Estimates of stationary densities for random maps with indifferent fixed points

愛媛大学大学院理工学研究科
電気電子工学コース　応用数学分野
井上友喜

Tomoki Inoue
Division of Applied Mathematics,
Department of Electrical and Electronic Engineering,
Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

1 序

中立的不動点をもつ決定論的な力学系において知られている不変測度の密度関数の評価を，中立的不動点をもつようなランダム写像 (Random map) に対してどのように拡張できるかを考える．

ここで考えるランダム写像によるランダム力学系は，いくつかの写像の族の中から 1 つの写像が順次ランダムに選ばれて，反復されるような系である．すなわち，W を空でない集合として，$\{T_t\}_{t\in W}$ という写像の族を考え，$\{T_t\}_{t\in W}$ の中から 1 つの写像が順次ランダムに選ばれ反復されるようなシステムを考える．

W の要素の数によらず， $T_t = T_0$ $(t \in W)$ であれば，これは決定論的な力学系と同じある．したがって，ここで考えるランダム力学系は決定論的な力学系の一般化である．また，同様に考えれば，W として連続の濃度をもつ無限集合を考えておけば，W として有限集合や可算集合の場合を考えるまでもない．このように考えると，ランダム写像として，写像の族 $\{T_t\}_{t\in W}$ の中から写像 T_t が， W 上の確率密度関数 $p(t)$ にし

たがって選ばれるものを考えるのが妥当であることがわかる．

さらに，より一般的な場合として，相空間 X 上の位置により，写像の選ばれる確率が異なっていてもよいようなシステム，すなわち，$x \in X$ に対して，写像 T_t が W 上の確率密度関数 $p(t,x)$ にしたがって選ばれるようなシステムを考えるのは自然である．このような，写像の選ばれる確率が相空間 X 上の位置に依存してもよいようなシステムを位置依存ランダム力学系と呼ぶ．本稿でいう位置依存ランダム力学系は，写像の選択が位置に依存してもよいランダム力学系であり，写像の選択が位置に依存しないランダム力学系を含んでいる．

2　中立的不動点をもつ写像の例とその不変測度

ランダム力学系の中立的不動点の概念は必ずしも確立されていない（[井 3]）が，決定論的力学系では中立的不動点を次のように定義する．

定義．　決定論的な 1 次元写像 T の中立的不動点 p とは，$T(p) = p$ and $T'(p) = 1$ をみたすものである．

中立的不動点をもつ決定論的な 1 次元写像の具体例と不変測度を述べておこう．

例 1．　$d > 1$ を定数として，$T : [0,1] \to [0,1]$ を

$$T(x) = \begin{cases} x + 2^{d-1}x^d, & [0, \frac{1}{2}), \\ 2x - 1, & [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

と定める．

このとき，絶対連続な不変測度 μ が存在し，$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ に対して

$$K_1 \int_{[\varepsilon,\varepsilon_0]} x^{1-d} m(dx) \leq \mu([\varepsilon, \varepsilon_0]) \leq K_2 \int_{[\varepsilon,\varepsilon_0]} x^{1-d} m(dx)$$

となる．ここで，ε_0 は小さな定数，K_1 と K_2 は ε に依存しない定数である．

これは次の事実を精密化したものである．

$$d < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu([0,\varepsilon]) < \infty$$

この例 1 で述べたことは，[T] の結果からわかることである．

中立的不動点をもつランダム力学系として，写像族 $\{T_t\}_{t\in W}$ の各写像 T_t が共通の中立的不動点をもつものを考える．少なくとも，このようなものなら，中立的不動点をもつランダム力学系と呼べるであろう．このようなランダム力学系の具体例と不変測度を述べておこう．

例 2. $T_t : [0,1] \to [0,1]$ を

$$T_t(x) = \begin{cases} x + 2^{t-1}x^t, & [0, \frac{1}{2}), \\ 2x - 1, & [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

と定め，$t > 1$ は定数で，区間 $[a,b]$ から一様にランダムに選ばれるとする．

このようなランダム写像に対して，絶対連続な不変測度 μ が存在し，

$$\mu([0,1]) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad a < 2$$

であることがわかっている．後で，例 1 に述べたような $\mu([\varepsilon, \varepsilon_0])$ の評価がわかるような定理を述べる．

