæss と Sibony による結果は、決定論的な力学系では起こりえないランダム力学系特有の現象である。というのも、 $r = 0$ の場合に確率の関数 T_∞ を考えると、充填ジュリア集合上で 0, その外で 1 の値をとり、したがって関数 T_∞ はジュリア集合上で不連続である。この急激な値の変化が、ノイズの効果により連続的に「なめさ」れる点がランダム力学系特有である。

例として $c = 0$ のときを考えてみよう。このとき、 f_0 は $z = 0$ に(超)吸引固定点を持ち、その充填ジュリア集合は図 3 右のように閉単位円板である。このとき、 $|z| = 1$ ならば $|f_0(z)| = 1$ であるが、ノイズの効果により $|f_{c_1}(z)| > 1$ または $|f_{c_1}(z)| < 1$ となることがある。Theorem 3.3 によれば、確率 1 で、 $F_\omega^{(n)}(z)$ は ∞ に収束するか 0 の近傍に収束する。さらに、 ∞ に収束する確率 $T_\infty(z)$ は連続である。

図 5 は $c = 0$ で $r = 0.2$ のときの確率 T_∞ を描画したものである。つまり、各初期点 z に対して 100 通りのランダム軌道を計算し、絶対値が閾値を超えた個数に応じて着色した。図中の「白さ」が確率 T_∞ を表しており、逆に「黒さ」は 0 の近傍に収束する確率を表している。(有限時間の計算では、閾値を超えず、かつ 0 の近くにもないような中間的な軌道も存在する。) 色合いが連続的に変化していることが T_∞ の連続性を表している。

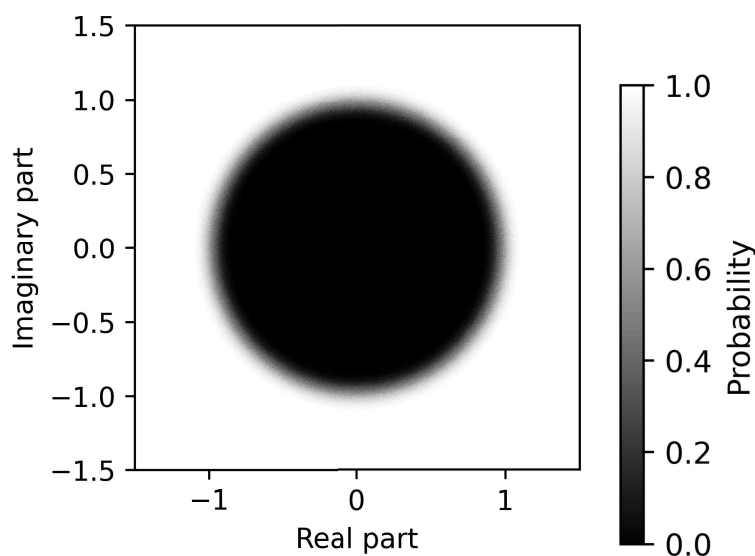


図 5 パラメータが $c = 0$ かつ $r = 0.2$ のときの、 ∞ に収束する確率 T_∞ . 右の図は確率の値を表記したカラーバー。

Theorem 3.3 はノイズが小さい場合であったが、角は多項式写像が作る半群の作用について極小集合を解析することで、Theorem 3.3 を r が大きい場合へと拡張した。特に $c \in \mathcal{H}$ のとき、ある段階

までは Fornæss-Sibony 型の状況が成り立ち、その後平面内のアトラクタが消滅してほとんど全ての軌道が無限遠へ発散する。半群の作用と極小集合については後述することにして、拡張された定理と分岐半径の定義を述べる。

