区分的に凸なランダム写像の不変測度について

井上 友喜

愛媛大学大学院 理工学研究科

豊川 永喜

北見工業大学 工学部

概 要

本稿では，単位区間上の区分的に凸な写像を確率的に選択して反復するランダム力学系を考え，ルベーグ測度に絶対連続かつエルゴード的な σ-有限不変測度が存在するための十分条件を与える．また，得られた不変測度がいつ無限測度になるか判定する条件も与える．主結果の具体例として，中立不動点及び確率的に縮小的な枝を同時に持つランダム写像を含む．

1　導入

本稿では，ランダム力学系の特別な場合である区分的に (下に) 凸な一次元写像をランダムに反復して得られるランダム力学系に焦点を絞り，それに対する不変測度の存在について考察する．次の単位区間上の写像は，最も単純な区分的に凸な写像の例のひとつである：

$$Tx := \begin{cases} x\left(1+4x^2\right) & x \in [0,1/2], \\ (2x-1)^3 & x \in (1/2,1]. \end{cases}$$

上記の写像 T において，原点が中立不動点，つまり $T0=0$ かつ $T'0=1$ であり，その点において一様拡大性が崩れている．更に，中立不動点の右の枝による逆像 $1/2$ に

おける微分係数は，$T'1/2 = 0$ と非常に強い縮小性を示す．そのため典型的な初期点から始まる軌道は，非常に長い時間原点近傍に滞在し，一時的に乱雑に動き，再び原点近傍に捕らわれる，という意味で間欠性を示す (図 1 参照)．本稿では，このような例を含む写像たちを確率的に選択し，反復合成して得られるランダム力学系の統計的性質，特にルベーグ測度に絶対連続な不変測度の存在について考察する．

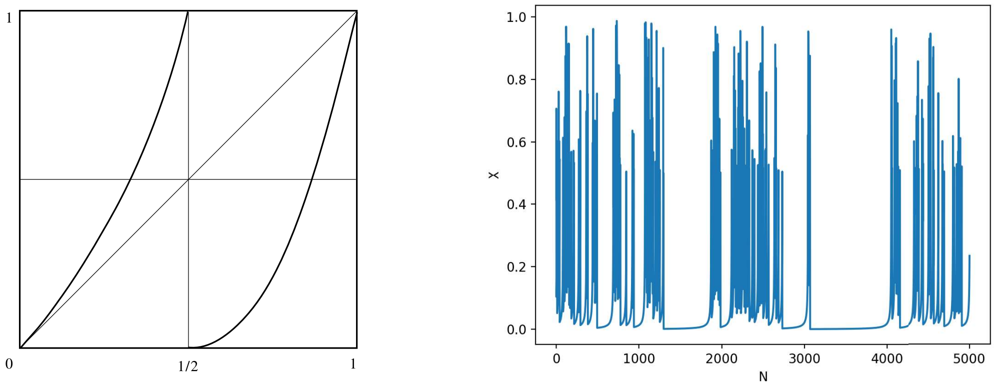

図 1: T のグラフ (左) と典型的な初期点 x_0 の T による軌道 (右)
右図では横軸が反復回数 N，縦軸が位置 $T^N x_0$ を表す．

決定論的な場合 (すなわち単一の写像のみを考えている場合) の区間上の区分的に凸な写像に対する絶対連続な不変確率測度の存在およびエルゴード性より強い統計的性質である exactness に関しては [2, 6] 参照．[3] では同様に決定論において，絶対連続な不変測度が σ-有限な無限測度になる場合を取り扱っている．決定論的な写像ではない，共通の中立不動点と確率的に縮小的な枝を同時に持つランダム写像については，例えば [9] を参照．

2　設定

本節では，数学的な設定を述べる．以下，$X = [0, 1]$，$\mathcal{B}$ を X 上ボレル集合族とし，λ を $(X, \mathcal{B})$ 上のルベーグ測度とする．写像のパラメータ空間を $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ とし，それぞれ可測構造および確率測度 $\nu_{\mathbb{A}}$, $\nu_{\mathbb{B}}$ が備わっているとする．各パラメータ $\alpha \in \mathbb{A}$, $\beta \in \mathbb{B}$ に対し，X 上の写像を，

$$T_{\alpha,\beta}x = \begin{cases} \tau_\alpha x & x \in [0, 1/2], \\ S_\beta x & x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

で与える．ただし，$\tau_\alpha : [0, 1/2] \to X$ および $S_\beta : (1/2, 1] \to X$ はそれぞれ連続かつ非特異，つまり $\lambda(N) = 0$ のとき $\lambda(T_{\alpha,\beta}^{-1} N) = 0$ が成立する．更にいくつかの仮定 (下記条件 (0)–(3) 参照) を満たすとする. まず，ランダム力学系を考えるため以下の条件 (0) を仮定する.

