

手術写像の核について

広島大学大学院先進理工系科学研究科 野崎 雄太

Yuta Nozaki

Graduate School of Advanced Science and Engineering
Hiroshima University

概要

Jacobi 図からホモロジーシリンダー内のクラスパーを構成し、それに沿った手術を施すことで、Abel 群の間の準同型 $s_n: \mathcal{A}_n^c \rightarrow Y_n \mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+1}$ が定まる。筆者は佐藤正寿氏（東京電機大学）と鈴木正明氏（明治大学）との共同研究 [23, 24] において、 $Y_n \mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+1}$ 上の準同型を構成し、それを手術写像 s_n の核の研究に応用した。本稿の目的は、[24] の結果を中心に、手術写像に関するこれまでの研究を紹介することである。

1 背景と動機

種数 g で境界成分 1 つの向き付けられたコンパクト曲面を $\Sigma_{g,1}$ で表す。そして向き付けられたコンパクト 3 次元多様体 M と向きを保つ同相写像 $m: \partial(\Sigma_{g,1} \times [-1, 1]) \rightarrow \partial M$ の組 (M, m) をコボルディズムと呼ぶことにする。ただし (M, m) と (M', m') に対して、同相写像 $f: M \rightarrow M'$ が存在して $f \circ m = m'$ を満たすとき、それらを同一視する。本稿ではホモロジー的に良い条件を満たすコボルディズムを扱う。コボルディズム (M, m) が $\Sigma_{g,1}$ 上のホモロジーシリンダーであるとは、各曲面 $\Sigma_{g,1} \times \{\pm 1\}$ への制限 m_{\pm} が同型写像 $(m_{\pm})_*: H_*(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(M; \mathbb{Z})$ を誘導し、かつそれらが一致することである。 $\Sigma_{g,1}$ 上のホモロジーシリンダーの集合 $\mathcal{IC} = \mathcal{IC}_{g,1}$ には $M \circ M' = (M \cup_{m_+ = m'_-} M', m_- \cup m'_+)$ により積が定まり、モノイドとなる。モノイド \mathcal{IC} を研究する動機として、ここでは次の

〒739-8526 広島県東広島市鏡山 1-3-1

e-mail: nozakiy@hiroshima-u.ac.jp

本研究は科研費（課題番号 20K14317）の助成を受けたものである。

3つ挙げる.

- (1) 曲面 $\Sigma_{g,1}$ の写像類群の部分群である Torelli 群 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{g,1}$ の拡張になっている*1. 実際, $M = \Sigma_{g,1} \times [-1,1]$ とし, $m_+ = f \in \mathcal{I}$, $m_- = \text{id}_{\Sigma_{g,1}}$ なる m を考えると, (M, m) はホモロジーシリンダーである. この構成によりモノイド準同型 $\mathfrak{c}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{IC}$ が定義され, 単射であることが知られている.
- (2) クラスパー手術 (3.1 節) の観点からも自然に定義できる. 実際, 自明なホモロジーシリンダー $\mathfrak{c}(\text{id}_{\Sigma_{g,1}})$ からクラスパー手術によって得られるコボルディズム全体は \mathcal{IC} に一致する.
- (3) ホモロジーコボルディズム群 $\mathcal{IH} = \mathcal{IH}_{g,1}$ (3.3 節) と密接に関係している. 特に $g = 0$ の場合が「向き付けられた整ホモロジー 3 球面のなすホモロジー同境界群 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ 」であり, \mathcal{IH} はその一般化である.

(1)–(3) は順に 2, 3, 4 次元との関係を表しており, \mathcal{IC} は低次元トポロジーにおいて重要な研究対象と言える. さて $\mathcal{IC}_{0,1}$ は可換モノイドだが, $g > 0$ に対しては非可換であり, 直接的な研究は難しい. そこでクラスパーを用いてある同値関係 \sim_{Y_n} を定義し, 部分モノイド

$$Y_n \mathcal{IC} = \{(M, m) \in \mathcal{IC} \mid (M, m) \sim_{Y_n} \mathfrak{c}(\text{id}_{\Sigma_{g,1}})\}$$

の列 $\mathcal{IC} = Y_1 \mathcal{IC} \supset Y_2 \mathcal{IC} \supset \dots$ に着目する. すると同値関係 $\sim_{Y_{n+1}}$ による商 $Y_n \mathcal{IC} / Y_{n+1}$ ($n \geq 1$) は有限生成 Abel 群であることが分かる. 群 $Y_n \mathcal{IC} / Y_{n+1}$ は隣接項 $Y_n \mathcal{IC}$ と $Y_{n+1} \mathcal{IC}$ の差を測っていると思えるから, これらを調べることは \mathcal{IC} の全体像を理解する第一歩となる.

さて $Y_n \mathcal{IC} / Y_{n+1}$ を組合せ的に記述する道具として Jacobi 図を導入する. **Jacobi 図**とは 1, 3 価グラフであって, 各 1 価頂点にラベル $1^+, \dots, g^+, 1^-, \dots, g^-$ のいずれかが与えられており, 3 価頂点には巡回順序が指定されているものである. 本稿では巡回順序は常に反時計回りとして省略し, グラフは破線で描く. また $a_1, \dots, a_n \in \{1^\pm, \dots, g^\pm\}$ に対して次の記号を用いる:

$$T(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{array}{c} a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_{n-1} \\ | \quad | \quad \dots \quad | \\ \text{-----} \\ | \quad | \quad \dots \quad | \\ a_1 \quad \dots \quad a_n \end{array}, \quad O(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{array}{c} a_1 \\ | \\ \text{-----} \\ | \quad | \quad | \\ a_n \quad \quad a_2 \quad a_3 \\ | \quad | \quad | \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

*1 本稿では Torelli 群についてこれ以上述べない. 河澄, 久野 [12] の講演アブストラクトでは, Johnson 準同型の様々な側面とともに詳しく解説されている.

3 価頂点を n 個持つ連結な Jacobi 図で生成される自由 \mathbb{Z} 加群を AS, IHX, self-loop 関係式で割ったものを \mathcal{A}_n^c と書く. \mathcal{A}_n^c は 1 次 Betti 数により自然に直和分解 $\mathcal{A}_n^c = \bigoplus_{l \geq 0} \mathcal{A}_{n,l}^c$ する. たとえば $\mathcal{A}_2^c = \mathcal{A}_{2,0}^c \oplus \mathcal{A}_{2,1}^c \oplus \mathcal{A}_{2,2}^c$ は 3 種類のグラフ $T(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $O(b_1, b_2)$, θ グラフで生成される.

