Higher dimensional extensions of Johnson homomorphisms via bordism groups

東京大学・大学院数理科学研究科　逆井 卓也
Takuya Sakasai
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

本稿は, 研究集会での講演に合わせて論文 [14, 15, 16] の内容をまとめ, 斉藤諒氏, 中嶋怜人氏と共に筆者が進めている共同研究の内容を紹介するものである. 扱う多様体は全て滑らか (C^∞ 級) であるとし, 整係数 (コ) ホモロジー群の係数の表記は省略することとする. ただし, ほとんどの議論は連続 (C^0 級) のカテゴリーで考えても成立する.

1　写像類群とホモロジー同境のなす群

X を連結でコンパクトな向きづけられた p 次元多様体とする. 境界 ∂X は連結もしくは空集合であると仮定する. 本稿では, X の **写像類群** を

$$\mathcal{M}(X) := \mathrm{Diff}_+(X\,\mathrm{rel.}\,\partial X)/(\text{擬アイソトピー})$$

で定める. 通常の写像類群 (Homeotopy 群) や Diffeotopy 群と異なり, 擬アイソトピーによる同値関係を考えていることに注意する. このとき ($\partial X \neq \emptyset$ であれば ∂X 上にとった基点に関する) 基本群 $\pi_1(X)$ への自然な作用 (もしくは外部作用) により

$$\sigma\colon \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\pi_1(X)) \quad (\text{ただし } \partial X \neq \emptyset),$$
$$\sigma\colon \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathrm{Out}(\pi_1(X))$$

という準同型写像が定まる. さらに 1 次ホモロジー群への作用を誘導することにより

$$\sigma_2\colon \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H_1(X))$$

という準同型写像が定まるが, その核 $\mathcal{I}(X) := \mathrm{Ker}\,\sigma_2$ を曲面の写像類群の場合にならって **Torelli 群** と呼ぶことにする.

定義 1.1 コンパクトで向きづけられた $(p+1)$ 次元多様体 M と 2 つの埋め込み写像 (**マーキング**と呼ぶ) $i_+, i_- : X \hookrightarrow \partial M$ が以下を満たすとき, 3 つ組 (M, i_+, i_-) を X 上の **ホモロジー同境** という:

1. i_+ は向きを保ち, i_- は向きを保たない;
2. $\partial M = i_+(X) \cup i_-(X)$ かつ $i_+(X) \cap i_-(X) = i_+(\partial X) = i_-(\partial X)$;
3. $i_+|_{\partial X} = i_-|_{\partial X}$;
4. $i_+, i_- : H_*(X) \xrightarrow{\cong} H_*(M)$ は同型写像.

そして, X 上のホモロジー同境の同型類 (マーキングと compatible な微分同相写像による同値類) の集合を $\mathcal{C}(X)$ とする.

2 つのホモロジー同境 $(M, i_+, i_-), (N, j_+, j_-) \in \mathcal{C}(X)$ に対して

$$(M, i_+, i_-) \cdot (N, j_+, j_-) := (M \cup_{i_- \circ (j_+)^{-1}} N, i_+, j_-) \quad \in \mathcal{C}(X)$$

と定めることで $\mathcal{C}(X)$ にはモノイドの構造が入る. 単位元は $(X \times [0,1], \mathrm{id} \times 1, \mathrm{id} \times 0)$ で与えられる. ここで $\partial(X \times [0,1]) = X \cup (-X)$ となるよう, 角を丸め, X の境界を引き伸ばしている.

例 1.1 X の写像類群 $\mathcal{M}(X)$ の元である写像類 $[f] \in \mathcal{M}(X)$ に対し, その代表元 $f\colon X \xrightarrow{\cong} X$ は境界上で恒等写像であるような微分同相写像で与えられる. このとき,

$$(X \times [0,1], \mathrm{id} \times 1, f \times 0)$$

は $\mathcal{C}(X)$ の元を与える. 擬アイソトピーの定義と比較することで, この構成がモノイドの埋め込み $\mathcal{M}(X) \hookrightarrow \mathcal{C}(X)$ を与えることが確かめられる.

さらに, 次のような $\mathcal{C}(X)$ の商集合を定める.