Theorem 3.4 ([11]). Setting 3.1 のもと、以下のことが成り立つ。

- パラメータが $c \notin \mathcal{H}$ のとき、任意の $r > 0$ と任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、 \mathbb{P} -a.e. $\omega \in \Omega$ で $F_\omega^{(n)}(z) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) となる。
- パラメータが $c \in \mathcal{H}$ のとき、 c に依存する正の数 $r_{\text{bif}}(c) > 0$ が存在して以下が成り立つ。
 - (i) 半径パラメータが $0 < r < r_{\text{bif}}(c)$ なら、連続関数 $T_\infty: \mathbb{C} \rightarrow [0, 1]$ が存在して任意の $z \in \mathbb{C}$ に対してランダム軌道 $F_\omega^{(n)}(z)$ は確率 $T_\infty(z)$ で無限遠点 ∞ に収束し、確率 $1 - T_\infty(z)$ で平面アトラクタに収束する。
 - (ii) 半径パラメータが $r > r_{\text{bif}}(c)$ なら、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して \mathbb{P} -a.e. $\omega \in \Omega$ で $F_\omega^{(n)}(z) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) となる。

Definition 3.5. 任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して、 $c \notin \mathcal{H}$ なら $r_{\text{bif}}(c) = 0$ により、 $c \in \mathcal{H}$ なら Theorem 3.4 により分岐半径 $r_{\text{bif}}(c)$ を定義する。同じことだが、 $r_{\text{bif}}(c)$ は Setting 3.1 のランダム力学系が「任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して \mathbb{P} -a.e. $\omega \in \Omega$ で $F_\omega^{(n)}(z) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) となる」ような $r > 0$ の下限である。

分岐半径 r_{bif} を具体的に決定することが筆者の目標である。本稿の主結果を述べるにはこの定義だけで十分ではあるが、さらに一段高い視座から状況を俯瞰できるように抽象論を続ける。実際、分岐半径は半群作用の観点から特徴づけることができ、これにより r_{bif} が分布 μ よりむしろその台 $\bar{B}(c, r)$ で決定されることがわかる。まずは多項式半群を定義しよう。

Definition 3.6. 確率測度 μ の台 $\bar{B}(c, r)$ が生成する多項式半群 $G_{c,r}$ とは、

$$g = f_{c_n} \circ \cdots \circ f_{c_2} \circ f_{c_1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad c_1, \dots, c_n \in \bar{B}(c, r)$$

の形で書かれる多項式 g の集合であり、写像の合成により非可換な積を入れる。

多項式半群のジュリア集合について、以下が成り立つ。

Lemma 3.7. 半群 $G_{c,r}$ について、そのジュリア集合を

$$J(G_{c,r}) = \{z \in \mathbb{C}: G_{c,r} \text{ が } z \text{ の任意の近傍で同程度連続でない}\}$$

により定義する。このとき、 $J(G_{c,r}) = \overline{\bigcup_{\omega \in \Omega} J_\omega}$ になりつつ。

上の結果は annealed な対象と quenched なそれを結びつける結果と言える。証明は、有限生成な多項式半群に関する [9] と本質的に同じ方法で出来る。

次に、極小集合とその分類について述べる。本稿では多項式の場合を議論するので、無限遠のみの一点集合 $\{\infty\}$ は自明な極小集合であり、それ以外の平面的な極小集合について考える。

Definition 3.8. 空でないコンパクト集合 $L' \subset \mathbb{C}$ が $G_{c,r}$ の不変集合であるとは、 $g(L') \subset L'$ が任

意の $g \in G_{c,r}$ に対して成立することをいう。また、不変集合 L が極小であるとは、 L が不変集合の集合において包含関係 \subset に関して極小なものをいう。

空でないコンパクト集合 $L \subset \mathbb{C}$ が極小であることは、任意の $z \in L$ に対して $\overline{\bigcup_{g \in G_{c,r}} \{g(z)\}} = L$ となることと同値である。