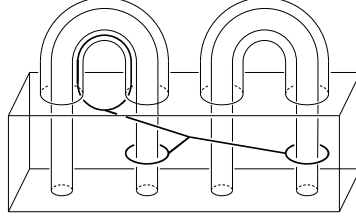


図 1 $\Sigma_{2,1} \times [-1, 1]$ 内のクラスパー.

Jacobi 図 $J \in \mathcal{A}_n^c$ から $\mathfrak{c}(\text{id}_{\Sigma_{g,1}})$ 内の n 次のグラフクラスパーが構成でき, ホモロジーシリンダーの同値類 $\mathfrak{s}_n(J) \in Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1}$ が定まる. たとえば図 1 は $J = T(1^-, 1^+, 2^-)$ の場合である. こうして手術写像 $\mathfrak{s}_n: \mathcal{A}_n^c \rightarrow Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1}$ が定まり, $n \geq 2$ で全射準同型であることが知られている. したがって, 群 $Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1}$ を理解するには, 本稿の題名にある「手術写像の核 $\text{Ker } \mathfrak{s}_n$ 」を調べることが鍵となる. 実際, Massuyeau, Meilhan [17, 18] は $n = 1, 2$ の場合に $\text{Ker } \mathfrak{s}_n$ を記述し, $Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1}$ を決定した. その後, 筆者ら [23] は $n = 3$ の場合に $Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1}$ を決定した. 実は $\mathfrak{s}_n \otimes \text{id}_{\mathbb{Q}}: \mathcal{A}_n^c \otimes \mathbb{Q} \rightarrow (Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1}) \otimes \mathbb{Q}$ が同型であることが知られており, トーションを無視してよければ原理的には $Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1}$ を決定できる. つまり [23] の本質はトーション部分群 $\text{tor } \mathcal{A}_n^c$ の決定とそこへの制限 $\mathfrak{s}_n|_{\text{tor } \mathcal{A}_n^c}$ を調べることにある.

さて, 関連の深い研究として Conant, Schneiderman, Teichner の仕事 [5] がある. 彼らはホモロジー同境界群 \mathcal{IH} を研究し, 全射準同型

$$\mathcal{A}_{n,0}^c \xrightarrow{\mathfrak{s}_{n,0}} Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1} \xrightarrow{q} Y_n \mathcal{IH}/Y_{n+1}$$

の核を $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ の場合に決定した. 核 $\text{Ker}(q \circ \mathfrak{s}_{n,0})$ を用いて $\text{Ker } \mathfrak{s}_{n,0}$ の情報も得られるが, これを完全決定するためには少なくとも 2 つの未解決問題を解かなければならない (問題 7, 9). それとは別に, 次の段階として $\text{Ker } \mathfrak{s}_{n,1}$ の研究は重要と言える.

問題 1 部分加群 $\text{Ker } \mathfrak{s}_{n,1} \subset \mathcal{A}_{n,1}^c$ の構造を決定せよ.

共同研究 [24] ではこの問題に取り組み, 大きな進展があった. その成果を第 2 節で紹介し, 第 3 節ではクラスパーや関連する群 $Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1}$ について現状をまとめる. 第 4 節で手術写像の精密化を導入した後, それを用いて主定理の証明の概略を述べる.

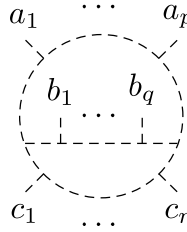
さて問題 1 に取り組むに当たって, [23] で導入した不変量

$$\bar{z}_{n+1}: Y_n \mathcal{IC}_{g,1} / Y_{n+1} \rightarrow \mathcal{A}_{n+1}^c \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

が重要な役割を果たす. これは Cheptea, 葉廣, Massuyeau [2] によって構成された LMO 関手を用いて定義されており, その詳細 [23] または筆者の講演集 [22] を参照してほしい. またこれらは量子トポロジーの文脈で大きく発展してきたものであり, 大槻 [25, 26] を参照するとよい.

2 主結果

問題 1 について, まず n が偶数の場合には, $\text{tor } \mathcal{A}_{n,1}^c = \{0\}$ ([23, Proposition 5.2]) から $\text{Ker } \mathfrak{s}_{n,1} = \{0\}$ が分かる. 共同研究 [24] では, $n = 2m - 1$ ($m \geq 2$) の場合に $\text{Ker } \mathfrak{s}_{n,1}$ の大きさに関して上からの評価を与えた. 正確には, 対称な 2 ループ Jacobi 図



$$\left(\begin{array}{l} a_i, b_i, c_i \in \{1^\pm, \dots, g^\pm\}, \\ a_i = a_{p-i+1}, b_i = b_{q-i+1}, c_i = c_{r-i+1}, \\ p, q, r \geq 1, p + q + r + 2 = 2m - 1 \end{array} \right)$$

で生成される部分加群を $\langle \Theta_{2m-1}^{\geq 1, s} \rangle \subset \mathcal{A}_{2m-1}^c$ と書き, 商写像 $\pi: Y_{2m-1} \mathcal{IC} / Y_{2m} \rightarrow (Y_{2m-1} \mathcal{IC} / Y_{2m}) / \mathfrak{s}(\langle \Theta_{2m-1}^{\geq 1, s} \rangle)$ との合成の核を決定した.

定理 2 ([24]) 核 $\text{Ker}(\pi \circ \mathfrak{s}_{2m-1,1})$ は

$$O(a_1, \dots, a_{m-1}, a_m, a_{m-1}, \dots, a_1) + O(a_m, \dots, a_2, a_1, a_2, \dots, a_m)$$

で生成され, 自由 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 加群としての階数は $\frac{1}{2}((2g)^m - (2g)^{\lceil m/2 \rceil})$ である.

注意 3 $\text{Ker } \mathfrak{s}_{2m-1,1} \subset \text{Ker}(\pi \circ \mathfrak{s}_{2m-1,1})$ において, $m = 2, 3$ のときは等号が成り立つ.