定義 1.2 (ホモロジー同境群) 商集合

$$\mathcal{H}(X) := \mathcal{C}(X)/((p+2) \text{ 次元多様体による向きづけられたホモロジー同境})$$

は $(M, i_+, i_-)^{-1} = (-M, i_-, i_+)$ となるような群構造をもつ (商集合の元も $\mathcal{C}(X)$ の元と同じ記法で記している). この群を X の **ホモロジー同境群** と呼ぶ.

正確には, $\mathcal{H}(X)$ は X 上のホモロジー同境のホモロジー同境群と呼ぶべきものだが, 簡単のために単にホモロジー同境群と呼ぶことにする.

以上の定義は曲面の場合の Habiro [3], Garoufalidis-Levine [2], Levine [11] による定義を一般の多様体で考えたものとなっている. 曲面の写像類群の研究において重要な役割を果たす Johnson 準同型の理論は, これらの論文において曲面のホモロジー同境群に対して拡張され, 興味深い研究が続けられている. 我々の設定においても同様の構成をすることができる. そのために基本となるのは次の定理である:

定理 1.3 (Stallings [17]) 2-連結な群準同型写像 $\varphi\colon A \to B$ は任意の $k \geq 2$ について第 k べき零商の同型写像

$$\varphi\colon N_k(A) \xrightarrow{\cong} N_k(B)$$

を誘導する. ここで群 G に対して $N_k(G)$ をその第 k べき零商とし, 番号 k については $N_2(G) = G/[G,G] = H_1(G)$ となるよう定めている. また準同型写像が 2-連結であるとは, H_1 の同型と H_2 の全射を誘導するときをいう.

$(M, i_+, i_-) \in \mathcal{C}(X)$ に対し, $i_+, i_-\colon \pi_1(X) \to \pi_1(M)$ は 2-連結な準同型写像となるので,

$$i_+, i_-\colon N_k(\pi_1(X)) \longrightarrow N_k(\pi_1(M))$$

は同型写像である. そこで,

$$\sigma_k\colon \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}(N_k(\pi_1(X))), \quad (M, i_+, i_-) \longmapsto i_+^{-1} \circ i_-$$

という写像を考えると, この写像はモノイド準同型写像であり, さらに群 $\mathcal{H}(X)$ からの群準同型写像

$$\sigma_k\colon \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}(N_k(\pi_1(X)))$$

を誘導する. これにより $\mathcal{C}(X)$ や $\mathcal{H}(X)$ に対しても Johnson 準同型と同様の理論を展開することができる.

2　群のホモロジー同境

この節では, 前節でみたホモロジー同境群の構成を群のレベルで行う. F を有限表示可能で剰余べき零 (residually nilpotent) な群とする. 後ほど主に F が自由群の場合を考えるので, F を最初からそのように考えても差し支えない. モノイド $\mathcal{A}(F)$ を以下のように構成する. まず

$$\widetilde{\mathcal{A}}(F) := \left\{ (G, \varphi_+, \varphi_-) \;\middle|\; \begin{array}{l} G\colon\ \text{有限表示可能な群} \\ \varphi_+, \varphi_-\colon F \to G,\ \ \text{2-連結な準同型写像} \end{array} \right\}$$

とおく. 2 つの $\widetilde{\mathcal{A}}(F)$ の元 $(G, \varphi_+, \varphi_-)$, (G', ψ_+, ψ_-) が同値であることを, 同型写像 $\rho\colon G \xrightarrow{\cong} G'$ で図式

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dd, "\exists\rho"', "\cong"] & \\ F \arrow[ur, "\varphi_+"] \arrow[dr, "\psi_+"'] & & F \arrow[ul, "\varphi_-"'] \arrow[dl, "\psi_-"] \\ & G' & \end{tikzcd}$$

を可換にするようなものが存在することとして定めると, 同値関係が得られる. この同値関係による $\widetilde{\mathcal{A}}(F)$ の商集合を $\mathcal{A}(F)$ とする.