(0) λ に関してほとんどすべての $x \in X$ について，$\tau_\alpha(x)$ と $S_\beta(x)$ は $\alpha \in \mathbb{A}$ と $\beta \in \mathbb{B}$ についてそれぞれ可測.

本稿では条件 (0) に加え，$\{T_{\alpha,\beta} : \alpha \in \mathbb{A},\ \beta \in \mathbb{B}\}$ は以下の条件 (1) および (2) (区分的凸性，図 2 参照) を満たすとする：

$\nu_{\mathbb{A}}$ に関してほとんどすべての $\alpha \in \mathbb{A}$ と $\nu_{\mathbb{B}}$ に関してほとんどすべての $\beta \in \mathbb{B}$ について,

(1) τ_α と S_β は定義域上で C^1 級関数かつ S_β は区間 $[1/2, 1]$ に連続的に拡張可能で, 拡張したものも S_β と表すと，$\tau_\alpha(0) = 0$，$\tau_\alpha(1/2) = 1$，$S_\beta(1/2) = 0$;

(2) τ'_α および S'_β は区間 $(0, 1/2)$ 上および区間 $(1/2, 1)$ 上でそれぞれ広義単調増加であり，$\tau'_\alpha(0) \geq 1$，$S'_\beta(1/2) \geq 0$ かつ区間 $(0, 1/2)$ 上で $\tau'_\alpha(x) > 1$，区間 $(1/2, 1)$ 上で $S'_\beta(x) > 0$.

注意 1. 本稿における区分的に凸なランダム写像は，$\tau'_\alpha(0) = 1$ または $S'_\beta(1/2) = 0$ であることを除外していない．すなわち，本稿で扱われるランダム力学系は，共通の中立不動点や臨界点が存在する場合を含む (4 節具体例参照).

本稿のランダム力学系は条件 (0)–(2) の下，以下のように定義される．ランダム力学系 $\{T_{\alpha,\beta}; \nu_{\mathbb{A}}, \nu_{\mathbb{B}} : \alpha \in \mathbb{A},\ \beta \in \mathbb{B}\}$ を次の推移確率で定まるマルコフ過程とする：λ に関してほとんどすべての点 $x \in X$ および任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して,

$$\mathbb{P}(x, A) = \int_{\mathbb{A}\times\mathbb{B}} 1_A\left(T_{\alpha,\beta}x\right) d\nu_{\mathbb{A}}(\alpha) d\nu_{\mathbb{B}}(\beta).$$

$T_{\alpha,\beta}$ の非特異性から，上記の推移確率は $\lambda(N) = 0$ のとき $\mathbb{P}(x, N) = 0$ を λ 関してほとんどすべての $x \in X$ について満たす. それ故，ランダム力学系 $\{T_{\alpha,\beta}; \nu_{\mathbb{A}}, \nu_{\mathbb{B}} : \alpha \in \mathbb{A},\ \beta \in \mathbb{B}\}$ に対応するマルコフ作用素 $P : L^1(X, \lambda) \to L^1(X, \lambda)$ を各 $f \in L^1(X, \lambda)$ および $A \in \mathcal{B}$ に対し,

$$\int_A Pf d\lambda = \int_X f \cdot \mathbb{P}(\cdot, A) d\lambda \tag{2.1}$$

により定義できる．ただし作用素がマルコフ作用素であるとは，任意の非負関数 $f \in L^1(X, \lambda)$ に対して $Pf \geq 0$ および $\|Pf\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}$ を満たすときにいう．

(2.1) で定まるマルコフ作用素に対して，本稿における主対象である不変測度の定義を与える．

定義 1 (不変測度)**.** μ がマルコフ作用素 P に対する**絶対連続 σ-有限不変測度**であるとは，μ が λ に絶対連続な σ-有限測度であり，更に，μ のラドン=ニコディム微分 $d\mu/d\lambda$ が P の不動点である場合にいう．