例 2 では，T_t の定義域 $[0,1]$ の分割は固定されているが，例 2 で述べた程度のことに関しては，必ずしも，T_t の定義域 $[0,1]$ の分割は固定されている必要はない．実際，次のような例がある．

例 3 . $T_t : [0,1] \to [0,1]$ を

$$T_t(x) = x + x^t \qquad \mathrm{mod}\ 1$$

と定め，$t > 1$ は定数で，区間 $[a,b]$ から一様にランダムに選ばれるとする．

このようなランダム写像に対して，絶対連続な不変測度 μ が存在し，

$$\mu([0,1]) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad a < 2$$

であることがわかっている．

なお，例 2 と 3 で述べたことは，[I2] の結果からわかることである．

3　ランダム写像の定義

この節では，ランダム写像の定義と，ランダム写像の不変測度の定義を確認しておこう．ここで定義するランダム写像は，[I1] や [井 1] などにおいて研究されたものである．これは，前節で述べたような，写像の選択確率が相空間上の位置に依存してもよいものであり，また，パラメータの空間は連続の濃度をもつものでよく，[Pe] や [M] などで研究されたものや [Ba-G] などで研究されたものを一般化したものである．

まず，パラメータ用の空間と相空間を準備する．$(W, \mathcal{B}, \nu)$ と $(X, \mathcal{A}, m)$ をそれぞれ σ-有限測度空間とする．この前提のもとで，$T_t : X \to X$ $(t \in W)$ は非特異変換，すなわち，任意の可測集合 $D \in \mathcal{A}$ に対して，$m(D) = 0$ ならば $m(T_t^{-1} D) = 0$ となるとする．また，$T_t(x)$ は $x \in X$ と $t \in W$ の可測関数とする．さらに，$p : W \times X \to [0, \infty)$ は可測で，各 $x \in X$ に対して W 上の確率密度関数，すなわち，$\int_W p(t,x)\ \nu(dt) = 1$ とする．

ランダム写像 $T = \{T_t; p(t,x)\}$ を次の推移関数 $\mathbf{P}$ をもつマルコフ過程として定める：

$$\mathbf{P}(x, D) := \int_W p(t,x)\ 1_D(T_t(x))\ \nu(dt),$$

ここで，$D \in \mathcal{A}$ であり，1_D はその上の定義関数である．

この推移関数 $\mathbf{P}$ により，X 上の測度に対する作用素 $\mathbf{P}_*$ が次のように定まる：

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_*\mu(D) : &= \int_X \mathbf{P}(x, D)\mu(dx) \\ &= \int_X \int_W p(t,x)\ 1_D(T_t(x))\ \nu(dt)\ \mu(dx),\end{aligned}$$

ここで，$D \in \mathcal{A}$ であり，μ は X 上の測度である．

定義．　X 上の測度 μ が $\mathbf{P}_*\mu = \mu$ をみたすとき，μ をランダム写像 T の不変測度と呼ぶ．

もしも，T が決定論的な写像，すなわち，$T_t = T$ $(t \in W)$ であれば，$\mathbf{P}_*\mu(D) = \mu(T^{-1}D)$ となることから，ここで与えたランダム写像の不変測度の定義は，通常の決定論的な写像の不変測度の定義の一般化であることがわかる．

4　今回の話題における設定と結果

前節のランダム写像 $T = \{T_t; p(t,x)\}$ において，X を区間 $[0,1]$ とし，m はルベーグ測度とする．

一般的に条件を述べると煩雑になるので，以下に述べるように，中立的不動点は原点だけであるように設定する．

$t \in W$ に対し，$T_t : [0,1] \to [0,1]$ は，次の条件をみたすとする．

(i) $[0,1]$ の分割 $0 = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n_0} = 1$ が存在し，各 $i = 1, \ldots, n_0$ に対して $T_t|_{(c_{i-1},c_i)}$ は 単調な C^1 級関数である．

(ii) $T_t|_{(0,c_1)}(x) = x + m_t x^{d_t} + o(x^{d_t})$,

ここで $m_t > 0$ と $d_t > 1$ は $t \in W$ に関して有界な定数.