$\mathcal{A}(F)$ に次のようにして積構造を定義する:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(F) \times \mathcal{A}(F) & \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} & \mathcal{A}(F) \\ \cup & & \cup \\ ((G, \varphi_+, \varphi_-), (G', \psi_+, \psi_-)) & \longmapsto & (G *_F G', \varphi_+, \psi_-) \end{array}$$

ここで $G *_F G'$ は φ_- と ψ_+ の融合積

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\varphi_-"] \arrow[d, "\psi_+"'] & G \arrow[d] \\ G' \arrow[r] & G *_F G' \end{tikzcd}$$

である. F の剰余べき零性より φ_-, ψ_+ が単射となるので, 群の融合積に関する群のホモロジーの Mayer-Vietoris 完全系列が使え, 上の積写像が well-defined であることが分かる. この積構造により $\mathcal{A}(F)$ は $(F, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ を単位元とするモノイドになる.

さらにモノイド $\mathcal{A}(F)$ から群 $\mathcal{B}(F)$ を以下のように構成する. 2 つの $\mathcal{A}(F)$ の元 $(G, \varphi_+, \varphi_-)$, (G', ψ_+, ψ_-) がホモロジー同境であるということを，ある有限表示可能な群 $\widetilde{G}$ と 2-連結な準同型写像

$$\varphi\colon G \longrightarrow \widetilde{G}, \qquad \psi\colon G' \longrightarrow \widetilde{G}$$

であって, 図式

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "\varphi"] & \\ F \arrow[ur, "\varphi_+"] \arrow[dr, "\psi_+"'] & \widetilde{G} & F \arrow[ul, "\varphi_-"'] \arrow[dl, "\psi_-"] \\ & G' \arrow[u, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にするようなものが存在することとして定める. $\mathcal{A}(F)$ をホモロジー同境による関係が生成する同値関係で割って得られる商集合を $\mathcal{B}(F)$ とおくと, $\mathcal{B}(F)$ には $\mathcal{A}(F)$ から誘導される群構造が入る. 群 $\mathcal{B}(F)$ において $(G,\varphi_+,\varphi_-)^{-1}=(G,\varphi_-,\varphi_+)$ が成り立つ.

例 2.1 F の自己同型群 $\operatorname{Aut} F$ の元 φ に対して (F,id,φ) を対応させることで $\operatorname{Aut} F$ から $\mathcal{A}(F)$ へのモノイドの埋め込みを構成することができる. 以下, この対応によって $\operatorname{Aut} F$ を $\mathcal{A}(F)$ の部分モノイドとみることにする.

前節の構成とこの節の構成が, 基本群への誘導写像を考えることで関係づけられることは明らかだろう. すなわち, X をその基本群が剰余べき零群であるような多様体とするとき, X 上のホモロジー同境 $(M,i_+,i_-)\in\mathcal{C}(X)$ から $\pi_1(X)$ 上のホモロジー同境 $(\pi_1(M),i_+,i_-)\in\mathcal{A}(\pi_1(X))$ を考えるのである. この対応を $\widetilde{\sigma}\colon\mathcal{C}(X)\to\mathcal{A}(\pi_1(X))$ とすると, $\widetilde{\sigma}$ はモノイド準同型写像であり, さらに群準同型写像 $\widetilde{\sigma}\colon\mathcal{H}(X)\to\mathcal{B}(\pi_1(X))$ が誘導される. 以上をまとめて, 可換図式

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Aut}(\pi_1(X)) \arrow[r, hook] & \mathcal{A}(\pi_1(X)) \arrow[r, two heads] & \mathcal{B}(\pi_1(X)) \\
\mathcal{M}(X) \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r, hook] & \mathcal{C}(X) \arrow[u, "\widetilde{\sigma}"] \arrow[r, two heads] & \mathcal{H}(X) \arrow[u, "\widetilde{\sigma}"]
\end{tikzcd}$$

が得られる.