Definition 3.9. 極小集合 L が吸引的 (attracting) であるとは、ある $N \in \mathbb{N}$, $\alpha < 1$, $K > 0$ が存在して、任意の $k \in \mathbb{N}$, $c_n \in \bar{B}(c, r)$ ($n = 1, \dots, kN$), そして L の近くの初期点 z, z_0 に対して

$$d(f_{c_{kN}} \circ \dots \circ f_{c_1}(z), f_{c_{kN}} \circ \dots \circ f_{c_1}(z_0)) \leq K\alpha^k d(z, z_0)$$

となることをいう。

Theorem 3.10 ([11]). 極小集合 L は以下の三種類のうちいずれかただ一つである。

- L は吸引的である。
- L はジュリア集合 $J(G_{c,r})$ と交わる。(J-touching であるという。)
- L はジュリア集合 $J(G_{c,r})$ と交わらず、ある $g \in G_{c,r}$ の回転的な周期成分と交わる。(Sub-rotative であるという。)

Definition 3.11. 多項式半群 $G_{c,r}$ の力学系が平均安定 (mean stable) であるとは、全ての極小集合が吸引的であることをいう。

Theorem 3.10 及び Definition 3.11 を、それぞれ古典的な文脈における周期成分の分類定理 (Theorem 2.2) 及び双曲性の定義 (Definition 2.4) と比較せよ。

なお、古典的な力学系は $G_{c,0}$ の力学系に対応するが、この場合は周期軌道や回転的な周期成分内の不変円周が極小集合である。後者は sub-rotative な極小集合であるが、前者については周期軌道の multiplier などによって極小集合としての型が決まる。すなわち、軌道が吸引的なら吸引的、放物的・Cremer・反発的なら J-touching, Siegel なら sub-rotative な極小集合である。とくに、 $G_{c,0}$ は反発的な周期点を (無限個) もつので平均安定ではない。ここで、Cremer や Siegel といった用語については [8] を参照せよ。

さて、簡単な観察で次がわかる。

Lemma 3.12.

台が $\bar{B}(c_1, r_1) \subset \bar{B}(c_2, r_2)$ なら G_{c_2, r_2} の極小集合は G_{c_1, r_1} の極小集合を含む。とくに、 G_{c_1, r_1} の極小集合の数は G_{c_2, r_2} のそれ以上である。

この補題と Theorem 3.3 により、次のことがわかる。以下は、角による結果 Theorem 3.4 を極小集合により換言したものであり、分岐半径を極小集合により特徴付ける。多項式半群及び極小集合は確率測度 μ というよりはその台 $\bar{B}(c, r)$ から定義されているので、分岐半径 r_{bif} は台 $\bar{B}(c, r)$ のみから定まる量である。

Theorem 3.13. Setting 3.1 のもと、任意の $c \in \mathbb{C}$ に対してノイズがない $r = 0$ のとき、 $G_{c,0}$ は無

限個の極小集合をもつ。また、パラメータに応じて以下が成り立つ。

- もし $c \notin \mathcal{H}$ なら、任意の $r > 0$ に対して $G_{c,r}$ は平面内に極小集合を持たない。
- もし $c \in \mathcal{H}$ なら、平面的な極小集合が消失するパラメータ $r_{\text{bif}}(c) > 0$ が存在する。より正確には、 $G_{c,r}$ は $0 < r < r_{\text{bif}}(c)$ でただ一つの吸引的極小集合をもち、 $r = r_{\text{bif}}(c)$ で吸引的でない極小集合 L_{bif} をもち、そして $r > r_{\text{bif}}(c)$ では平面内に極小集合をもたない。

以上のことから、平均安定なパラメータが開かつ稠密に存在することがわかる。決定論的力学系と比較するとこれは「双曲的パラメータが開かつ稠密」であることのランダム力学系的類似である。

Corollary 3.14. 各 $c \in \mathbb{C}$ に対して、 $G_{c,r}$ は $r = 0$ と $r_{\text{bif}}(c)$ を除いて平均安定である。ただし、 $r_{\text{bif}}(c) = 0$ も起こりうる。さらに、 $\{(c,r) \in \mathbb{C} \times [0, \infty) : G_{c,r} \text{ は平均安定}\}$ は開かつ稠密である。