注意 2. マルコフ作用素の定義域は $L^1(X,\lambda)$ であったが，マルコフ作用素の正値性から自然に σ-有限測度の密度関数全体に拡張される．また，$\mathbb{A}$ および $\mathbb{B}$ がそれぞれ 1 点集合であるとき ($T = T_{\alpha,\beta}$ とおく)，不変測度の定義は従来の定義 $\mu \circ T^{-1} = \mu$ と一致する．

上記の条件 (0)–(2) を満たす区分的に凸なランダム力学系に対する，λ に絶対連続な σ-有限不変測度を構成するために，以下の技術的な条件 (3) を導入する．そのために必要な記号を定義する．各 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ に対して，$x_1^{\boldsymbol{\alpha}} = x_1 \coloneqq 1/2$，また，各 $n \geq 1$ に対して $x_{n+1}^{\boldsymbol{\alpha}} \coloneqq \tau_{\alpha_{n-1}}^{-1} \circ \cdots \circ \tau_{\alpha_1}^{-1}(1/2)$ と定める．つまり，$x_n^{\boldsymbol{\alpha}}$ は左の枝 $\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}, \cdots$ による 1/2 の $n-1$ 回逆像をとったものである．更に各 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ と $n \geq 1$ に対し，$X_n^{\boldsymbol{\alpha}} \coloneqq \left(x_{n+1}^{\boldsymbol{\alpha}}, x_n^{\boldsymbol{\alpha}}\right]$ と定義すると，これは区間 $(0, 1/2]$ の分割を与える．

以下右の枝 S_β による $x_n^{\boldsymbol{\alpha}}$ 達の逆像を同様に定義するが，S_β が必ずしも全射とは限らないため，必要な記号を先に定義する：

定義 2. $\eta : \mathbb{A}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{B} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ を $S_\beta(1) \in X_{\eta(\boldsymbol{\alpha},\beta)}^{\boldsymbol{\alpha}}$ で定まる写像として定義する．

今定義された η を用いて，$y_{n+1}^{\boldsymbol{\alpha},\beta}$ を $x_{\eta(\boldsymbol{\alpha},\beta)+n}^{\boldsymbol{\alpha}}$ の右の枝 S_β による逆像，すなわち各 $n \geq 1$ に対して，

$$
\begin{aligned}
y_1^{\boldsymbol{\alpha},\beta} &= y_1 \coloneqq 1, \\
y_{n+1}^{\boldsymbol{\alpha},\beta} &\coloneqq S_\beta^{-1}\left(x_{\eta(\boldsymbol{\alpha},\beta)+n}\right)
\end{aligned}
$$

と定める．更に各 $n \geq 1$ に対して，$Y_n^{\boldsymbol{\alpha},\beta} \coloneqq \left(y_{n+1}^{\boldsymbol{\alpha},\beta}, y_n^{\boldsymbol{\alpha},\beta}\right]$ と定めと，区間 $(1/2, 1]$ の分割を与える．

以下では，$\nu_{\mathbb{A}}^\infty$ を $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ 上の $\nu_{\mathbb{A}}$ の直積確率測度とする．条件 (1) と (2) から，$\nu_{\mathbb{A}}^\infty$ に関してほとんどすべての $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ と $\nu_{\mathbb{B}}$ に関してほとんどすべての $\beta \in \mathbb{B}$ に対して，X の分割 $\left\{X_n^{\boldsymbol{\alpha}}, Y_n^{\boldsymbol{\alpha},\beta} : n \geq 1\right\}$ は次を満たす：各 $n \geq 1$ に対して，$T_{\alpha_n,\beta} X_n^{\boldsymbol{\alpha}} = X_{n-1}^{\boldsymbol{\alpha}}$，$T_{\alpha,\beta} Y_{n+1}^{\boldsymbol{\alpha},\beta} = X_{\eta(\boldsymbol{\alpha},\beta)+n}^{\boldsymbol{\alpha}}$ かつ $T_{\alpha,\beta} Y_1^{\boldsymbol{\alpha},\beta} = \left(x_{\eta(\boldsymbol{\alpha},\beta)+1}^{\boldsymbol{\alpha}}, S_\beta(1)\right] \subset X_{\eta(\boldsymbol{\alpha},\beta)}^{\boldsymbol{\alpha}}$.

