（ランダム）力学系における Lyapunov 非正則集合の観測可能性

東海大学 理学部数学科

中野雄史

概要

Lyapunov 指数はカオス性の指標として自然科学で広く用いられているが，その存在についてはほとんど議論されていない．本稿の前半では，Lyapunov 非正則集合と呼ばれる Lyapunov 指数が存在しないような点全体の集合が，Lebesgue 測度正となるかという問題を考える．我々は，Colli-Vargas [5] で導入された頑強なホモクリニック接触を持つ曲面上の微分同相写像を含む，様々な既知の非双曲力学系が，Lebesgue 測度正の Lyapunov 非正則集合を持つことを報告する．一方後半で，物理ノイズ下では Lyapunov 非正則集合がつねに Lebesgue 測度 0 となることを報告する．合わせて，Guarino-Guihéneuf-Santiago [11] の 8 の字アトラクターについてはある種の非物理的なノイズに対しても Lyapunov 非正則集合が Lebesgue 測度正から 0 へと変わることを報告する．

1　決定論的力学系における Lyapunov 非正則集合の観測可能性

Lyapunov 指数は軌道の初期値鋭敏性を測る量であり，自然科学分野ではカオスの検出のために頻繁に計算されている．しかしながら，Lyapunov 指数がそもそも存在するかについてはほとんど議論がなされていない．本稿の前半では，Lyapunov 指数が物理的に**観測可能**な集合（つまり，Lebesgue 測度正の集合）上で存在しないような力学系が豊富にあることを報告する．M をコンパクトな Riemann 多様体とし，$f : M \to M$ をその上の可微分写像とする．点 $x \in M$ が **Lyapunov 非正則である**（*Lyapunov irregular*）とは，非零ベクトル $v \in T_xM$ が存在して，x の v に対する Lyapunov 指数

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)v\|$$

が存在しないことを言う．v に依存していることを強調したいときは，v について Lyapunov 非正則であると言う．同様に，点 x が Birkhoff 非正則である（Birkhoff irregular）とは，連続関数 $\varphi : M \to \mathbb{R}$ が存在して，その時間平均 $\lim_{n\to\infty}(\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)))/n$ が存在しないことを言う．時間平均が存在する場合は，x は Birkhoff 正則であると言う．さらに，Lyapunov 非正則（resp. Birkhoff 非正則）な点全体の集合を f の Lyapunov 非正則集合（resp. Birkhoff 非正則集合）と言う．これらの用語は Abdenur-Bonatti-Crovisier [1] を元にしているが，彼らは Lyapunov/Birkhoff 非正則集合の残留性（residuality）を問題にしており，我々の興味とは異なる．実際，非正則集合の残留性は通有的な性質であるが（[1, Theorem 3.15]），非正則集合が Lebesgue 測度正であるという性質は公理 A 微分同相写像については成り立たない（[25]）．Ruelle [22] による用語である歴史的挙動（historic behavior）も Birkhoff 非正則性を意味する上で広く用いられ，特に Takens

問題 [24] 以降の，Birkhoff 非正則集合が Lebesgue 測度正であるかどうかを議論している文献でよく使用されている（[14,16] など参照）．

Oseledets の乗法エルゴード定理から，Lyapunov 非正則集合は任意の不変測度について測度 0 となる．しかし，これは一般には Lyapunov 非正則集合が Lebesgue 測度正になるかどうかについて何も示唆しない．実際，Birkhoff のエルゴード定理は Birkhoff 非正則集合が任意の不変測度について測度 0 であることを保証するが，多様な力学系について Birkhoff 非正則集合の Lebesgue 測度が正となることが知られている（[14,16,22,24] など参照）．さらに，Birkhoff 非正則集合が Lebesgue 測度正となることは力学系の非双曲性と強く関連しており，Palis [21] および Takens [24] による Birkhoff 非正則集合の Lebesgue 測度に関する相補的な 2 つの予想が可微分力学系理論における深い研究領域を切り開いたことを考慮すれば，Lyapunov 非正則集合が Lebesgue 測度正となるような広い力学系のクラスを見つけることは重要な課題であろうと期待される．