4 主結果

本研究は分岐半径 r_{bif} の決定を目標とする。現在までに得られている結果を紹介するが、証明は主にアイデアを述べるにとどめ背景と関連する問題を中心的に議論したい。とくに、パラメータ $c = 0, -1$ 付近での結果をそれぞれ小節 4.1 と 4.2 で述べる。これらのパラメータは Remark 2.7 で論じたように、周期が 1, 2 の超吸引的パラメータである。

まず、任意のパラメータで成り立つ Brück と Büger, Reitz による結果 [2, Lemma 2.1] から始める。これにより Corollary 4.2 がしたがいが、マンデルブロ集合との関係が現れる。標語的にいうと、ランダムな分岐は決定論的な分岐の前に起こる。

Lemma 4.1 ([2]). 台が $\bar{B}(c,r) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}) \neq \emptyset$ を満たすとする。このとき、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対してある $\omega \in \Omega$ が存在して $F_{\omega}^{(n)}(z) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) となる。とくに、 $G_{c,r}$ は平面内に極小集合をもたず、 $r_{\text{bif}}(c) \leq r$ である。

Corollary 4.2. 任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して $r_{\text{bif}}(c) \leq \text{dist}(c, \partial\mathcal{M})$ である。ここで、 $\text{dist}(c, \partial\mathcal{M})$ は点 c と集合 $\partial\mathcal{M}$ とのユークリッド距離を表す。

さらに、Lemma 3.12 から次のことがわかる。

Theorem 4.3. 関数として $r_{\text{bif}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ は 1 リプシッツ連続である。すなわち、任意の $c, c' \in \mathbb{C}$ に対して $|r_{\text{bif}}(c) - r_{\text{bif}}(c')| \leq |c - c'|$ となる。

以上の結果を用いて、パラメータ $c = 0, -1$ 付近での結果をそれぞれ小節 4.1 と 4.2 で述べる。

4.1 パラメータ $c = 0$

例えば $c = 0$ に Corollary 4.2 を適用すると $r_{\text{bif}}(0) \leq \text{dist}(0, \partial\mathcal{M}) = 1/4$ を得る。いま、 $\text{dist}(0, \partial\mathcal{M}) = 1/4$ であることは $\bar{B}(0, 1/4)$ が $\partial\mathcal{M}$ と $c = 1/4$ で交わることからわかるが、 $c = 1/4$

は Theorem 2.6 で述べたカージオイド形の連結成分 D_1 のカスプに相当する．このパラメータ $c = 1/4$ は以下の補題の証明でも重要であり，写像 $f_{1/4}$ が $z = 1/2$ に放物的固定点をもつことが鍵である．次の補題は [2, Theorem 1.6] に依る．

Lemma 4.4 ([2]). パラメータ $c = 0$ と $r = 1/4$ のとき， $\mathbb{P}(\mathfrak{D}) = 1$ なるポレル集合 $\mathfrak{D} \subset \Omega$ が存在して，任意の $\omega \in \mathfrak{D}$ と $z \in \bar{D}_{1/2} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1/2\}$ に対してその軌道 $\{F_\omega^{(n)}(z) \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}\}$ は $\bar{D}_{1/2}$ 内で稠密である．

上の補題により $r_{\text{bif}}(0)$ を決定でき，それと Theorem 4.3 とを合わせると正の実数 c に対して分岐半径が計算できる．

Theorem 4.5. 半群 $G_{0,1/4}$ は J-touching な極小集合 $\bar{D}_{1/2}$ をもち $r_{\text{bif}}(0) = 1/4$ である．

Corollary 4.6. 任意の実数 $0 \leq c \leq 1/4$ に対して， $r_{\text{bif}}(c) = 1/4 - c$ となる．