上で定義した記号を用いて，条件 (3) を導入する．

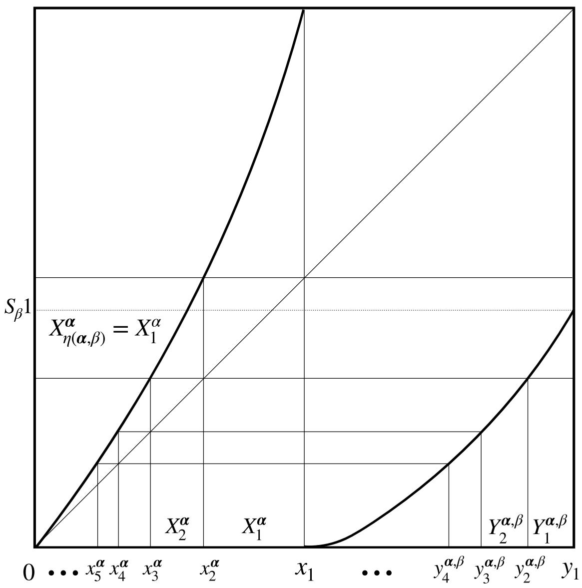

図 2: $T_{\alpha,\beta}$ のグラフの一例．この例では，τ_α はある共通の τ に一致しており，また，$\eta(\alpha,\beta) = 1$ である．

(3) 任意の $\delta > 0$ に対してある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して以下の不等式を満たす：

$$\int_{\mathbb{A}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{B}} \frac{y^{\alpha,\beta}_{N_0+1} - 1/2}{x^{\alpha}_1 - x^{\alpha}_2} d\nu^{\infty}_{\mathbb{A}}(\alpha)\nu_{\mathbb{B}}(\beta) < \delta.$$

注意 3. $\nu^{\infty}_{\mathbb{A}}$ に関してほとんどすべての $\alpha \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ と $\nu_{\mathbb{B}}$ に関してほとんどすべての $\beta \in \mathbb{B}$ に対して，$y^{\alpha,\beta}_n \to 1/2$ $(n \to \infty)$ は常に成立するが，条件 (3) ではより強い意味での収束を仮定している．また，条件 (3) の十分条件として，例えば以下の条件が得られる：$\mathbb{A}$ が有限集合で，更に，ある $\beta_0 \in \mathbb{B}$ が存在して $S_{\beta_0} \le S_\beta$ がほとんどすべての $\beta \in \mathbb{B}$ で成立するならば，条件 (3) が成立する．

3 主結果

本節では，前節で導入した条件 (0)–(3) を満たす区分的に凸なランダム写像に対し，主結果であるエルゴード的な絶対連続 σ-有限不変測度の存在について述べる．

定義 3 (不変集合，エルゴード性)**.** 集合 $E \in \mathcal{B}$ がマルコフ作用素 P に対する**不変集合**であるとは，$P^* 1_E = 1_E$ であるときをいう．ただし，ここで $P^* : L^\infty(X,\lambda) \to L^\infty(X,\lambda)$ は P の随伴作用素．マルコフ作用素 P が測度 μ について**エルゴード的**であるとは，任意の不変集合 E が $\mu(E) = 0$ または $\mu(X \setminus E) = 0$ を満たすときにいう．

本稿の主結果は次の定理である．

定理 3.1. $\left\{T_{\alpha,\beta}; \nu_{\mathbb{A}}, \nu_{\mathbb{B}} : \alpha \in \mathbb{A}, \beta \in \mathbb{B}\right\}$ を条件 (0)–(3) を満たす区分的に凸なランダム写像とする．このとき，λ に絶対連続かつエルゴード的な σ-有限不変測度 μ がただ一つ存在する．更に，μ の密度関数は 0 の小さい近傍を除外すると，ほとんどいたるところで有界である．

証明はマルコフ作用素 (ランダム写像) に対する，誘導作用素 (ランダム誘導写像) という手法 ([1, 4, 8] 参照) を用いる．更に，定理 3.1 で得られた不変測度 μ がいつ無限測度になるかの判定条件を与える結果も成立する．