証明の鍵は [23] で導入した不変量 $\bar{z}_{2m,l}: Y_{2m-1} \mathcal{IC} / Y_{2m} \rightarrow \mathcal{A}_{2m,l}^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ であり, $\text{Ker}(\pi \circ \mathfrak{s}_{2m-1,1})$ の上からの評価を導く. その際に 2 ループ部分 $\mathcal{A}_{2m,2}^c$ の構造を知る必要があり, 「1 つの 3 価頂点を円周に膨らませる」準同型 $\text{bu}: \mathcal{A}_{n,l}^c \rightarrow \mathcal{A}_{n+2,l+1}^c$ を用いて次の結果を得た.

定理 4 ([24]) $n \geq 3$ のとき, bu は同型 $\text{bu}: \mathcal{A}_{n-2,1}^c \rightarrow \mathcal{A}_{n,2}^c / \langle \Theta_n^{\geq 1} \rangle$ を誘導する.

ここで $\langle \Theta_n^{\geq 1} \rangle \subset \mathcal{A}_{n,2}^c$ は $\langle \Theta_{2m-1}^{\geq 1,s} \rangle$ の定義において対称とは限らないものも含めて得られる部分加群である．一方，下からの評価のために手術写像の精密化 $\tilde{s}: \mathbb{Z}\tilde{\mathcal{J}}_n^c \rightarrow Y_n IC/Y_{n+2}$ を導入し，クラスパー手術の間の関係を導いた（第 4 節）．

これらの結果の系として， $n = 4$ の場合に群 $Y_n IC/Y_{n+1}$ の構造を決定できる．そして， Y_{n+1} 同値と n 次有限型不変量に関する Goussarov-葉廣予想を $n = 4$ の場合に解決した ([24, Corollary 4.9])．この予想は $n = 1, 2, 3$ では正しいことが示されており ([18], [23])， $n \geq 5$ が今後の課題である．加えて，今までほとんど手のつけられていなかった Abel 群の構造を決定することもできた：

定理 5 ([24]) Abel 群 $Y_3 IC_{g,1}/Y_5$ と $Y_3 IH_{g,1}/Y_5$ はトーションを持たない．

したがって，2つの完全列からなる可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y_4 IC_{g,1}/Y_5 & \longrightarrow & Y_3 IC_{g,1}/Y_5 & \longrightarrow & Y_3 IC_{g,1}/Y_4 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Y_4 IH_{g,1}/Y_5 & \longrightarrow & Y_3 IH_{g,1}/Y_5 & \longrightarrow & Y_3 IH_{g,1}/Y_4 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

において，左と中央の 4 つは自由 Abel 群である．一方，右端の 2 つにはトーションが存在する ([23]) から，特に 2 つの完全列は分裂しない．

3 クラスパーとそれに関する群

第 1, 2 節に出てきた用語を解説し，特に群 $Y_n IC/Y_{n+1}$ に関する事実をまとめる．

3.1 グラフクラスパーと Y フィルトレーション

Goussarov [7] と葉廣 [8] により創始されたクラスパー手術は， IC の研究において欠かせない道具である*2．まずグラフクラスパーとは，3次元多様体に埋め込まれた曲面であって，いくつかの円板とバンドとアニュラスへの分解が指定されているものである（図 2 左）．単にクラスパーと言ったときには，ある箱が付いたものも許しており，zip 構成に利用される．箱付きの場合を含む詳細は [8], [25] を参照してほしい．また一般向けの記事として葉廣 [9] もある．さて，各円板を Borromean 環に置き換えることで，枠付き絡み目 L_G が得られる（図 2 右）．そして L_G に沿った Dehn 手術を施して得られる多様体を M_G と書く．

*2 最近では渡邊 [31, 32] によって，4次元多様体へ拡張そして応用されている．

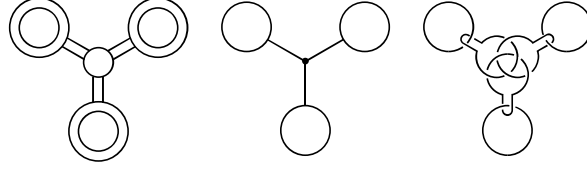


図2 グラフクラスパーの例, その略記法, そこから得られる枠付き絡み目.

G を構成する円板の個数を次数と呼ぶ. $M, M' \in \mathcal{IC}$ が Y_n 同値 $M \sim_{Y_n} M'$ であるとは, 次数 n のグラフクラスパー G_1, \dots, G_r が存在し, $M_{G_1 \sqcup \dots \sqcup G_r} = M'$ を満たすことである*³. そして $Y_n \mathcal{IC} = \{M \in \mathcal{IC} \mid M \sim_{Y_n} \mathbf{c}(\text{id})\}$ と置くと, 部分モノイドの列 $\mathcal{IC} = Y_1 \mathcal{IC} \supset Y_2 \mathcal{IC} \supset \dots$ が定まり, これを Y フィルトレーションと呼ぶ. 第1節に登場したのは $Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1}$ だが, より一般に Y_{n+k} 同値による商 $Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+k}$ ($1 \leq k \leq n$) も有限生成 Abel 群であり, 完全列

$$0 \rightarrow Y_{n+1} \mathcal{IC}/Y_{n+k} \rightarrow Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+k} \rightarrow Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1} \rightarrow 0$$

によって互いに関連している.

3.2 小さい n に対する $\mathcal{A}_{n,l}^c$ と $Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1}$ の構造

これらの群に関して分かっていることをまとめる. 以下 $H = H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z})$, $H_{(2)} = H \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とする. まず $n=1$ のときは $\mathcal{A}_1^c \cong (\bigwedge^3 H) \oplus H_{(2)}^{\otimes 2}$ である. そして [17] より完全列

$$0 \rightarrow \langle T(a, b, a) + T(b, a, b) \mid a \neq b \rangle \rightarrow \mathcal{A}_1^c \xrightarrow{\mathfrak{s}_1} \mathcal{IC}/Y_2 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

が得られ, $\mathcal{IC}/Y_2 \cong (\bigwedge^3 H) \oplus (\bigwedge^2 H_{(2)}) \oplus H_{(2)} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となる.