これは $r_{\text{bif}}(c) = \text{dist}(c, \partial\mathcal{M})$ が $0 \leq c \leq 1/4$ に対して成立することを意味する．Theorem 4.5 と Corollary 4.2, 4.6 から次の問題が生じる：「任意の $c \in \mathcal{H}$ に対して $r_{\text{bif}}(c) = \text{dist}(c, \partial\mathcal{M})$ となるだろうか？」答えは否定的である．実際，筆者は $r_{\text{bif}}(c) = \text{dist}(c, \partial\mathcal{M})$ となる c は $0 \leq c \leq 1/4$ 以外に知らない．

絶対値が小さい負の実数 $c < 0$ に対して $r_{\text{bif}}(c) < \text{dist}(c, \partial\mathcal{M})$ となることを示そう．分岐半径に上からの評価を与えるために有用な補題を準備する．以下の結果により，超吸引的パラメータを含むときは臨界点 $z = 0$ の軌道だけで分岐の様子がわかる．

Lemma 4.7. 台 $\bar{B}(c, r)$ が超吸引的パラメータ c_0 を内部に含むと仮定する．つまり， $f_{c_0}^{\circ p}(0) = 0$ かつ $c_0 \in \text{int}\bar{B}(c, r)$ ．もし $\omega \in \Omega$ が存在して $F_\omega^{(n)}(0) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) ならば， $r > r_{\text{bif}}(c)$ である．

Proof. 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して， $c'_1, c'_2, \dots \in \bar{B}(c, r)$ をとって $f_{c'_n} \circ \dots \circ f_{c'_2} \circ f_{c'_1}(z) \rightarrow \infty$ となることを示せばよい．

- もし $z \notin K(f_{c_0})$ なら $f_{c_0}^{\circ n}(z) \rightarrow \infty$ である．
- もし $z \in \partial K(f_{c_0})$ なら $c'_1 \in \bar{B}(c, r)$ が存在して $f_{c'_1}(z) \notin K(f_c)$ ，したがって $f_{c_0}^{\circ n} \circ f_{c'_1}(z) \rightarrow \infty$ となる．
- もし $z \in \text{int}K(f_{c_0})$ なら Theorem 2.2 の前半より $f_{c_0}^{\circ n}(z)$ は 0 の f_{c_0} による超吸引的周期軌道に収束する．ゆえに， $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して $f_c^{\circ n_1}(z)$ は 0 に十分近い．このとき， $F_\omega^{(n)}(f_c^{\circ n_1}(z)) \rightarrow \infty$ である．

□

Lech と Zdunik による結果 [5, Theorem B] より以下がしたがう．

Theorem 4.8. もし $\bar{B}(c, r) \supset \bar{B}(0, 1/4)$ かつ $\bar{B}(c, r) \neq \bar{B}(0, 1/4)$ なら，ほとんど全ての $\omega \in \Omega$ に対して $F_\omega^{(n)}(0) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) であり $r > r_{\text{bif}}(c)$ である．とくに， $-1/4 \leq c < 0$ に対して

$r_{\text{bif}}(c) < 1/4 - c$ が成り立つ.

ここで, $-1/4 \leq c < 0$ ならば $\text{dist}(c, \partial\mathcal{M}) = 1/4 - c$ であり, 上の定理より $r_{\text{bif}}(c) < \text{dist}(c, \partial\mathcal{M})$ である. また, Lech と Zdunik は $\bar{B}(c, r) \supset \bar{B}(0, 1/4)$ かつ $\bar{B}(c, r) \neq \bar{B}(0, 1/4)$ なら, ほとんど全ての $\omega \in \Omega$ に対してランダムジュリア集合は完全不連結であることを示した. これ自体も興味深い結果である.

4.2 パラメータ $c = -1$

上からの精密な評価を与える十分条件を挙げる.