系 3.2. $\left\{T_{\alpha,\beta}; \nu_{\mathbb{A}}, \nu_{\mathbb{B}} : \alpha \in \mathbb{A}, \beta \in \mathbb{B}\right\}$ を定理 3.1 と同様条件 (0)–(3) を満たす区分的に凸なランダム写像とする．また，ある $\alpha_0 \in \mathbb{A}$ が存在して，$\nu_{\mathbb{A}}(\{\alpha_0\}) > 0$ かつ $\tau_{\alpha_0} \geq \tau_\alpha$ が $\nu_{\mathbb{A}}$ に関してほとんどすべての $\alpha \in \mathbb{A}$ について成り立つと仮定する．このとき，定理 3.1 で与えられる μ は十分大きな n に対して，

$$\mu\left(X_n^{\alpha_0}\right) \approx \int_{\{\beta\in\mathbb{B}:\eta(\alpha_0,\beta)<n\}} \left(y^{\alpha_0,\beta}_{n+1-\eta(\alpha_0,\beta)} - \frac{1}{2}\right) d\nu_{\mathbb{B}}(\beta) + \nu_{\mathbb{B}}\left\{\beta \in \mathbb{B} : \eta(\boldsymbol{\alpha}_0, \beta) \geq n\right\}$$

が成立する．ただし，$\boldsymbol{\alpha}_0 = (\alpha_0, \alpha_0, \alpha_0, \cdots) \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ と置いた．

注意 4. 系 3.2 は，不変測度 μ は $y_n^{\alpha_0,\beta}$ が 1/2 に収束する早さが遅いほど，右端点 $S_\beta(1)$ の値が 0 に近い (S_β が縮小的である) ほど無限測度になりやすくなることを主張している．決定論的な単一の変換を考えると $\eta < \infty$ なので，系 3.2 の漸近式の第二項は十分大きな n で消滅する．そのため，系 3.2 の漸近式の第二項により不変測度が無限測度になることは，ランダム力学系特有の現象と言える．

系 3.2 内における α_0 の存在について，$\nu_{\mathbb{A}}(\alpha_0) > 0$ の条件を満たさない場合についても，類似の不等式評価が成立するが簡単のため省略する．

4 具体例

この節では，定理 3.1 および系 3.2 が適用可能な幾つかの具体例を提示する．最初の例は，単純な区分的に線形な写像であるが，右の枝を確率的に強い縮小性を持つものにすることで，不変測度が無限測度になるランダム写像の例である．

例 1. この例では，設定にあった τ_α がパラメータ α に依存しないため，α を省略して記述する．パラメータ空間 $\mathbb{B}$ を $\mathbb{N}$ の部分集合とし，$\mathbb{B}$ 上で確率測度 $\nu_{\mathbb{B}}$ が与えられていて，$p_\beta := \nu_{\mathbb{B}}(\{\beta\})$ とする．各 $\beta \in \mathbb{B}$ に対し，T_β を，

$$T_\beta x = \begin{cases} 2x & x \in [0, 1/2], \\ 2^{-\beta}(2x-1) & x \in (1/2, 1] \end{cases} \tag{4.1}$$

により定義する．このとき，条件 (0)–(2) は明らかに満たされており，$x_n = 2^{-n}$ であることから，$\eta(\beta) = \beta$ かつ

$$y_{n+1}^{\beta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

であることから条件 (3) も満たされる．以上から，定理 3.1 と系 3.2 を適用することにより次を得る：

命題 1. ランダム写像 (4.1) は絶対連続かつエルゴード的な σ-有限不変測度 μ を持ち，十分大きな n に対して，

$$\mu\left(\left(2^{-(n+1)}, 2^{-n}\right]\right) \approx \frac{1}{2^n}\sum_{\beta=1}^{n-1} p_\beta + \sum_{\beta \geq n} p_\beta$$

を満たす.

上の命題から，例えば，ある $k \geq 2$ を用いて $\mathbb{B} = \{[k^n] : n \geq 1\}$ かつ $p_{[k^n]} = 2^{-n}$ である場合，μ が無限測度になる必要十分条件は $k \geq 2$ であることがわかる.

次の例は，共通の中立不動点を持つランダム写像の例である.