次に $n=2$ のときは $\mathcal{A}_2^c = \mathcal{A}_{2,0}^c \oplus \mathcal{A}_{2,1}^c \oplus \mathcal{A}_{2,2}^c$ であり, 表1のようになる. $\mathcal{A}_{2,0}^c$ に関して補足すると, [18, Section 3.1] において完全列

$$0 \rightarrow \bigwedge^4 H \xrightarrow{\iota} S^2\left(\bigwedge^2 H\right) \rightarrow \mathcal{A}_{2,0}^c \rightarrow 0$$

が与えられている. ここに

$$\iota(a \wedge b \wedge c \wedge d) = (a \wedge b)(c \wedge d) - (a \wedge c)(b \wedge d) + (a \wedge d)(b \wedge c)$$

であり, その像は $\mathcal{A}_{2,0}^c$ に落とすと IHX 関係式によって消える. 特に \mathcal{A}_2^c にトーシヨンはなく, 手術写像 $\mathfrak{s}_2: \mathcal{A}_2^c \rightarrow Y_2 \mathcal{IC}/Y_3$ は同型である.

*³ 同様に, ホークラスパーを用いて絡み目の間の C_{n+1} 同値が定義される.

$n \setminus l$	0	1	2	3
1	$(\wedge^3 H) \oplus H_{(2)}^{\otimes 2}$	0	0	0
2	$S^2(\wedge^2 H) / \wedge^4 H$	$S^2(H)$	\mathbb{Z}	0
3	D'_3	$\mathcal{A}_{1,0}^c$	0	0
4	D'_4	$(H^{\otimes 4})_{\mathfrak{D}_8}$	$\mathcal{A}_{2,1}^c$	\mathbb{Z}

表 1 Jacobi 図のなす加群 $\mathcal{A}_{n,l}^c$ の構造

さて $n = 3$ のときは $\mathcal{A}_3^c = \mathcal{A}_{3,0}^c \oplus \mathcal{A}_{3,1}^c$ である. 表 1 の L'_n は自由 quasi-Lie 代数であり, $\mathcal{A}_{3,0}^c \cong D'_3 = \text{Ker}(H \otimes L'_4 \xrightarrow{[\cdot, \cdot]} L'_5)$ となる*4. ここで Levine [15, Corollary 2.3] より $\text{tor } \mathcal{A}_{3,0}^c \cong (H \otimes L_2) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong H_{(2)}^2 \oplus \wedge^2 H_{(2)}$ であり, 自由部分については Witt の公式 [16, Theorem 5.11] から, $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}_{3,0}^c = \frac{2}{5}(4g^5 - 5g^3 + g)$ と求まる. そして $Y_3\mathcal{IC}/Y_4$ は次のとおり決定される.

定理 6 ([23]) $0 \rightarrow (\wedge^3 H \oplus \wedge^2 H) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathcal{A}_3^c \xrightarrow{\mathfrak{s}} Y_3\mathcal{IC}/Y_4 \rightarrow 0$ は完全列である. ここに j は以下で定める準同型である:

$$j(a \wedge b \wedge c) = T(a, b, c, b, a) + T(b, c, a, c, b) + T(c, a, b, a, c) = \Delta_{1,0}(T(a, b, c)), \quad (1)$$

$$j(a \wedge b) = O(a, b, a) + O(b, a, b). \quad (2)$$

最後に $n = 4$ のときも表 1 のとおりであり, $\mathcal{A}_{4,1}^c$ は位数 8 の 2 面体群 \mathfrak{D}_8 の作用による余不変として表される ([23, Proposition 5.1]). 特に \mathcal{A}_4^c はトーションを持たず, $\mathfrak{s}_4: \mathcal{A}_4^c \rightarrow Y_4\mathcal{IC}/Y_5$ は同型である. 一方この先へ進むには次の問題を解決する必要がある.

問題 7 $\Delta_{n,0}(T(a_1, a_2, \dots, a_{n+2})) \in \text{Ker } \mathfrak{s}_{2n+1,0}$ だろうか?

ここで $\Delta_{n,l}: \mathcal{A}_{n,l}^c \rightarrow \mathcal{A}_{2n+1,2l}^c$ は各 1 価頂点に関する「2 重化」の和である. 定理 6 の (1) が $n = 1$ の場合であり, $n = 2$ でも確認はできている*5. $n \geq 3$ では未解決だが, 少なくとも我々の不変量での値は自明になる:

定理 8 ([23]) $l \geq 0$ に対して,

$$(1) \quad \text{Ker}(\bar{\mathfrak{z}}_{2n+2} \circ \mathfrak{s}: \text{tor } \mathcal{A}_{2n+1,2l}^c \rightarrow \mathcal{A}_{2n+2}^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \supset \text{Im } \Delta_{n,l}.$$

*4 \mathbb{Q} 上では L'_n と通常の自由 Lie 代数 L_n に差はなく, $D'_n \otimes \mathbb{Q}$ は森田, 逆井, 鈴木の講究録 [21] および別冊 [20] における $\mathfrak{h}_{g,1}(n)$ と同型である.

*5 $n = 2$ の結果を使うと群 $Y_3\mathcal{IC}/Y_6$ の構造を決定できる.

$$(2) \quad \text{Ker}(\bar{z}_{2n+2} \circ \mathfrak{s}: \text{tor } \mathcal{A}_{2n+1,0}^c \rightarrow \mathcal{A}_{2n+2}^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Im } \Delta_{n,0}.$$

証明では, Conant, Schneiderman, Teichner [3, 4, 5] による higher-order Sato-Levine 不変量などの先行研究を援用しており, これらはホモロジー同境界群の観点から研究されてきたものである.

3.3 ホモロジー同境界群

$(M_1, m_1), (M_2, m_2) \in \mathcal{IC}$ がホモロジー同境界 $M_1 \sim_H M_2$ であるとは, 閉 3 次元多様体 $M_1 \cup_{m_1=m_2} (-M_2)$ を境界に持つ滑らかな 4 次元多様体 W が存在して, 包含写像の誘導する写像 $H_*(M_j; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(W; \mathbb{Z})$ ($j = 1, 2$) が同型となることを言う. そして $\mathcal{IH} = \mathcal{IC}/\sim_H$ をホモロジー同境界群と呼ぶ^{*6}. ここで自然な射影 $q: \mathcal{IC} \rightarrow \mathcal{IH}$ から準同型 $\text{Gr } q: Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1} \rightarrow Y_n \mathcal{IH}/Y_{n+1}$ が定まる. さて, $Y_n \mathcal{IH}/Y_{n+1}$ についても Jacobi 図を用いて記述しようとするのは自然である. Levine [14, Theorem 2] の結果から $\text{Gr } q \circ \mathfrak{s}_n: \mathcal{A}_{n, \geq 1}^c \rightarrow Y_n \mathcal{IH}/Y_{n+1}$ は零写像であり, $n \geq 2$ のとき $\text{Gr } q \circ \mathfrak{s}_{n,0}: \mathcal{A}_{n,0}^c \rightarrow Y_n \mathcal{IH}/Y_{n+1}$ は全射となる. さらに \mathbb{Q} 上ではこれが同型を与える ([14, Theorem 3]). よって問題は再びトーション部分ということになる. たとえば $n = 1$ では, $\text{Gr } q: \mathcal{IC}/Y_2 \rightarrow \mathcal{IH}/Y_2$ が同型であり ([11, Proposition 7.5], [5, p. 326]), したがって $\text{Gr } q \circ \mathfrak{s}_{1,0}$ は全射でも単射でもない (3.2 節). 一方 $\text{Gr } q \circ \mathfrak{s}_{2m,0}$ は同型であり ([3, Corollary 1.2]), 奇数の場合には非自明な核が知られている:

$$\Delta_{n,0}(T(a_1, a_2, \dots, a_{n+2})) \in \text{Ker}(\text{Gr } q \circ \mathfrak{s}_{2n+1,0}: \mathcal{A}_{2n+1,0}^c \rightarrow Y_{2n+1} \mathcal{IH}/Y_{2n+2}).$$

そして $\text{Ker}(\text{Gr } q \circ \mathfrak{s}_{4m-1,0}) = \text{Im } \Delta_{2m-1,0}$ となる ([5, Corollary 51]). しかし $4m + 1$ の場合の等号成立は未解決であり ([5, Section 4.1]), たとえば $m = 1$ の場合には次の問題が懸案となる.

問題 9 ([29]) $a \neq b$ のとき, $T(a, b, a, b, a, b, a) + T(b, a, b, a, b, a, b) \notin \text{Ker}(q \circ \mathfrak{s}_5)$ だろうか?

これは “ $\frac{1}{2}\Delta_{2,0}(T(a, b, a, b))$ ” に相当する元であり, その非自明性はきわめて微妙な問題と言える. なお Schneiderman [29, Conjecture 2.25] の講義録では非自明だろうと予想されている. ところで $Y_5 \mathcal{IC}/Y_6$ における非自明性は $\bar{z}_{6,1}$ を用いて検出できる:

$$\bar{z}_{6,1} \circ \mathfrak{s}_5(T(a, b, a, b, a, b, a) + T(b, a, b, a, b, a, b)) = O(a, b, a, a, b, a) + O(b, a, b, b, a, b) \neq 0.$$

^{*6} 過去の講義録に逆井 [28] があり, Magnus 展開を用いた研究が解説されている.

注意 10 ここで本稿の記号と [5] の記号との違いをまとめておく. [5] では $\mathcal{A}_{n,0}^c$ を \mathcal{T}_n , $\Delta_{n,0}$ を Δ_{2n+1} と書き, $\widetilde{\mathcal{T}}_{2n+1} := \mathcal{T}_{2n+1}/\text{Im } \Delta_{2n+1}$ ([5, Definition 40]) を調べている. また \mathcal{IH} を \mathbb{HC} , $Y_n\mathcal{IH}$ を \mathbb{Y}_n , $Y_n\mathcal{IH}/Y_{n+1}$ を \mathbb{Y}_n と書いている.

注意 11 \mathcal{IH} の定義において, W を滑らかとは限らない 4 次元多様体とした場合に得られる群を $\mathcal{IH}^{\text{top}}$ と書く. すると自然な準同型 $\mathcal{IH} \rightarrow \mathcal{IH}^{\text{top}}$ が存在し, その核は \mathbb{Z}^∞ を含むことが Cha, Friedl, Kim [1, Theorem 1.1] により示されている. たとえば $\mathcal{IH}_{0,1} \cong \Theta_{\mathbb{Z}}^3$ であるのに対し, $\mathcal{IH}_{0,1}^{\text{top}}$ は自明群であり, 両者の差は大きい. 一方, Y フィルトレーションに移ると $Y_n\mathcal{IH}/Y_{n+1} \rightarrow Y_n\mathcal{IH}^{\text{top}}/Y_{n+1}$ は $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ のとき同型である. 実際, $Y_n\mathcal{IH}/Y_{n+1}$ の構造は n が偶数のときは第 n Johnson 準同型 τ_n によって, $n \equiv 3 \pmod{4}$ のときは τ_n と κ によって決定される ([5, Theorems 5, 6]). ここで κ は τ_n に関する議論から定義される準同型であり, τ_n は Stallings の定理 [30, Theorem 5.1] を用いて定義される. そして Stallings の定理は位相多様体に対しても成り立つから, τ_n と κ は $Y_n\mathcal{IH}^{\text{top}}/Y_{n+1}$ を経由し, 上記の全射は同型であることが従う. ただし $n \equiv 1 \pmod{4}$ のときに同型か否か筆者は知らない. ところで, 葉廣, Massuyeau [11, Section 7.1] や逆井 [27, Section 2] では滑らかさを明記しているが, Levine [14, Section 2.1], Garoufalidis, Levine [6, Remark 2.3], Conant, Schneiderman, Teichner [5, Section 3.1] では明言していない. しかし [6, Questions 6–9] や [5, p. 326] の記述から分かるとおりに暗に仮定されている. また [1, Proposition 2.4] の証明の冒頭に明示的なコメントもある.

4 手術写像の精密化とその応用

定理 2 の証明には複雑なクラスパー計算が必要となる. それらを見通し良く行うために, $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1}$ ではなく $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+2}$ での計算を確立したい. そこで次の図式を可換にする加群 $\mathbb{Z}\widetilde{\mathcal{J}}_n^c$ と準同型 \tilde{s}_n を構成する:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\widetilde{\mathcal{J}}_n^c & \xrightarrow{\tilde{s}_n} & Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}_n^c & \xrightarrow{s_n} & Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1}. \end{array}$$

正確な定義は論文 [24, Section 3] を見てもらうことにして, ここではその概略を述べる.