一方で，Lyapunov 非正則集合が Lebesgue 測度正となることが知られている例は，8 の字アトラクターと呼ばれる，吸引的なホモクリニック・ループを持つ曲面上の流れだけ（[20]）である．しかしながら，ホモクリニック・ループは微小摂動によって簡単に破壊される．そのため，本稿では頑強なホモクリニック接触を，Lebesgue 測度正の Lyapunov 非正則集合とともに持つ曲面上の $\mathcal{C}^r$ 微分同相写像（$r \geq 2$）を与える．Newhouse [19] は，M が閉曲面のとき，任意のホモクリニック接触から厚い基本集合に結び付けられた頑強なホモクリニック接触を作り出せること，つまり，f がホモクリニック接触を持つとき $\mathcal{C}^r$ 級微分同相写像全体の集合 $\mathrm{Diff}^r(M)$ の開集合 $\mathcal{O}$ が存在して $f \in \overline{\mathcal{O}}$ であり，任意の $g \in \mathcal{O}$ が基本集合およびそれに結び付けられたホモクリニック接触を持つことを示した．この開集合 $\mathcal{O}$ は Newhouse 領域と呼ばれる．

前半の主定理を述べる前の最後の注意として，f が Lebesgue 測度正の Lyapunov 非正則集合を持つ $\mathcal{C}^1$ 級微分同相写像であって $\tilde{f}$ が f に $\mathcal{C}^1$ 級微分同相写像 h によって共役，つまり $\tilde{f} = h^{-1} \circ f \circ h$ となっているとき，$\tilde{f}$ の Lyapunov 非正則集合も Lebesgue 測度正となることを確認されたい．本稿前半の主結果は次である（桐木紳氏，李暁龍氏，相馬輝彦氏との共同研究）．

定理 A. $\mathrm{Diff}^r(M)$ における Newhouse 領域内の微分同相写像 g が存在して（M: 閉曲面，$2 \leq r < \infty$），任意の g の近傍 $\mathcal{O}$ に対して非可算集合 $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}$ が存在して以下が成り立つ：

(1) 任意の $f, \tilde{f} \in \mathcal{L}$ は，$f \neq \tilde{f}$ のとき位相共役ではない;
(2) 任意の $f \in \mathcal{L}$ について開集合 $U_f \subset M$ と $V_f \subset \mathbb{R}^2$ が存在して（ただし TU_f と $U_f \times \mathbb{R}^2$ を同一視下している），任意の $x \in U_f$ は任意の $v \in V_f$ に対して Lyapunov 非正則.

さらに，$\mathcal{L}$ は 2 つの非可算集合 $\mathcal{R}$ と $\mathcal{I}$ に分けられ，$f \in \mathcal{R}$ のとき U_f の任意の点は Birkhoff 正則となり，$f \in \mathcal{I}$ のとき U_f の任意の点は Birkhoff 非正則となる．

注意 1 (定理 A の一般化)**.** R. Bowen が「曲面上の流れがヘテロクリニック接続によって結ばれた 2 つの散逸的サドル不動点を持つとき Birkhoff 非正則集合が Lebesgue 測度正となる」という事実を知っていたという有名な逸話があるが，その正確な証明は Gaunersdorfer [9] によって初めて与えられた（[23] 参照；ちなみに，我々は [13, Proposition 1.1] にてこの力学系についても Lyapunov 非正則集合が Lebesgue 測度正となることを示している）．しかし，やはりヘテロクリニック接続は微小摂動によって簡単に壊れるため，Takens は [24] で “固執的に”（in a persistent manner）Birkhoff 非正則集合が Lebesgue 測度正となることはあるのかを問うた．[16] において，桐木と相馬は曲面上の微分同相写像の任意の $\mathcal{C}^r$ 級 Newhouse 領域（$2 \leq r < \infty$）内に稠密な部分集合が存在し，その中の任意の力学系について Birkhoff 非正則集合が Lebesgue 測度正となること

を示し，その意味で Takens の問いに肯定的な解答を与えた．そこでは Colli-Vargas [5] で用いられたホモクリニック分岐の手法が中心的な役割を担っているが，定理 A においても Colli-Vargas の微分同相写像が用いられている．そのため，定理 A の結論が任意の Newhouse 領域の稠密部分集合内の微分同相写像についても成立するであろうことが自然と期待される．この一般化における最大の技術的問題点は，その稠密部分集合内の微分同相写像の再帰写像の高次項の制御であり，この問題があわられないという所に Colli-Vargas 微分同相写像の利点がある．詳しくは [13, §1.2] を参照していただきたい．