例 2. パラメータ空間を，ある $0 < \alpha_0 < \alpha_1$ を固定して，$\mathbb{A} = [\alpha_0, \alpha_1]$，$\mathbb{B}$ を可測空間とする．$\nu_{\mathbb{A}}$ と $\nu_{\mathbb{B}}$ をそれぞれ $\mathbb{A}$，$\mathbb{B}$ 上の確率測度とし，$\nu_{\mathbb{A}}(\{\alpha_0\}) > 0$ を満たすとする．各 $\alpha \in \mathbb{A}$，$\beta \in \mathbb{B}$ に対し，

$$T_{\alpha,\beta} x = \begin{cases} x(1 + 2^\alpha x^\alpha) & x \in [0, 1/2] \\ S_\beta x & x \in (1/2, 1]. \end{cases} \tag{4.2}$$

と定める．ただし，$\{S_\beta : \beta \in \mathbb{B}\}$ は条件 (0)–(3) を満たし，更にある $0 < \gamma < 1$ が存在し，$\operatorname{ess\,inf}_{\beta\in\mathbb{B}} S'_\beta(1/2) > \gamma$ が成立すると仮定する．このとき，よく知られた [7, 10] の結果から，

$$y_{n+1}^{\boldsymbol{\alpha_0},\beta} - \frac{1}{2} \approx n^{-1/\alpha_0}$$

と計算でき，定理 3.1 と系 3.2 を適用することで，次を得る：

命題 2. ランダム写像 (4.2) は絶対連続かつエルゴード的な σ-有限不変測度 μ を持ち，十分大きな n に対して，

$$\mu\left(X_n^{\alpha_0}\right) \approx n^{-1/\alpha_0}$$

を満たす．帰結として，μ が無限測度となる必要十分条件は $\alpha_0 \geq 1$ である．

次の例は，(4.2) 式で定まる上の例と似たランダム写像であるが，不変測度がより無限測度になりやすい例である．

例 3. パラメータ空間 $\mathbb{A} \subset (0, +\infty)$ および $\mathbb{B} \subset (1, +\infty)$ をそれぞれコンパクトな部分集合とする．また $\nu_{\mathbb{A}}$ および $\nu_{\mathbb{B}}$ を $\mathbb{A}$ および $\mathbb{B}$ 上の確率測度とし，$\alpha_0 = \min_{\mathbb{A}} \alpha$ に対し $\nu_{\mathbb{A}}(\{\alpha_0\}) > 0$ を満たすと仮定する．各 $\alpha \in \mathbb{A}$，$\beta \in \mathbb{B}$ に対し，

$$T_{\alpha,\beta}x = \begin{cases} x(1 + 2^\alpha x^\alpha) & x \in [0, 1/2] \\ 2^\beta \left(x - \frac{1}{2}\right)^\beta & x \in (1/2, 1] \end{cases} \tag{4.3}$$

と定める．このとき，各 $\alpha > 0$ と $\beta > 1$ に対し $T_{\alpha,\beta}$ は中立不動点 0 を持ち，更に，その逆像 1/2 上での傾きが 0 である (図 3 参照).

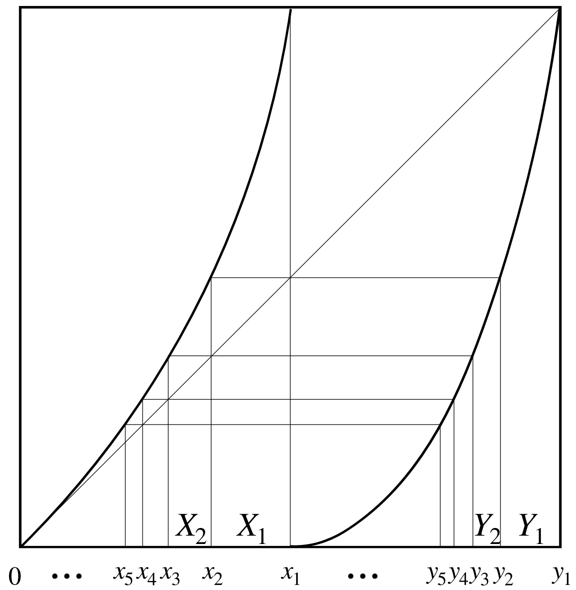

図 3: $T_{\alpha,\beta}$ のグラフ

再び計算により，

$$y_{n+1}^{\alpha,\beta} - \frac{1}{2} \approx n^{-1/(\alpha\beta)}$$

であるから以下を得る：

命題 3. ランダム写像 (4.3) は絶対連続かつエルゴード的な σ-有限不変測度 μ を持ち，十分大きな n に対して，

$$\mu\left(X_n^{\alpha_0}\right) \approx \int_{\mathbb{B}} n^{-1/(\alpha_0\beta)} d\nu_{\mathbb{B}}(\beta)$$