4.1 手術写像や AS, STU 関係式の精密化

まず $\mathbb{Z}\tilde{\mathcal{J}}_n^c$ を $i\text{-deg} = n$ の連結な Jacobi 図で生成される \mathbb{Z} 加群とする*7. ただし 1 個頂点のラベルが $\{1^\pm, \dots, g^\pm\}$ ではなく $4_1^-, 4_2^+$ のように添字や上線が付いたものになっている. これらの付加情報に基づいて $\tilde{\mathfrak{s}}_n$ を定める. まず添字は同じハンドルに複数のアニュラスを引っ掛けるときの順番を表し, 上線は対応するバンドを半ひねりすることを意味している*8. たとえば,

$$\tilde{\mathfrak{s}}_2 \left(\begin{array}{c|c} \bar{1}_1^+ & 2_2^- \\ \hline 1_1^- & 2_1^- \end{array} \right) = \text{Diagram} \in Y_2\mathcal{IC}_{2,1}/Y_4.$$

すると準同型 $\tilde{\mathfrak{s}}_n: \mathbb{Z}\tilde{\mathcal{J}}_n^c \rightarrow Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+2}$ が well-defined であることが分かり, これを**手術写像の精密化**と呼ぶ. そして $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1}$ において知られている関係式を $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+2}$ へ持ち上げることができる. 具体的には AS, STU 関係式の精密化を与えた. 一般に Jacobi 図 J の 3 個頂点の巡回順序を 1 か所逆にしたものを J' とするとき, $\mathfrak{s}_n(J) + \mathfrak{s}_n(J') = 0$ が成り立ち, これを AS 関係式と呼ぶ. その証明の本質は, グラフクラスパー G の辺に半ひねりを加えたものを G' としたときに, $M_G + M_{G'} = 0 \in Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1}$ が成り立つことである. その精密化として, J の 1 個頂点 v のラベルに上線を付けたものを J' , v につながる辺を 2 重化したものを $\tilde{\delta}_v(J)$ とするとき,

$$\tilde{\mathfrak{s}}_n(J) + \tilde{\mathfrak{s}}_n(J') + \mathfrak{s}_n(\tilde{\delta}_v(J)) = 0 \in Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+2}$$

が成り立つ. これを AS 関係式の精密化と呼び, STU 関係式についても同様の精密化を得た. これらの応用として次の非自明な等式を示すことができる.

系 12 ([24]) $m \geq 2$ に対して,

$$\begin{aligned} & O(a_1, \dots, a_{m-1}, a_m, a_{m-1}, \dots, a_1) + O(a_m, \dots, a_2, a_1, a_2, \dots, a_m) \\ & + \sum_{i=2}^{m-1} \theta(a_{i-1}, \dots, a_1, \dots, a_{i-1}; a_i; a_{i+1}, \dots, a_m, \dots, a_{i+1}) \in \text{Ker } \mathfrak{s}_{2m-1} \end{aligned}$$

*7 AS, IHX, self-loop 関係式の類で割ってしまうと後で $\tilde{\mathfrak{s}}_n$ が well-defined にならない.

*8 Y_{n+2} 同値の下では半ひねりの方向は影響しない.

が従う．次にそれ以外の元の $\pi \circ \mathfrak{s}_{2m-1}$ による像が非自明であることを示すために，準同型 $\bar{z}_{2m,l}$ を用いる：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{2m-1,1}^c & \xrightarrow{\pi \circ \mathfrak{s}_{2m-1,1}} & \pi(Y_{2m-1}\mathcal{IC}/Y_{2m}) \xrightarrow{\bar{z}_{2m,1}} \mathcal{A}_{2m,1}^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ & & \downarrow \bar{z}_{2m,2} \\ & & (\mathcal{A}_{2m,2}^c / \langle \Theta_{2m}^{\geq 1} \rangle) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xleftarrow[\cong]{\text{bu}} \mathcal{A}_{2m-2,1}^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \end{array}$$

右側の 2 つの加群はどちらも 1 ループ部分であり，その構造はよく分かっている ([23, Proposition 5.2]) ため，非自明性を確認できる．最後に階数を計算するために，組合せ論における数珠順列と関係する議論を用いて，適切な数え上げを実行する．

4.3 $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+k}$ および $Y_n\mathcal{IH}/Y_{n+k}$ への応用 (定理 5)

$1 \leq k \leq n$ のとき $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1}$ だけでなく $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+k}$ も Abel 群となり，さらに $1 \leq k' < k$ に対して完全列

$$0 \rightarrow Y_{n+k'}\mathcal{IC}/Y_{n+k} \rightarrow Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+k} \rightarrow Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+k'} \rightarrow 0$$

が存在する． $k \geq 2$ として最初に現れるのは $Y_2\mathcal{IC}/Y_4$ であり，これは 3.2 節で述べたことから $n = k = 2$, $k' = 1$ の場合に完全列が分裂し，群構造が分かる．次に現れるのは $Y_3\mathcal{IC}/Y_5$ だが，結論として完全列は分裂せず， $Y_4\mathcal{IC}/Y_5$ と $Y_3\mathcal{IC}/Y_4$ の関係は複雑かつおもしろい状況にある．それを説明するために $J = O(a, b, a) \in \text{tor } \mathcal{A}_{3,1}^c$ に着目する．その持ち上げとして，たとえば $\tilde{J} = O(a_1, b, a_2) \in \mathbb{Z}\tilde{\mathcal{J}}_{3,1}$ を取る．そして完全性から $\mathfrak{s}_4(x) \mapsto 2\mathfrak{s}_3(\tilde{J}) \in Y_3\mathcal{IC}/Y_5$ なる $x \in \mathcal{A}_4^c$ が存在する．この元を具体的に求める手法はこれまで無かったが，精密化された関係式を対称な Jacobi 図に対して適用することで，

$$x = -2O(a, a, a, b) - O(a, a, b, b) - \theta(a; ; b)$$

と求まる．このような議論をより一般に行うことで， $Y_3\mathcal{IC}/Y_5$ が自由 Abel 群であることが示せる (定理 5)．なお階数については，表 1 から $\text{rank } \mathcal{A}_3^c = \frac{2}{5}(4g^5 - 5g^3 + g) + \binom{2g}{3}$ および

$$\text{rank } \mathcal{A}_4^c = \frac{1}{15}(32g^6 + 20g^3 - 2g^2 - 5g) + \frac{1}{2}(4g^4 + 4g^3 + 3g^2 + g) + \binom{2g+1}{2} + 1$$

が分かり，それらの和として求まる：

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}}(Y_3\mathcal{IC}/Y_5) = \frac{1}{30}(g+1)(2g+1)(32g^4 - 24g^3 + 50g^2 - 23g + 30).$$

また完全列からなる可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & 0 & & 0 & \\
& & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & Y_5IC/Y_6 & \longrightarrow & Y_4IC/Y_6 & \longrightarrow & Y_4IC/Y_5 \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & Y_5IC/Y_6 & \longrightarrow & Y_3IC/Y_6 & \longrightarrow & Y_3IC/Y_5 \longrightarrow 0 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & Y_3IC/Y_4 & \equiv & Y_3IC/Y_4 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & 0 & & 0
\end{array}$$

において, Y_4IC/Y_5 と Y_3IC/Y_5 が自由 Abel 群であることから, $\text{tor}(Y_5IC/Y_6) = \text{tor}(Y_4IC/Y_6) = \text{tor}(Y_3IC/Y_6)$ となる. したがって $\text{tor}(Y_3IC/Y_4) \neq \{0\}$ の元は $\text{tor}(Y_3IC/Y_6) \neq \{0\}$ には持ち上がらず, 特に縦の 2 列は分裂しない.