Theorem 4.9. 台 $\bar{B}(c, r)$ が超吸引的パラメータ c_0 を含むと仮定する. もし $c_1, c_2, \dots, c_N \in \bar{B}(c, r)$ が存在して $f_{c_N} \circ \dots \circ f_{c_2} \circ f_{c_1}$ が放物的周期点をもてば, $r_{\text{bif}}(c) \leq r$ である.

証明には Lemma 4.7 を用いる. これより $r_{\text{bif}}(-1)$ を評価できる.

Corollary 4.10. 絶対値 1 の複素数 $\zeta_6 = e^{2\pi i/6}$ を考える. いま

$$c_1 = -1 + \rho\zeta_6^{p_1}, \quad c_2 = -1 + \rho\zeta_6^{p_2}, \quad c_3 = -1 + \rho\zeta_6^{p_3}, \quad c_4 = -1 + \rho\zeta_6^{p_4} \quad (4.1)$$

とする. このとき, $\rho = 0.0399\dots$ と $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (1, 2, 5, 4)$ で $f_{c_4} \circ f_{c_3} \circ f_{c_2} \circ f_{c_1}$ は放物的固定点をもつ. したがって, $r_{\text{bif}}(-1) \leq \rho$ である.

ここで, 写像 $f_{c_4} \circ f_{c_3} \circ f_{c_2} \circ f_{c_1}$ は変数 z に関する次数 16 のモニック多項式であり, その放物的固定点は方程式 $f_{c_4} \circ f_{c_3} \circ f_{c_2} \circ f_{c_1}(z) - z = 0$ の重解である. よく知られているように, 重解をもつための条件は判別式 Δ が 0 となることで特徴づけられる. 式 4.1 の (p_1, p_2, p_3, p_4) を固定すれば判別式 Δ は ρ を変数とする多項式となる. Mathematica バージョン 12 を用いた計算によると, $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (1, 2, 5, 4)$ ならば Δ は整数環に ζ_6 を添加した環 $\mathbb{Z}[\zeta_6]$ に係数をもつ次数 32 の多項式である. その多項式の根を数値的に求めることにより $r_{\text{bif}}(-1) \leq 0.0399\dots$ がわかった.

筆者は式 4.1 で $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \{0, 1, \dots, 5\}^4$ としたときの $6^4 = 1296$ 通りを全てコンピュータで計算した. それによると, $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (1, 2, 5, 4)$ を含む 24 通りで同じ評価 $|\rho| = 0.0399\dots$ が得られた.

現時点では Corollary 4.10 が最良の評価であるが, 改良できる可能性はある. 式 4.1 の ζ_6 を $\zeta_4 = e^{2\pi i/4}$ に置き換えたものも検討したが, 最も良い評価を与えたのが Corollary 4.10 内の数値であった. 今回は長さ 4 までの合成 $f_{c_4} \circ f_{c_3} \circ f_{c_2} \circ f_{c_1}$ を考えたが, 一般に多項式 $f_{c_n} \circ \dots \circ f_{c_2} \circ f_{c_1}$ でも同じ計算ができる. しかしその次数は 2^n であり, n に伴って計算量が指数的に増大するため, 上記の方法でより良い評価を探すのはコンピュータを用いても限界がある.

さて, $r_{\text{bif}}(-1)$ を上から評価したが, 続いて下からの評価を考える. こちらは比較的簡単である.

Lemma 4.11. パラメータを $c = -1$ とする. 半径 δ の閉円板 $\bar{\mathbb{D}}_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \delta\}$ について,

$f_{c_2} \circ f_{c_1}(\overline{\mathbb{D}}_\delta) \subset \overline{\mathbb{D}}_\delta$ が任意の $c_1, c_2 \in \overline{B}(-1, r)$ について成立するための必要十分条件は

$$\delta^4 + 2(1+r)\delta^2 + r^2 + 3r \leq \delta \quad (4.2)$$

となることである.

Corollary 4.12. 式 4.2 を満たす中で最大の $r = r_{\max} = 0.0386\dots$ が計算できて $r_{\max} \leq r_{\text{bif}}$ である.