さらに，上記の [16] の結果は近年，幾何モデルを導入することで [4] にて $\mathcal{C}^\infty$ 級および $\mathcal{C}^\omega$ 級に拡張され，[5] の結果は blender-horseshoe を用いることで [15] にて $\mathcal{C}^1$ 級の頑強なホモクリニック接触を持つ 3 次元微分同相写像に拡張された．したがって，定理 A は $r = \infty, \omega$ でも成り立ち，M の次元が 3 以上の場合は $r = 1$ でも成り立つことが期待される．

注意 2 (非正則なベクトル)**.** Ott-Yorke [20] は開集合 U が存在して，その中の任意の点は任意の非零ベクトルについて Lyapunov 非正則であると主張しているが，我々は彼らの証明には大きなギャップがあると考えている（彼らの議論からすぐに導かれる結論は，U の任意の点が流れ方向の非零ベクトルについて Lyapunov 非正則であるということだけであり，これが任意の非零ベクトルに拡張できるかどうかは，少なくとも現在のところ不明である）．我々は定理 A に加え，Guarino-Guihéneuf-Santiago [11] によって構成された特別な 8 の字アトラクターを持つ曲面上の微分同相写像（命題 6 参照）が Lyapunov 非正則な点からなる開集合を持ち，その中の任意の点は，任意の非零ベクトルについて Lyapunov 非正則であることを示している（[13, Theorem 1.3]）．

注意 3 (Birkhoff 非正則集合との関係)**.** 定理 A 以外にも Birkhoff 非正則集合と Lyapunov 非正則集合の間の差を既存の文献から見つけることができる．実際，Ott-Yorke [20] ですでに，彼らの 8 の字アトラクターについては時間平均が存在するが Lyapunov 指数が存在しないような Lebesgue 測度正の集合があることが報告されている（[8] も参照）．逆に，Birkhoff 非正則集合が Lebesgue 測度正であるが Lyapunov 非正則集合が Lebesgue 測度 0 であるような微分同相写像が [6] で報告されている．

1.1 定理 A の力学系 g について

定理 A の証明およびそのアイディアは [13] で詳しく述べられているのでそちらを参照していただきたいが，ここでは参考として定理 A の g がどのような力学系であり，どのような性質を持つかを簡単に説明する．M を $[-2,2]^2$ を含む閉多様体とし，$g \equiv g_\mu : M \to M$（$\mu \in [-1,1]$）を以下を満たすような微分同相写像とする．

- （アフィン馬蹄）定数 $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, $\sigma > 2$ が存在して，

$$g(x,y) = \left(\pm\sigma\left(x \pm \frac{1}{2}\right), \pm\lambda y \mp \frac{1}{2}\right), \quad \left|x \pm \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{\sigma}, |y| \leq 1$$

  であり, $\lambda\sigma^2 < 1$;
- （2 次接触）$(0,-1)$ の近傍にある任意の (x,y) について，

$$g^2(x,y) = (\mu - x^2 - y, x).$$

このとき，Newhouse [18] の古典的な結果から，ある μ について g が $\mathcal{C}^2$ 級の頑強なホモクリニック接触を $\{y = 0\}$ で持つことがわかる．図 1 参照.