例 2.2 F を階数 2 の自由群 $F_2=\langle x_1,x_2\rangle$ とする. 自己準同型写像 $\psi: F_2=\langle x_1,x_2\rangle\to F_2$ を

$$\psi(x_1)=x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1},\qquad \psi(x_2)=x_2.$$

で定めると, これは F_2 の同型写像ではないが, 2-連結な自己準同型写像となっている. これより $(F_2,\mathrm{id},\psi)\in\mathcal{A}(F_2)$ は $\operatorname{Aut}(F_2)$ に属さない元を与える. より一般に $\operatorname{End}_2 F_n$ を階数 n の自由群 F_n の 2-連結な自己準同型写像全体のなす集合とすると, 準同型写像の合成によって $\operatorname{End}_2 F_n$ はモノイドとなるが,

$$\operatorname{Aut}(F_n)\hookrightarrow\operatorname{End}_2(F_n)\hookrightarrow\mathcal{B}(F_n)$$

というモノイド埋め込みの列が得られる.

この例からも想像がつくように, 一般に群 $\mathcal{B}(F)$ は $\operatorname{Aut} F$ を拡大するものとなっている. この拡大群がある群の自己同型群として表される, というのが論文 [14] の主定理の 1 つであった (その論文では $F=F_n$ のときのみを扱っているが, 以下の仮定のもとで一般化するのは容易である):

定理 2.1 ([14]) F を有限表示可能で剰余べき零な群とするとき, 自然な同型写像

$$\mathcal{B}(F)\xrightarrow{\cong}\operatorname{Aut}(F^{\mathrm{acy}})$$

が存在する. ここで F^{acy} は F の **acyclic closure** である.

定理に現れた群の acyclic closure (HE-closure ともいう) は Levine によって [9, 10] において定義されたものである (Hillman の本 [5] も参照). 群 G からその acyclic closure をどのように構成するかについて述べることは割愛するが, 重要な性質として以下のものがある:

- 自然な 2-連結準同型写像 $\iota_G\colon G\to G^{\mathrm{acy}}$ が存在する. とくに, $N_k(G)\cong N_k(G^{\mathrm{acy}})$ が成り立つ.
- 有限表示可能な群 G_1, G_2 の間の 2-連結準同型写像 $\varphi\colon G_1\to G_2$ は同型写像 $\varphi^{\mathrm{acy}}\colon G_1^{\mathrm{acy}}\xrightarrow{\cong}G_2^{\mathrm{acy}}$ を誘導する.

これらを用いると, 定理 2.1 の同型写像は

$$(G, \varphi_+, \varphi_-) \longmapsto (\varphi_+^{\mathrm{acy}})^{-1} \circ \varphi_-^{\mathrm{acy}} \colon F^{\mathrm{acy}} \xrightarrow{\cong} F^{\mathrm{acy}}$$

で与えられる.

3　ホモロジー同境群のアーベル商

以下の節では, $p \geq 3, n \geq 2$ とし,

$$X = X_{n,1}^p := \mathop{\#}_n (S^1 \times S^{p-1}) \# D^p$$

のときを考える. このとき

$$\begin{aligned} F_n &= \pi_1(X_{n,1}^p) \cong F_n, \\ H_1 &:= H_1(X_{n,1}^p) \cong H_1(F_n) \cong H_1(F_n^{\mathrm{acy}}) \end{aligned}$$

となっている. $X_{n,1}^2$ は連結な境界を持つ種数 n の連結で向きづけられたコンパクト曲面となるので, $X_{n,1}^p$ はその高次元化のひとつであると言える. これまでに見てきた構成により, 可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Aut}(F_n) \arrow[r, hook] & \mathrm{Aut}(F_n^{\mathrm{acy}}) . \\ \mathcal{M}(X_{n,1}^p) \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r] & \mathcal{H}(X_{n,1}^p) \arrow[u, "\widetilde{\sigma}"'] \end{tikzcd}$$

が存在する. 準同型写像 $\sigma\colon \mathcal{M}(X_{n,1}^p) \to \mathrm{Aut}(F_n)$ については以下のことが示されていた:

定理 3.1 (Laudenbach [7]) 群完全列

$$1 \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \longrightarrow \mathcal{M}(X_{n,1}^3) \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Aut}(F_n) \longrightarrow 1$$

が存在する. ここで $\mathcal{M}(X_{n,1}^3)$ は通常の写像類群 (Diffeotopy 群) としてよい.