(iii) $\displaystyle\sup_{x \in [c_1,1]} \int_W \frac{p(t,x)}{|T_t'(x)|} \nu(dt) < 1.$
ただし，$T_t'(x)$ が定義されていないところでは考えない．

(iv) 定数 M が存在して，ほとんどすべての $t \in W$ に対して $\displaystyle\bigvee_{[0,1]} \frac{p(t,\cdot)}{|T_t'|} < M.$

上記の条件をみたすランダム写像は， [I2] や [井 2] で考えたランダム写像の特別な場合であり，次の定理が成り立つ．

定理 A [I2]．ランダム写像 $T = \{T_t, p(t,x), t \in W\}$ は絶対連続な σ-有限不変測度 μ をもつ．

論文 [I2] においては，不変測度が有限測度であるための十分条件や無限測度であるための十分条件も述べている．しかし，絶対連続な σ-有限不変測度 μ の密度関数の評価は述べていない．

今回，密度関数の評価に関して，以下のような定理が得られたので報告する．

定理 1.　$d > 1$ を定数とし，$W_d = \{t \in W : d_t \leq d\}$ とおく．(d_t は先ほどの設定の

(ii) に出てきたもの）ランダム写像 $T = \{T_t; p(t,x) : t \in W\}$ は次の条件をみたすと仮定する:

(1) $\nu(W) < \infty$.

(2) $p(t,x) = p(t)$ は 0 の小さな近傍では x に依存しない.

(3) $\int_{W_d} p(t)\nu(dt) > 0$.

このとき, ランダム写像 $T = \{T_t; p(t,x) : t \in W\}$ の絶対連続な σ-有限不変測度 μ は

$$\mu([\varepsilon,\varepsilon_0]) \le K \int_{[\varepsilon,\varepsilon_0]} x^{1-d} m(dx) \quad \text{for } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

をみたす．ここで，ε_0 は小さな定数で， K は ε に依存しない定数である.

定理 1 は上からの評価であったが，定理 2 では下からの評価を述べる.

定理 2. T は次の条件をみたすと仮定する.

(1) ν-可測集合 V ($\nu(V) > 0$) が (a) と (b) をみたす.

(a) $T_t(c_1) = 0$, で， $0 < \sup_{x\in(c_1,c_2)} T_t'(x) < L$ for $t \in V$, ただし，L は定数.

(b) 小さな定数 $\delta_1 > 0$ があって

$$\inf_{x\in C_{\delta_1}} h(x) > \gamma_1 > 0 \quad \text{かつ} \quad \inf_{x\in C_{\delta_1}} p(t,x) > p_1 > 0 \quad \text{for} \quad t \in V,$$

ここで $C_{\delta_1} = [c_1, c_1 + \delta_1]$ で，h は μ の密度関数, γ_1 と p_1 は定数.

(2) $p(t,x) = p(t)$ は 0 の小さな近傍では x に依存しない.

(3) 定数 $d > 1$ があり，ほとんどすべての $t \in W$ に対して $d_t \ge d > 1$ となる

このとき, ランダム写像 $T = \{T_t; p(t,x) : t \in W\}$ の絶対連続な σ-有限不変測度 μ は

$$\mu([\varepsilon,\varepsilon_0]) \ge K \int_{[\varepsilon,\varepsilon_0]} x^{1-d} m(dx) \quad \text{for } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

をみたす．ここで，ε_0 は小さな定数で， K は ε に依存しない定数である．

定理1と2を用いると，例2で考えたランダム写像の不変測度 μ は，$0<\varepsilon<\varepsilon_0$ に対して

$$K_1\int_{[\varepsilon,\varepsilon_0]} x^{1-a}\,m(dx)\le \mu([\varepsilon,\varepsilon_0])\le K_2\int_{[\varepsilon,\varepsilon_0]} x^{1-a-\kappa}\,m(dx)$$

をみたす．ここで，ε_0 は小さな定数，K_1 と K_2 は ε に依存しない定数である．また，$\kappa>0$ は任意の小さな定数である．

注意. $1<a<b$ と $0<p<1$ を定数とし，T_a と T_b がそれぞれ確率 p と $1-p$ で選ばれるランダム力学系は，絶対連続な σ-有限不変測度 μ をもち，$0<\varepsilon<\varepsilon_0$ に対して

$$K_1\int_{[\varepsilon,\varepsilon_0]} x^{1-a}\,m(dx)\le \mu([\varepsilon,\varepsilon_0])\le K_2\int_{[\varepsilon,\varepsilon_0]} x^{1-a}\,m(dx)$$