さてホモロジー同境界群 \mathcal{IH} に対しても Abel 群 $Y_n\mathcal{IH}/Y_{n+k}$ が定義できる. しかし,

$$0 \rightarrow Y_{n+1}\mathcal{IH}/Y_{n+2} \rightarrow Y_n\mathcal{IH}/Y_{n+2} \rightarrow Y_n\mathcal{IH}/Y_{n+1} \rightarrow 0$$

において中央の完全性が保証されない点で少し厄介である. $n = 2$ のときは, 準同型

$$\iota: Y_2\mathcal{IH}/Y_3 \cong \mathcal{A}_{2,0}^c \hookrightarrow \mathcal{A}_2^c \cong Y_2IC/Y_3$$

が定まるから, 可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & Y_3IC/Y_4 & \longrightarrow & Y_2IC/Y_4 & \longrightarrow & Y_2IC/Y_3 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Big) \iota \\
0 & \longrightarrow & Y_3\mathcal{IH}/Y_4 & \longrightarrow & Y_2\mathcal{IH}/Y_4 & \longrightarrow & Y_2\mathcal{IH}/Y_3 \longrightarrow 0
\end{array}$$

において, 上段の完全性から下段の完全性が従う. そして完全列が分裂することから $Y_2\mathcal{IH}/Y_4$ の構造が決定される.

$n = 3$ のときも, 準同型

$$\iota: Y_3\mathcal{IH}/Y_4 \cong \mathcal{A}_{3,0}^c / \text{Im } \Delta_{1,0} \hookrightarrow \mathcal{A}_3^c / \text{Ker } \mathfrak{s}_3 \cong Y_3IC/Y_4$$

が定まることから完全列であることが分かり, $Y_3\mathcal{IH}/Y_5$ が求まる (定理 5). ただし分裂はしないため, Y_3IC/Y_5 の計算結果を必要とする. 一般には $\text{Ker}(\text{Gr } q \circ \mathfrak{s}_{n,0}) \supset \text{Ker } \mathfrak{s}_{n,0}$ において等号が成立するかが問題となる (問題 7, 9).

5 今後の課題

現時点で定理 2 は射影 π を含んでおり，問題 1 への完全な解答にはなっていない．その差を埋めることが当面の課題である．より一般的な課題としては，Abel 群 $Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+k}$ ($1 \leq k \leq n$) の構造決定がある．完全決定は大きすぎる目標であり，具体的には「いつトーションが存在し，どれくらい豊富にあるか」や「奇数位数のトーション元があるか否か」などに興味がある．これらを通して有限型不変量への理解を深め，Goussarov-葉廣予想の解決にもつなげたい．関連する群として $Y_n \mathcal{IH}/Y_{n+k}$ も重要であり，Conant, Scheiderman, Teichner の仕事と合わせることでさらなる広がり期待できる．

また $\bar{z}_{n+1,1}$ を研究する中で，Reidemeister トーションとの繋がりを見出しており，これに関しては [23, 24] に引き続く共同研究として論文を執筆中である．Massuyeau, Meilhan [18] を参考に非可換な Reidemeister-Turaev トーションを定義し，それを LMO 関手の 1 ループ部分や榎本-佐藤トレースと結びつけた．1 ループやトレースに着目した先行研究として，Kricker [13] や Massuyeau, 逆井 [19] がある．

別の方向性として種数に関する振る舞いも興味深い．まず自然な埋め込み $\mathcal{IC}_{g,1} \hookrightarrow \mathcal{IC}_{g+1,1}$ から単射準同型 $Y_n \mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+1} \hookrightarrow Y_n \mathcal{IC}_{g+1,1}/Y_{n+1}$ が誘導される．これは Torelli 群の降中心列 $\mathcal{I}_{g,1} = \mathcal{I}_{g,1}(1) \supset \mathcal{I}_{g,1}(2) \supset \dots$ よりも素直な振る舞いをしている．たとえば，可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_{2,1}/\mathcal{I}_{2,1}(2) & \longrightarrow & \mathcal{I}_{3,1}/\mathcal{I}_{3,1}(2) \\ \text{Gr c} \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathcal{IC}_{2,1}/Y_2 & \hookrightarrow & \mathcal{IC}_{3,1}/Y_2 \end{array}$$

(右の同型は [17, Theorem 1.3]) において， $\mathcal{I}_{2,1}/\mathcal{I}_{2,1}(2)$ が有限生成でないことから上段の写像は単射でない．関連する話題として，安定化された Y フィルトレーション $\mathcal{IC}_{g,1} \cap \varinjlim_{g'} Y_n \mathcal{IC}_{g',1}$ が通常の $Y_n \mathcal{IC}_{g,1}$ に一致することが示されている ([10, Proposition 6.1], [11, Section 5.3]).