定理 3.2 (Cavicchioli-Hegenbarth [1]) $p \geq 4$ のときも, 群完全列

$$1 \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \longrightarrow \mathcal{M}(X_{n,1}^p) \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Aut}(F_n) \longrightarrow 1$$

が存在する.

これに対し, 準同型写像 $\widetilde{\sigma}$ については次が成り立つ:

定理 3.3 ([16]) $p \geq 3$ のとき $\widetilde{\sigma}\colon \mathcal{H}(X_{n,1}^p) \to \mathrm{Aut}(F_n^{\mathrm{acy}})$ は全射である.

$\mathrm{Ker}\,\widetilde{\sigma}$ についてはほとんど何も分かっていないのが現状である. なお, $p = 2$ のときは例外的である:

定理 3.4 ([14]) $\widetilde{\sigma}\colon \mathcal{H}(X_{n,1}^2) \to \mathrm{Aut}(F_{2n}^{\mathrm{acy}})$ の像は

$$\{\varphi \in \mathrm{Aut}(F_{2n}^{\mathrm{acy}}) \mid \varphi(\zeta) = \zeta\}$$

と等しい. ここで $\zeta \in F_{2n} \subset F_{2n}^{\mathrm{acy}}$ は曲面 $X_{n,1}^2$ の境界に対応する語である.

この結果は曲面の写像類群の古典的な結果である Dehn-Nielsen の定理のホモロジー同境版となっている. この場合の核 $\mathrm{Ker}\,\widetilde{\sigma}$ についても分かっていないことが多いが, [15] において稠密かつ有限生成でない像を持つ準同型写像 $\mathrm{Ker}\,\widetilde{\sigma} \to \mathbb{R}$ を構成している. 定理 3.3, 3.4 の証明は手術を用いることで行われるが, 前者の方が幾分易しいものとなっている.

さらに, 群 $\mathrm{Aut}(F_n^{\mathrm{acy}})$ については次のことが分かっている:

定理 3.5 ([16]) 任意の $n \geq 2$ に対し $H_1(\mathrm{Aut}(F_n^{\mathrm{acy}}))$ は $\mathbb{Z}^\infty$ を商群に持つ. とくに, $\mathrm{Aut}(F_n^{\mathrm{acy}})$ は有限生成でない.

定理 3.3 より任意の $p \geq 3$ について $\mathcal{H}(X_{n,1}^p)$ もまた同様の性質を持つことが従う.

(定理 3.5 の証明の概略) Le Dimet [8] や Kirk-Livingston-Wang [6] の構成の類似として, 論文 [14] において曲面のホモロジー同境群に対して Magnus 表現と呼ばれるねじれ準同型写像

$$r\colon \mathrm{Aut}(F_n^{\mathrm{acy}}) \longrightarrow GL(n, \mathcal{K}_{H_1})$$

が構成されている. ここで $\mathcal{K}_{H_1}$ は群環 $\mathbb{Z}H_1(F_n^{\mathrm{acy}}) = \mathbb{Z}H_1$ の商体である. このままでは準同型写像ではないが, 行列式をとり, ねじれ具合を打ち消すように商をうまくとることで準同型写像

$$\mathrm{Aut}(F_n^{\mathrm{acy}}) \xrightarrow{r} GL(n, \mathcal{K}_{H_1}) \xrightarrow{\det} \mathcal{K}_{H_1}^\times \twoheadrightarrow \mathcal{K}_{H_1}^\times/\!\sim\, \cong \mathbb{Z}^\infty$$

を作ることができる. いま 2-連結準同型写像 $f_m\colon F_n \to F_n$ を

$$f_m(\gamma_1) = (\gamma_1\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1})^m\gamma_1\gamma_2^{2m}, \qquad f_m(\gamma_i) = \gamma_i\ (2 \leq i \leq n)$$

で定めると, $\{f_m^{\mathrm{acy}} \in \mathrm{Aut}(F_n^{\mathrm{acy}}) \mid 2m+1$ は素数$\}$ の像が互いに線型独立であることが示される. □

この証明で用いた Magnus 表現を用いることで次も分かる:

定理 3.6 ([16]) 任意の $n \geq 2$ に対して F_n^{acy} は有限生成でない.