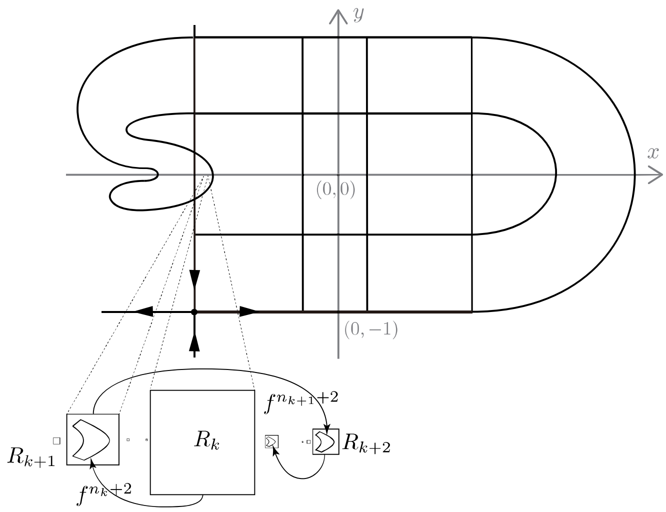

図 1　Colli-Vargas 微分同相写像

Colli と Vargas によって，g に関して次のことがわかっている．

定理 4 ([5])**.** g を上で与えられた頑強なホモクリニック接触を持つ曲面上の微分同相写像とする．このとき，g の任意の $\mathcal{C}^r$ 級近傍 $\mathcal{O}$（$2 \le r < \infty$）および任意の自然数の増大列 $(n_k^0)_{k\in\mathbb{N}}$ であって $n_k^0 = O((1+\eta)^k)$（$\eta > 0$）を満たすようなものについて，$\mathcal{O}$ 内の微分同相写像 f, 矩形の列 $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$, および $\mathcal{O}$ にのみ依存する自然数の増大列 $(\tilde{n}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して，$\tilde{n}_k = O(k)$ であって，任意の $k \in \mathbb{N}$ について次が成り立つ：

(a) $f^{n_k+2}(R_k) \subset R_{k+1}$;

(b) 任意の $(\tilde{x}_k + x, y) \in R_k$ について

$$f^{n_k+2}(\tilde{x}_k + x, y) = (\tilde{x}_{k+1} - \sigma^{2n_k}x^2 \mp \lambda^{n_k}y, \pm\sigma^{n_k}x).$$

ここで，$n_k := n_k^0 + \tilde{n}_k$ であり，$(\tilde{x}_k, 0)$ は R_k の中点である．

大雑把に言えば，R_k から R_{k+1} へ再帰する間では，おおよそ n_k^0 の時間だけ馬蹄による拡大・縮小が起き，その後ホモクリニック接触によって（ほぼ）90° 回転が起きるが，定理 4 ではこの n_k^0 が任意に制御出ることを意味している．これによって，Lyapunov 非正則性を引き起こすための時系列を作り出すことが可能となる（詳細については [13, §4.2-4.3] 参照）．ちなみに Birkhoff（非）正則性を導くためにはこれと別の機構が必要になるが，実はその部分の議論についても Colli-Vargas [5] で開発された道具（coding の任意制御）が利用可能であることがわかる（[13, §4.4] 参照）．

2　ランダム力学系における Lyapunov 非正則集合の観測可能性

前節での説明の通り，多くの力学系に対して Birkhoff 非正則集合が Lebesgue 測度正となることが示されている．一方で驚くべきことに，Araújo は [2] の中で，物理ノイズ（定義 5 参照）の元では任意の微分同相写像の Birkhoff 非正則集合が Lebesgue 測度 0 となることを示した．そのため，当然ながら次の疑問が生じる：

物理ノイズ下では Lyapunov 非正則集合は Lebesgue 測度 0 か？

前節で見た通り，決定論的力学系においては Birkhoff 非正則集合と Lyapunov 非正則集合の間には一般には関連性がなかったことに注意されたい（そのため，Araújo の結果があっても上の問いが意味を持つ）．本節では，この問いへ肯定的な回答が与えられることを報告する．前述の通り Lyapunov 指数は自然科学分野において広く利用されている統計量であるため，この結論は重要な意味を持つと考えられる．

後半の主定理を述べるために記号を準備する．f が M 上の $\mathcal{C}^r$ 級微分同相写像のパラメーター族（$r \geq 1$）であるとは，あるユークリッド空間内の単位閉球 B について f が $B \times M$ から M への可微分写像であって，任意の $t \in B$ について $f_t \equiv f(t, \cdot) : M \to M$ が $\mathcal{C}^r$ 級微分同相写像であることを言う．$\mathcal{B}_B$ を B の Borel 加法族，Leb_B を B の標準化された Lebesgue 測度とし，$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間 $(B, \mathcal{B}_B, \mathrm{Leb}_B)$ の無限直積空間 $(B^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}_B^{\mathbb{N}}, \mathrm{Leb}_B^{\mathbb{N}})$ とする．[*1] 各 $n \geq 1$, $\omega = (t_1, t_2, \ldots) \in \Omega$, $x \in M$ に対して，$f_\omega^n(x)$ を

$$f_\omega^n(x) = f_{\sigma^{n-1}\omega} \circ f_{\sigma^{n-2}\omega} \circ \cdots \circ f_\omega(x) \quad (= f_{t_n} \circ f_{t_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{t_1}(x))$$