を満たす．

上の命題の帰結として，$\nu_{\mathbb{B}}\{\beta \in \mathbb{B} : \alpha_0\beta \geq 1\} > 0$ のとき μ は無限測度であり，また，$\alpha_0 < 1/\max_{\mathbb{B}}\beta$ のとき μ は有限測度ということがわかる．

最後の例は，例 3 と似ているが，1/2 が平坦な点となっているため，不変測度が常に無限測度になってしまう例である．

例 4. パラメータ空間 $\mathbb{A} \subset (0, +\infty)$ および $\mathbb{B} \subset [1, +\infty)$ をコンパクト部分集合とし，$\nu_{\mathbb{A}}$ および $\nu_{\mathbb{B}}$ をそれぞれのパラメータ空間上の確率測度とする．各 $\alpha \in \mathbb{A}$，$\beta \in \mathbb{B}$ に対し，

$$T_{\alpha,\beta}x = \begin{cases} x(1 + 2^{\alpha}x^{\alpha}) & x \in [0, 1/2] \\ \exp\left(2^{\beta} - (x - 1/2)^{-\beta}\right) & x \in (1/2, 1] \end{cases} \tag{4.4}$$

と定める．このとき，$T_{\alpha,\beta}$ は 1/2 における任意の階数の微分係数が 0 となる．前の例と同様にして，

$$y_{n+1}^{\alpha,\beta} - \frac{1}{2} \approx (\log n)^{-1/\beta}$$

であることから次を得る：

命題 4. ランダム写像 (4.4) は絶対連続かつエルゴード的な σ-有限不変測度 μ を持ち，十分大きな n に対して，

$$\mu\left(X_n^{\alpha}\right) \approx \int_{\mathbb{B}} (\log n)^{-1/\beta}\, d\nu_{\mathbb{B}}(\beta)$$

を満たす．すなわち，$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \nu_{\mathbb{A}}, \nu_{\mathbb{B}}$ の選択に依らず，μ は常に無限測度となる．

参考文献

[1] S. R. Foguel, *Selected topics in the study of Markov operators*, Carolina Lecture Series, 9. University of North Carolina, Department of Mathematics, Chapel Hill, N.C., 1980.

[2] T. Inoue, Asymptotic stability of densities for piecewise convex maps, *Ann. Polon. Math.*, **57** (1992), 83–90.

[3] T. Inoue, Weakly attracting repellors for piecewise convex maps, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **9** (1992), 413–430.

[4] T. Inoue, First return maps of random map and invariant measures, *Nonlinearity*, **33** (2020), 249–275.

[5] T. Inoue and H. Toyokawa, Invariant measures for random piecewise convex maps, preprint.

[6] A. Lasota and J. A. Yorke, Exact dynamical systems and the Frobenius-Perron operator, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **273** (1982), 375–384.

[7] M. Thaler, Transformations on $[0,1]$ with infinite invariant measures, *Israel J. of Math.*, **46**, (1983), 67–96

[8] H. Toyokawa, σ-finite invariant densities for eventually conservative Markov operators, *Discrete Continuous Dynamical Systems- A*, **40** (2020): 2641–2669.

[9] H. Toyokawa, On the existence of a σ-finite acim for a random iteration of intermittent Markov maps with uniformly contractive part, *Stochastics and Dynamics*, **21**, (2021), 14 pages.

[10] L.-S. Young, Recurrence times and rates of mixing *Israel J. Math.*, **110** (1999), 153–188.

Tomoki Inoue

Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

e-mail address: `inoue.tomoki.mz@ehime-u.ac.jp`

Hisayoshi Toyokawa

Faculty of engineering, Kitami Institute of Technology

e-mail address: `h_toyokawa@mail.kitami-it.ac.jp`