4 ホモロジー同境群のボルディズム不変量

自由群のべき零商 $N_k := N_k(F_n)$ と acyclic closure のべき零商 $N_k(F_n^{\mathrm{acy}})$ は自然に同型であったから, 各 $k \geq 2$ に対して自然な準同型写像

$$\sigma_k\colon \mathcal{H}(X_{n,1}^p) \xrightarrow{\widetilde{\sigma}} \mathrm{Aut}(F_n^{\mathrm{acy}}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(N_k)$$

が存在する. Stallings の定理を用いると, 2 つ目の写像が全射であることが直ちに分かる. なお, σ_k を $\mathcal{M}(X_{n,1}^p)$ に制限したものは $\sigma\colon \mathcal{M}(X_{n,1}^p) \to \mathrm{Aut}(F_n)$ を通じた N_k への自然な作用と一致する.

σ_k たちを用いると,

$$\mathcal{H}(X_{n,1}^p)[0] := \mathcal{H}(X_{n,1}^p), \quad \mathcal{H}(X_{n,1}^p)[k] := \mathrm{Ker}\,\sigma_{k+1}$$

によって $\mathcal{H}(X_{n,1}^p)$ の降下列を定めることができる. $\mathcal{IH}(X_{n,1}^p) := \mathcal{H}(X_{n,1}^p)[1]$ は Torelli 群 $\mathcal{I}(X_{n,1}^p)$ に対応するものである. この降下列により, 曲面の写像類群やホモロジー同境群に対する Johnson 準同型の理論の類似を $\mathcal{H}(X_{n,1}^p)$ に対しても展開することができる.

以下, 斉藤諒氏の修士論文 [13] ならびに, 中嶋怜人氏も加えた 3 名の共同研究について述べる. この研究は曲面の場合の森田準同型 [12] やそれと等価な Heap 準同型 [4] (ホモロジー同境版は [14] を参照) の高次元化を考察するものである. ホモロジー同境の位相的性質を利用する観点から 2 つ

の構成を比べたとき, ボルディズム群を用いた Heap の方法で $\mathcal{H}(X^p_{n,1})$ への一般化を構成した方が簡明であり, 種々のコボルディズム理論を用いた拡張性も兼ね備えている.

ホモロジー同境類 $(M, i_+, i_-) \in \mathcal{H}(X^p_{n,1})[k] = \operatorname{Ker}\sigma_{k+1}$ に対し, その **closure** を

$$C_M := M/(i_+(x) = i_-(x))$$

で定める. C_M は向きづけられた閉多様体である. いま仮定より $\sigma_k(M, i_+, i_-)$ は自明であることから $i_+ = i_- \colon N_k \xrightarrow{\cong} N_k(\pi_1(C_M))$ となることが分かり, これら 2 つの群は自然に同一視できる. そして, この同一視に対応した連続写像

$$\Phi_M \colon C_M \longrightarrow K(N_{k+1}, 1)$$

がホモトピーを法として一意的に定まる. そこで, ボルディズム群 $\Omega_{p+1}(N_{k+1}) = \Omega_{p+1}(K(N_{k+1}, 1))$ に値をとる対応

$$b_k \colon \mathcal{H}(X^p_{n,1})[k] \longrightarrow \Omega_{p+1}(N_{k+1}) \quad (M, i_+, i_-) \longmapsto (C_M, \Phi_M)$$

を考えると, well-defined な準同型写像となっていることが確かめられる ([14] を参照). 終域の $\Omega_{p+1}(N_{k+1})$ については

$$\Omega_{p+1}(N_{k+1}) \otimes \mathbb{Q} \cong \bigoplus_{m=0}^{4k+4} \Omega_m \otimes H_{4k+4-m}(N_{k+1}; \mathbb{Q})$$

が成り立つことに注意する. とくに $k = 1, p = 3$ のときには

$$b_1 \colon \mathcal{IH}(X^3_{n,1}) \longrightarrow \Omega_4(H_1(F_n)) \cong \Omega_4 \oplus H_4(H_1(F_n))$$

の形となる. この像について調べると直ちに次が分かってしまう:

定理 4.1 (Nakashima-Saito-S.) b_1 は自明である.