注意 14 ホモロジー同境界群の場合，準同型 $Y_n \mathcal{IH}_{g,1}/Y_{n+1} \rightarrow Y_n \mathcal{IH}_{g+1,1}/Y_{n+1}$ の単射性は自明でない．加群 $\mathcal{A}_{n,0}^c$ の種数 g に関する単射性から $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ の場合には単射だが， \mathcal{IH} の定義から直接示す方法を筆者は知らない．

参考文献

- [1] Jae Choon Cha, Stefan Friedl, and Taehee Kim. The cobordism group of homology cylinders. *Compos. Math.*, Vol. 147, No. 3, pp. 914–942, 2011.
- [2] Dorin Cheptea, Kazuo Habiro, and Gwénaél Massuyeau. A functorial LMO invariant for Lagrangian cobordisms. *Geom. Topol.*, Vol. 12, No. 2, pp. 1091–1170, 2008.
- [3] James Conant, Rob Schneiderman, and Peter Teichner. Tree homology and a conjecture of Levine. *Geom. Topol.*, Vol. 16, No. 1, pp. 555–600, 2012.
- [4] James Conant, Rob Schneiderman, and Peter Teichner. Whitney tower concordance of classical links. *Geom. Topol.*, Vol. 16, No. 3, pp. 1419–1479, 2012.
- [5] James Conant, Robert Schneiderman, and Peter Teichner. Geometric filtrations of string links and homology cylinders. *Quantum Topol.*, Vol. 7, No. 2, pp. 281–328, 2016.
- [6] Stavros Garoufalidis and Jerome Levine. Tree-level invariants of three-manifolds, Massey products and the Johnson homomorphism. In *Graphs and patterns in mathematics and theoretical physics*, Vol. 73 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pp. 173–203. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [7] Mikhail Goussarov. Finite type invariants and n -equivalence of 3-manifolds. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, Vol. 329, No. 6, pp. 517–522, 1999.
- [8] Kazuo Habiro. Claspers and finite type invariants of links. *Geom. Topol.*, Vol. 4, pp. 1–83, 2000.
- [9] 葉廣和夫. 日本の現代数学—新しい展開をめざして, 結び目の同値関係とクラスパーについて, pp. 175–196. 数学書房, 2010.
- [10] Kazuo Habiro and Gwénaél Massuyeau. Symplectic Jacobi diagrams and the Lie algebra of homology cylinders. *J. Topol.*, Vol. 2, No. 3, pp. 527–569, 2009.
- [11] Kazuo Habiro and Gwénaél Massuyeau. From mapping class groups to monoids of homology cobordisms: a survey. In *Handbook of Teichmüller theory. Volume III*, Vol. 17 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pp. 465–529. Eur. Math. Soc., Zürich, 2012.
- [12] 河澄響矢, 久野雄介. 写像類群のリー代数を求めて. 2021 年度秋季総合分科会トポロジー分科会講演アブストラクト, pp. 35–52. 日本数学会, 2021.

- [13] Andrew Kriker. A surgery formula for the 2-loop piece of the LMO invariant of a pair. In *Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001)*, Vol. 4 of *Geom. Topol. Monogr.*, pp. 161–181. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002.
- [14] Jerome Levine. Homology cylinders: an enlargement of the mapping class group. *Algebr. Geom. Topol.*, Vol. 1, pp. 243–270, 2001.
- [15] Jerome Levine. Labeled binary planar trees and quasi-Lie algebras. *Algebr. Geom. Topol.*, Vol. 6, pp. 935–948, 2006.
- [16] Wilhelm Magnus, Abraham Karrass, and Donald Solitar. *Combinatorial group theory*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, second edition, 2004. Presentations of groups in terms of generators and relations.
- [17] Gwénaél Massuyeau and Jean-Baptiste Meilhan. Characterization of Y_2 -equivalence for homology cylinders. *J. Knot Theory Ramifications*, Vol. 12, No. 4, pp. 493–522, 2003.
- [18] Gwénaél Massuyeau and Jean-Baptiste Meilhan. Equivalence relations for homology cylinders and the core of the Casson invariant. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 365, No. 10, pp. 5431–5502, 2013.
- [19] Gwénaél Massuyeau and Takuya Sakasai. Morita’s trace maps on the group of homology cobordisms. *J. Topol. Anal.*, Vol. 12, No. 3, pp. 775–818, 2020.
- [20] Shigeyuki Morita, Takuya Sakasai, and Masaaki Suzuki. Geometry and analysis of discrete groups and hyperbolic spaces. In Michihiko Fujii, Nariya Kawazumi, and Ken’ichi Ohshika, editors, *Proceedings of the workshop held at the Research Institute for Mathematical Sciences (RIMS), Kyoto University, Kyoto, June 22–26, 2015*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu [Series of Lecture Notes from RIMS], B66, p. 230. Research Institute for Mathematical Sciences (RIMS), Kyoto, 2017.
- [21] Shigeyuki Morita, Takuya Sakasai, and Masaaki Suzuki. ADDENDUM TO “AN ABELIAN QUOTIENT OF THE SYMPLECTIC DERIVATION LIE ALGEBRA OF THE FREE LIE ALGEBRA” (Topology and Analysis of Discrete Groups and Hyperbolic Spaces). *数理解析研究所講究録*, Vol. 2062, pp. 1–9, 4 2018.
- [22] 野崎雄太. LMO 関手を用いた不変量と写像類群への応用. 第 68 回トポロジーシンポジウム講演集, pp. 32–43, 2021.
- [23] Yuta Nozaki, Masatoshi Sato, and Masaaki Suzuki. Abelian quotients of the Y -filtration on the homology cylinders via the LMO functor. *Geom. Topol.*, to

appear.

- [24] Yuta Nozaki, Masatoshi Sato, and Masaaki Suzuki. On the kernel of the surgery map restricted to the 1-loop part. arXiv:2103.07086, 2021.
- [25] Tomotada Ohtsuki. *Quantum invariants*, Vol. 29 of *Series on Knots and Everything*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002. A study of knots, 3-manifolds, and their sets.
- [26] 大槻知忠. 結び目の不変量. 共立講座数学の輝き. 共立出版, 2015.
- [27] Takuya Sakasai. The Magnus representation and higher-order Alexander invariants for homology cobordisms of surfaces. *Algebr. Geom. Topol.*, Vol. 8, No. 2, pp. 803–848, 2008.
- [28] TAKUYA SAKASAI. THE MAGNUS REPRESENTATION AND ABELIAN QUOTIENTS OF GROUPS OF HOMOLOGY CYLINDERS (Twisted topological invariants and topology of low-dimensional manifolds). 数理解析研究所講究録, Vol. 1747, pp. 126–134, 6 2011.
- [29] Rob Schneiderman. Introduction to whitney towers. arXiv:2012.01475, 2020.
- [30] John Stallings. Homology and central series of groups. *J. Algebra*, Vol. 2, pp. 170–181, 1965.
- [31] Tadayuki Watanabe. Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of $\text{Diff}(S^4)$. arXiv:1812.02448, 2018.
- [32] Tadayuki Watanabe. Addendum to: Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of $\text{Diff}(S^4)$ (homological interpretation). arXiv:2109.01609, 2021.