と定め，さらに簡単のため $f_\omega^0(x) = x$ と書くこととする．ただし σ はシフト写像（つまり，$\omega = (t_1, t_2, \ldots)$ に対して，$\sigma\omega = (t_2, t_3, \ldots)$）であり，簡単のために f_{t_1} を f_ω と書いている．$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の B 値確率仮定 $(\omega = (t_1, t_2, \ldots) \mapsto t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が独立同分布（independent and identically distributed）となることに注意されたい：そのため，$(n, \omega, x) \mapsto f_\omega^n(x)$ は f から誘導される i.i.d. ランダム力学系と呼ばれる（より一般のランダム力学系の定義については [3] を参照）．混乱がない限り，単一の写像 $f_0 : M \to M$ による通常の n 回反復も f_0^n と書くこととする．各 $x \in M$ に対して，$\mathbb{P}$ の $f_{(\cdot)}^n(x) : \Omega \to M$ による送出し測度を $\left(f_{(\cdot)}^n(x)\right)_* \mathbb{P}$ と書く．つまり, 各 Borel 集合 $A \subset M$ に対して $\left(\left(f_{(\cdot)}^n(x)\right)_* \mathbb{P}\right)(A) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \mid f_\omega^n(x) \in A\}\right)$ とする．次の条件は [2, Theorem 1] による．

定義 5. $\mathcal{C}^r$ 級微分同相写像のパラメーター族 $f : B \times M \to M$ が**物理的である**（*physical*）とは，$\mathcal{C}^r$ 級微分同相写像 $f_0 : M \to M$, 整数 $n_0 \geq 1$ および実数 $\xi_0 > 0$ が存在して，任意の $n \geq n_0$, $x \in M$ について次が成り立つことを言う．

(A) $\{f_\omega^n(x) \mid \omega \in \Omega\}$ が $f_0^n(x)$ を中心とする半径 ξ_0 の球を含む;
(B) $\left(f_{(\cdot)}^n(x)\right)_* \mathbb{P}$ は M の Lebesgue 測度に関して絶対連続.

このようなランダム力学系を物理的と呼ぶ理由については [13, Theorem 3.1] や [12] を参照していただきたい．f が決定論的な場合（つまり，任意の $t \in B$ について $f(t, \cdot) = f_0$ となる場合）は，f から誘導される i.i.d. ランダム力学系は物理的でないことに注意されたい．また，物理的なランダム力学系の例については [2, Examples 1-4] を参照されたい．特に，連続型の加法ノイズは物理的なノイズの典型例となる．決定論的力学系同様，f から誘導される i.i.d. ランダム力学系の $\omega \in \Omega$ での **Lyapunov 非正則集合**を，ある $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ に対する Lyapunov 指数

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \|Df_\omega^n(x)v\|$$

が存在しないような $x \in M$ 全体の集合とする．本稿の後半の主定理は以下の通りとなる（中村文彦氏，豊川永喜氏との共同研究）．

[*1] Araújo [2] は実際には，$(B^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}_B^{\mathbb{N}}, \mathrm{Leb}_B^{\mathbb{N}})$ の代わりに確率空間 $(B(a, \epsilon), \mathcal{B}_{B(a,\epsilon)}, \mathrm{Leb}_{B(a,\epsilon)})$ の無限直積空間をノイズ空間として考えていた．ここで，$a \in B$, $\epsilon > 0$ は a を中心とする半径 ϵ の閉球 $B(a, \epsilon)$ が B の内部に含まれるようなものである．しかし，これは $\tilde{f}(t, \cdot) := f(\epsilon(t + a), \cdot)$, $t \in B$ を考えることで我々の設定に帰着することができる．