ここで, r_{\max} は δ の関数 $(\sqrt{4\delta^2 + 4\delta + 9} - 2\delta^2 - 3)/2$ の $[0, \delta_{\max}]$ 内の最大値である. この最大値は, 多項式 $16\delta^4 + 16\delta^3 + 32\delta^2 - 4\delta - 1$ の根 $\delta^* \approx 0.229$ で達成される. また, $\delta_{\max} \approx 0.453$ は $\delta^4 + 2\delta^2 - \delta$ の正の実数根である.

Corollary 4.12 と Corollary 4.10 より以下がわかる.

Theorem 4.13. パラメータ $c = -1$ について $0.0386 < r_{\text{bif}}(-1) < 0.0400$ である.

Corollary 4.14. 任意の $\epsilon \in \mathbb{C}$ に対して $r_{\text{bif}}(-1 + \epsilon) < 0.0400 + |\epsilon|$ である.

5 まとめ

前節で分岐半径について, とくにパラメータ $c = 0, -1$ の近くでの結果を紹介した. 前者の場合は $r_{\text{bif}}(0) = 1/4 = \text{dist}(0, \partial\mathcal{M})$ であり, 一見マンデルブロ集合の境界と関係があるように見えた. しかし, $0 \leq c \leq 1/4$ に対して $r_{\text{bif}}(c) = \text{dist}(c, \partial\mathcal{M})$ であるものの, $-1/4 \leq c < 0$ に対して $r_{\text{bif}}(c) < \text{dist}(c, \partial\mathcal{M})$ であり, 必ずしも直接的な関係があるとは言い切れない. また, $r_{\text{bif}}(-1) < 0.04$ と $\text{dist}(-1, \partial\mathcal{M}) = 1/4$ とを比べると大きな差があり, $c = 0$ 付近とは状況が異なっている. この原因は元の力学系の非線形性がノイズを拡大していることに起因すると思われる. ランダム力学系の観点から興味深い現象であると筆者は考えている. なお, r_{bif} のリプシッツ連続性から, 小さい $\epsilon \in \mathbb{C}$ に対しても $r_{\text{bif}}(-1 + \epsilon) \ll \text{dist}(-1 + \epsilon, \partial\mathcal{M})$ である.

以上の結果を得るための戦略は, 主に臨界点のランダム軌道に注目することであり, とくに(自励的な意味での)放物的な周期点に分岐の直前に存在する. 決定論的な場合と同様に, 臨界軌道が力学系の大局的振る舞いを決定するのに役立つのである. 本稿では述べなかったが, 臨界点のランダム軌道はランダムジュリア集合の連結性と密接に関係しており, 本研究を応用して連結性を決定することは今後の課題である.

さらなる展望としては, 以下のような問題が考えられる. まず, $r_{\text{bif}}(-1)$ を完全に決定することである. Theorem 4.13 により誤差 0.0014 で計算することはできたが, 正確な値を求めたい. そして, それがどのように力学系的な量と関係しているか, 代数的な数か, 他の数論的な性質はどうか, といった問題が考えられる.

他にも, 周期が 3 以上の超吸引的パラメータではどうなるか, という疑問がある. 例えば周期 3 のいわゆる airplane や Douady (anti-)rabbit のパラメータなどである. 本稿の Corollary 4.10 と同様の方法で上からの評価を与えることはできるが, 周期が高いほど計算量が増大し良い評価を与えるの

は困難になる．周期 p の超吸引的パラメータ c_p について， $r_{\text{bif}}(c_p)$ が p についてどのように減少するか考察するのは興味深い問題であろう．筆者は自明な評価 $r_{\text{bif}}(c_p) \leq \text{dist}(c_p, \partial\mathcal{M})$ しか知らないが， $c_2 = -1$ の類推から非常に早く減少するのではないかと予想している．