をみたす．先ほどと同じく，ε_0 は小さな定数，K_1 と K_2 は ε に依存しない定数である．このように，ランダム写像を構成する写像の個数を有限個にすると $\kappa>0$ が不要になる．

5　証明の基本方針

$A=[c_1,1]$ として，ランダム力学系の A における First return map を考える．ランダム力学系の First return map については [I2] で詳しく述べている．そして，ランダム力学系における First return map の不変測度から，もとのランダム力学系の不変測度をつくる．一般的な理論は，[I2] で詳しく述べているが，ここにも簡単に紹介しておこう．

まず，そのために記号を準備しておく．$\widetilde{A}=X\backslash A$ とし，ランダム写像 $T=\{T_t;p(t,x)\}$ に対して，2つの作用素 U と $\widetilde{U}: L^\infty(m)\to L^\infty(m)$ を

$$Uf(x)=\int_W p(t,x)\ f(T_t(x))\ \nu(dt),\ \ \widetilde{U}f=U(1_{\tilde{A}}\cdot f)\quad \text{for}\ \ f\in L^\infty(m)$$

として定める．

注意． T が決定論的写像なら，U は Koopman 作用素（Koopman 作用素については [Bo-G] や [L-M] など参照）となる．このことから，ここで定めた U は，決定論的写像に対する Koopman 作用素を一般化し，ランダム写像に対して定めたものといえる．

上記の 2 つの作用素 U と $\widetilde{U}$ を用いると，次のような定式化が可能である．

定理 B [I2]. μ_A をランダム写像 T の A 上の First return map R の不変測度とし，測度 μ を次のように定める：

$$\mu(D) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A \widetilde{U}^n \left(U 1_D \right) (x) \ \mu_A(dx) \quad \text{for any } D \in \mathcal{A}.$$

このとき，μ は T の不変測度となる．ただし，$\widetilde{U}^0 \left(U 1_D \right) = U 1_D$ とする．

注意. μ_A が有限測度であっても，μ が有限測度とは限らないのは，決定論的な力学系の場合と同様である．

[I1] で得られた結果と定理 B を利用して，[I2] では定理 A を証明している．定理 B は密度関数の評価にも活用可能である．[I2] において絶対連続な不変測度 μ が有限測度であるか，無限測度であるかを調べた方法と本質的に似た手法で，定理 1 や定理 2 を示すことができる．

参考文献

[Ba-G] W.Bahsoun and P.Góra, *Position dependent random maps in one and higher dimensions*, Studia Math. 166 (2005), 271-286.

[Bo-G] A.Boyarsky and P. Góra, *Laws of Chaos*, Birkhäuser, Boston, 1997.

[I1] T.Inoue, *Invariant measures for position dependent random maps with continuous random parameters*, Studia Math. 208 (2012), 11-29.

[I2] T.Inoue, *First return maps of random maps and invariant measures*, Nonlinearity 33 (2020), 249-275.

[井 1] 井上友喜，連続なランダムパラメータをもつランダム写像の不変測度とその評価，京都大学数理解析研究所講究録 1942 ランダム力学系理論とその応用, (2015), 59-65.

[井 2] 井上友喜：*The first return maps and invariant measures for random maps,* 京都大学数理解析研究所講究録 2028 ランダム力学系理論とその応用, (2017), 21-28.

[井 3] 井上友喜：*Indifferent fixed points of position dependent random maps and invariant measures,* 京都大学数理解析研究所講究録 2115 ランダム力学系理論の総合的研究, (2019), 91-96.

[L-M] A.Lasota and M.C.Mackey, *Chaos, fractals, and noise, Stochastic aspects of dynamics*, Appl. Math. Sci. 97, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1994.

[M] T.Morita, *Random iteration of one-dimensional transformations*, Osaka J. Math. 22 (1985), 489-518.

[Pe] S. Pelikan, *Invariant densities for random maps of the interval*, Trans. Amer. Math. Soc. 281 (1984), 813-825.

[T] M. Thaler, *Estimates of the invariant densities of endomorphisms with indifferent fixed points*, Israel J.Math. 37 (1980), 304-314.