定理 B. $f : B \times M \to M$ を $\mathcal{C}^r$ 級微分同相写像のパラメーター族とする（$r \geq 1$）．f から誘導される i.i.d. ランダム力学系は物理的であると仮定する．このとき，$\Omega \times M$ の有限分割 $(\mathcal{V}_i)_{1 \leq i \leq \ell}$, 実数 $\lambda_i^1 > \cdots > \lambda_i^{k(i)}$, およびフィルトレーション $\mathbb{R}^d = W^{i,1}_{(\omega,x)} \supset \cdots \supset W^{i,k(i)}_{(\omega,x)} \supset W^{i,k(i)+1}_{(\omega,x)} = \{0\}$（$1 \leq k(i) \leq d$, $1 \leq i \leq \ell$, $(\omega, x) \in \mathcal{V}_i$）が存在して，任意の $1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq j \leq k(i)$, ほとんどすべての $(\omega, x) \in \mathcal{V}_i$, および任意の $v \in W^{i,j}_{(\omega,x)} \backslash W^{i,j+1}_{(\omega,x)}$ について

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n_\omega(x)v\| = \lambda_i^j$$

となる．特に，ほとんどすべての ω に対する Lyapunov 非正則集合は Lebesgue 測度 0 となる．

証明については [17] を参照していただきたいが，その鍵としては，条件 (A), (B) があるために，ほとんどすべての点 (ω, x) についてその軌道が有限時間で絶対連続な “定常測度” の台に達することにある．これは決定論的力学系と極めて対比的であり（例えば前述の Bowen の曲面上の流れでは，ヘテロクリニック接続に囲まれる領域内の，接続近傍の任意の点は，その極限集合がヘテロクリニック接続であるにも関わらず有限時間でそれに達することはない），このことによって，Birkhoff や Oseledets のエルゴード定理が Lebesgue 測度の文脈でも有用になる．

2.1 非物理的ノイズ

後半の主結果では物理的ノイズ下では Lyapunov 非正則集合が Lebesgue 測度 0 となることを見たが，この節ではある種の 8 の字アトラクターとある種のインパルス・ノイズ（impulsive noise）については，非物理的ノイズ下でも Lyapunov 非正則集合が Lebesgue 測度 0 となることを見る（ゆえに，この節の結果は定理 B から導かれる訳ではない）．これは，Araújo および我々の主結果の一般化の可能性を示唆する．インパルス・ノイズの物理的な背景については [7,10] を参照されたい．

この節で対象とするモデルは，前述の [11] で導入された次の力学系である．定数 $\kappa > 1$ を固定し，実数 a, b を $1 < a < b < \kappa$ を満たすようなものとする．$I = [a, b]$ とし，写像 $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \left(\kappa^{-2}x, \kappa y\right)$ を H と書く．また $S_n = I \times \kappa^{-n}I$, $U_n = \kappa^{-n}I \times I$ とする．このとき

$$H^n(S_n) = U_{2n} \quad \text{および} \quad H^n : S_n \to U_{2n} \text{は微分同相写像となる．}$$

さらに，R を回転角 $\pi/2$, 中心 $((a + b)/2, (a + b)/2)$ の回転とする．つまり，

$$R(x, y) = (a + b - y, x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

平面上の微分同相写像の台がコンパクトであるとは，原点を中心とするある球の外では恒等写像となることを言う．

命題 6 ([11])**.** 台がコンパクトな $\mathcal{C}^\infty$ 級微分同相写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ と自然数 n_0, k_0 が存在して次が成り立つ：

(a) 原点 $o = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ の近傍 V であって，

$$\bigcup_{n\geq n_0} \bigcup_{0\leq \ell\leq n} f^\ell(S_n) \subset V \quad \text{かつ} \quad f|_V = H$$

を満たすものが存在する．特に，o は f のサドル型不動点である．

(b) o の安定多様体は o の不安定多様体と一致する．

(c) 任意の $n \geq n_0$ について $f^{k_0}(U_n) = S_n$ であって，

$$f^{k_0}(x,y) = R(x,y), \quad (x,y) \in \left[0, \kappa^{-2n_0}\right] \times I.$$

特に任意の $n \geq n_0$ について

$$f^{n+k_0}(x,y) = \left(a+b-\kappa^n y, \kappa^{-2n} x\right) \in S_{2n}, \quad (x,y) \in S_n.$$