他にも，メインカージオイド D_1 内もまだまだ未開拓である．負の実数 $-1/4 \leq c < 0$ においても $r_{\text{bif}}(c) < \text{dist}(c, \partial\mathcal{M})$ しかわかっておらず，正確な値やもっと良い（上下からの）評価を考えるべきである．この評価は例えば， r_{bif} の最大値を求めるためにも役立つであろう．さらに，本稿では超吸引的なパラメータが台 $\bar{B}(c, r)$ に含まれる場合のみを考えたので，そうでない場合は完全に未解決である．とくに，実軸上で右から $c \rightarrow -3/4$ となる場合に $r_{\text{bif}}(c)$ はどのように 0 に収束するかという問題がある．ここで， $c = -3/4$ は連結成分 D_1 と D_2 が境界で交わるパラメータである．他にも，実数でない場合はさらに困難であるが，例えば c が D_1 内から周期 3 の成分 D_3 に近付くとき $r_{\text{bif}}(c)$ はどのように 0 に収束するかも疑問である．

本稿の趣旨とは異なるが，実力学系に実ノイズが掛かった場合にも同様の問題が考えられ，それも非常に重要である．例えば，ロジスティック写像 $g_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ について， λ を適切な区間 $I \subset [0, 4]$ 上の一様分布にしたがって選択したときのランダム軌道 $g_{\lambda_n} \circ \dots \circ g_{\lambda_2} \circ g_{\lambda_1}(x_0)$ とその分岐は重要な研究対象である．

以上のように幾つもの未解決問題・予想が考えられ，分岐半径の決定に関する今後の発展が望まれる．

参考文献

- [1] Arnold, Ludwig: Random dynamical systems. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [2] Brück, Rainer; Büger, Matthias; Reitz, Stefan: Random iterations of polynomials of the form $z^2 + c_n$: connectedness of Julia sets. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 19 (1999), 1221–1231.
- [3] Douady, Adrien; Hubbard, John Hamal: Itération des polynômes quadratiques complexes. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 294 (1982), no. 3, 123–126.
- [4] Fornæss, John; Sibony, Nessim: Random iterations of rational functions. Ergod. Th. & Dynam. Sys. 11 (1991), 687–708.
- [5] Lech, Krzysztof; Zdunik, Anna: Total disconnectedness of Julia sets of random quadratic polynomials. Ergodic Theory and Dynamical Systems, (2021), 1–17. doi:10.1017/etds.2020.148
- [6] Mañé, Ricardo; Sad, Paulo; Sullivan, Dennis: On the dynamics of rational maps. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 16 (1983), no. 2, 193–217.
- [7] McMullen, Curtis: Complex dynamics and renormalization. Annals of Mathematics Studies, 135. Princeton University Press, 1994.
- [8] Milnor, John: Dynamics in one complex variable, third edition. Annals of Mathematical

- Studies. 160, Princeton University Press, 2006.
- [9] Sumi, Hiroki : Skew product maps related to finitely generated rational semigroups. *Nonlinearity* 13 (2000), no. 4, 995–1019.
 - [10] Sumi, Hiroki: Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps. *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) 102 (2011), no. 1, 50–112.
 - [11] Sumi, Hiroki: Cooperation principle, stability and bifurcation in random complex dynamics. *Adv. Math.* 245 (2013), 137–181.
 - [12] Sumi, Hiroki: Negativity of Lyapunov exponents and convergence of generic random polynomial dynamical systems and random relaxed Newton’s methods. *Comm. Math. Phys.* 384 (2021), no. 3, 1513–1583.
 - [13] Sumi, Hiroki; Watanabe, Takayuki: Non-i.i.d. random holomorphic dynamical systems and the probability of tending to infinity. *Nonlinearity* 32 (2019) No. 10, 3742–3771.
 - [14] Sumi, Hiroki; Watanabe, Takayuki: Non-i.i.d. random holomorphic dynamical systems and the generic dichotomy. To appear in *Nonlinearity*.