注意 2 で述べた通り，[13] で我々は, S_n（$n \geq n_0$）内の任意の点が Lyapunov 非正則である（かつ，Birkhoff 正則である）ことを示した．一方で，定理 B から, 物理ノイズ下ではこの Lyapunov 非正則集合は Lebesgue 測度 0 となる．さらに，以下の非物理的なインパルス・ノイズ下でも f の Lyapunov 非正則集合は Lebesgue 測度 0 となることを見る．この摂動を正確に定義するために，σ を $\Omega = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}^{\mathbb{N}}$ 上のシフト写像とし，命題 6 の $f = (f_1, f_2)$ に対して

$$f_\omega(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (\text{任意の } n \geq n_0 \text{ について } f(x,y) \notin S_n \text{ のとき}) \\ \tilde{f}_\omega(x,y) & (\text{ある } n \geq n_0 \text{ について } f(x,y) \in S_n \text{ のとき}) \end{cases} \tag{2.2}$$

とする．ただし，

$$\tilde{f}_\omega(x,y) = \left(f_1(x,y), \kappa^{n-t_1} f_2(x,y)\right), \quad \omega = (t_1, t_2, \ldots) \in \Omega.$$

つまり，我々のランダム力学系は位置依存的であり，S_n から S_{t_1} へのジャンプは軌道が S_n（$n \geq n_0$）にぶつかったときのみ起きる．図 2 を参照されたい．このようなインパルス・ノイズは [2, Section 12] における，ホモクリニック接触周りでだけの摂動を思い起こさせる（例えば以下の図と [2] の図 6 を比較されたい）が，[2, Section 12] のノイズが物理的であるのに対して， 我々のノイズ (2.2) は非物理的である．実際，構成から $\{f^n_\omega(x,y) \mid \omega \in \Omega\}$ は任意の (x,y), n について高々可算集合であり，ゆえに開球を含まない，つまり，定義 5 における条件 (A)（の任意の自然なバージョン）が満たされないことになる．

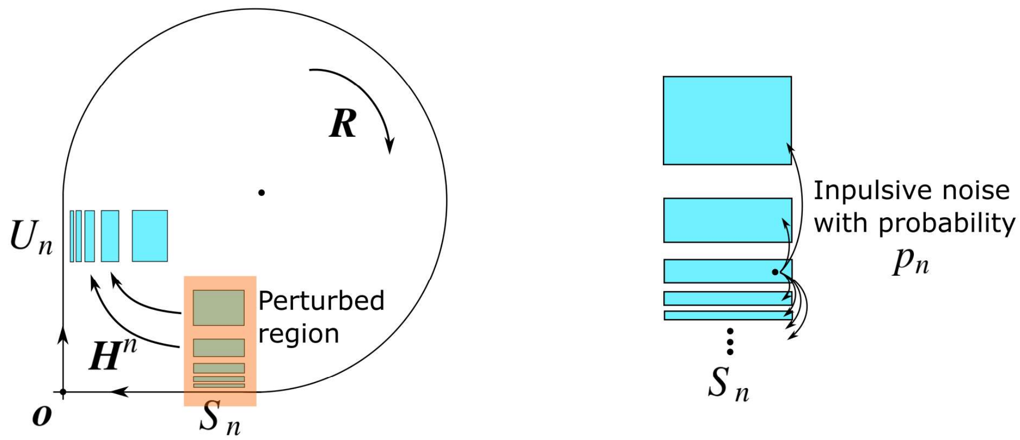

図 2　インパルス・ノイズ下での GGS 微分同相写像

Ω はさらに，$\mathbb{P} = \widetilde{\mathbb{P}}^{\mathbb{N}}$, $\widetilde{\mathbb{P}}(\{\omega_0 = n\}) = p_n$（$n \geq n_0$）なる測度を備えているとする．ここで p_n たちは非負であり $\sum_{n \geq n_0} p_n = 1$, $\bar{n} := \sum_{n \geq n_0} n p_n < \infty$ を満たすとする．

定理 7. f_ω を (2.2) で与えられたランダム写像とする．このとき，ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について，任意の $n \geq n_0$, $(x,y) \in S_n$, $v \in \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \cup \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \setminus \{0\}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|Df_\omega^n(x,y)v\| = -\frac{\bar{n}}{2(\bar{n}+k_0)} \log \kappa \tag{2.3}$$

が成り立つ．特に，f_ω の $\bigcup_{n\geq n_0} S_n$ 上での Lyapunov 非正則集合は Lebesgue 測度 0 である．

(2.3) は $\bar{n}=0$ のとき 0 となり，$\bar{n}\to\infty$ のとき $-\frac{\log\kappa}{2}$ となる．これらの値（0 と $-\frac{\log\kappa}{2}$）は元の GGS 微分同相写像 f の有限時間 Lyapunov 指数の列 $\{1/n \log \|Df^n(x,y)v\|\}_{n\geq 1}$ の上極限と下極限に対応しており，その意味で (2.3) は自然な値であると言える．

参考文献

[1] F. Abdenur, C. Bonatti, S. Crovisier, *Nonuniform hyperbolicity for C^1-generic diffeomorphisms*, Israel Journal of Mathematics **183** (2011), 1–60.

[2] V. Araújo, *Attractors and time averages for random maps*, Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis **17** (2000), 307–369.

[3] Arnold, L., *Random dynamical systems*, Springer (1995).

[4] P. Berger, S. Biebler, *Emergence of wandering stable components*, arXiv preprint arXiv:2001.08649 (2020).

[5] E. Colli, E. Vargas, *Non-trivial wandering domains and homoclinic bifurcations*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **21** (2001), 1657–1681.

[6] S. Crovisier, D. Yang, J. Zhang, *Empirical measures of partially hyperbolic attractors*, Communications in Mathematical Physics (2018), 1–40.

[7] Demers, M. F., Pène, F. and Zhang, H.-K., Local limit theorem for randomly deforming billiards, *Comm. Math. Phys.*, **375** (2020), 2281–2334.

[8] A. Furman, *On the multiplicative ergodic theorem for uniquely ergodic systems*, Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics **33** (1997), 797–815.

[9] A. Gaunersdorfer, *Time averages for heteroclinic attractors*, SIAM Journal on Applied Mathematics **52** (1992), 1476–1489.

[10] Gianfelice, M., and Vaienti, S., Stochastic stability of the classical Lorenz flow under impulsive type forcing, *J. Stat. Phys.*, **181** (2020), 163–211.

[11] P. Guarino, P.-A. Guihéneuf, B. Santiago, *Dirac physical measures on saddle-type fixed points*, *J Dyn Diff Equat* (2020).

[12] Jost, J., Kell, M. and Rodrigues, C. S., Representation of Markov chains by random maps: existence and regularity conditions, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **54** (2015), 2637–2655.

[13] S. Kiriki, X. Li, Y. Nakano, T. Soma, *Abundance of observable Lyapunov irregular sets*, arXiv preprint arXiv:2110.11727 (2021).

[14] S. Kiriki, Y. Nakano, T. Soma, *Emergence via non-existence of averages*, arXiv preprint arXiv:1904.03424 (2019).

[15] S. Kiriki, Y. Nakano, T. Soma, *Historic and physical wandering domains for wild blender-horseshoes*, arXiv preprint arXiv:2107.09844 (2021).

[16] S. Kiriki, T. Soma, *Takens' last problem and existence of non-trivial wandering domains*, Advances in Mathematics **306** (2017), 524–588.

[17] F. Nakamura, Y. Nakano, H. Toyokawa, *Lyapunov exponents for random maps*, arXiv preprint arXiv:2103.11531 (2021).

[18] S. Newhouse, *Nondensity of Axiom A (a) on S^2*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **14** (1970), 191–202.

[19] S. Newhouse, *The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **50** (1979), 101–151.

[20] W. Ott, J. Yorke, *When Lyapunov exponents fail to exist*, Physical Review E **78** (2008), 056203–056203.

[21] J. Palis, *A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors*, Astérisque **261** (2000), 335–347.

[22] D. Ruelle, *Historical behaviour in smooth dynamical systems*, Global Analysis of Dynamical Systems (eds. H. W. Broer et al), Institute of Physics Publishing (2001), 63–66.

[23] F. Takens, *Heteroclinic attractors: time averages and moduli of topological conjugacy*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society **25** (1994), 107–120.

[24] F. Takens, *Orbits with historic behaviour, or non-existence of averages*, Nonlinearity **21** (2008), 33–36.

[25] L.-S. Young, *What are SRB measures, and which dynamical systems have them?*, Journal of Statistical Physics **108** (2002), 733–754.