この結果は 4 次元多様体 M の交叉形式などを観察することで証明することができる. このままでは b_1 は役に立たない写像となってしまうが, 次の構成を考えてみる.

定義 4.2 コンパクトで向きづけられた $(p+1)$ 次元多様体 M と 2 つの埋め込み写像 (**マーキング**と呼ぶ) $i_+, i_- : X \hookrightarrow \partial M$ が以下を満たすとき, 3 つ組 (M, i_+, i_-) を X 上の **H_1-ホモロジー同境**という:

1. i_+ は向きを保ち, i_- は向きを保たない;
2. $\partial M = i_+(X) \cup i_-(X)$ かつ $i_+(X) \cap i_-(X) = i_+(\partial X) = i_-(\partial X)$;
3. $i_+|_{\partial X} = i_-|_{\partial X}$;
4. $i_+, i_- : H_1(X) \xrightarrow{\cong} H_1(M)$ は同型写像.

そして, H_1-ホモロジー同境を用いて $\mathcal{H}(X^p_{n,1})$ のときと同様にして構成される H_1-ホモロジー同境群を $\mathcal{H}_w(X^p_{n,1})$ と書く.

2 次ホモロジー群に関する仮定を外したため, もはや Stallings の定理を用いることはできないが, Torelli 群 $\mathcal{IH}_w(X^p_{n,1})$ は同様に定義することができ, ボルディズム準同型 b_1 も定義することができる.

定理 4.3 (Saito [13], Nakashima-Saito-S.) $b_1 \colon \mathcal{IH}_w(X^3_{n,1}) \to \Omega_4(H_1(F_n))$ は全射である.

(証明の概略) 終域の直和分解 $\Omega_4(H_1(F_n)) \cong \Omega_4 \oplus H_4(H_1(F_n))$ の成分ごとに考える. $H_4(H_1(F_n))$-成分については手術を用いた具体的な構成により全射性が分かる. 残りの Ω_4-成分については, $\mathbb{C}P^2$ や $\overline{\mathbb{C}P^2}$ を必要なだけ連結和することにより, $H_4(H_1(F_n))$-成分を動かすことなく符号数を自由に変化させせることができる. □

このように, b_1 はホモロジー同境と H_1-ホモロジー同境の差を表すものとなっている. より一般のボルディズム準同型についても同様のことを考えることができ, いくつかの結果が得られている.

参考文献

[1] A. Cavicchioli, F. Hegenbarth, *On pseudo-isotopy classes of homeomorphisms of* $\sharp_p(S^1 \times S^n)$, Rev. Mat. Complut. 11 (1998), 145–164.

[2] S. Garoufalidis, J. Levine, *Tree-level invariants of three-manifolds, Massey products and the Johnson homomorphism*, Graphs and patterns in mathematics and theorical physics, Proc. Sympos. Pure Math. 73 (2005), 173–205.

[3] K. Habiro, *Claspers and finite type invariants of links*, Geom. Topol. 4 (2000), 1–83.

[4] A. Heap, *Bordism invariants of the mapping class group*, Topology 45 (2006), 851–886.

[5] J. Hillman, *Algebraic Invariants of Links*, Series on Knots and Everything – Vol. 32, World Scientific Press (2002).

[6] P. Kirk, C. Livingston, Z. Wang, *The Gassner representation for string links*, Commun. Contemp. Math. 1(3) (2001), 87–136.

[7] F. Laudenbach, *Topologie de la dimension trois: homotopie et isotopie*, Astérisque 12, Société Mathématique de France, Paris (1974).

[8] J. Y. Le Dimet, *Enlacements d'intervalles et représentation de Gassner*, Comment. Math. Helv. 67 (1992), 306–315.

[9] J. Levine, *Link concordance and algebraic closure, II*, Invent. Math. 96 (1989), 571–592.

[10] J. Levine, *Algebraic closure of groups*, Contemp. Math. 109 (1990), 99–105.

[11] J. Levine, *Homology cylinders: an enlargement of the mapping class group*, Algebr. Geom. Topol. 1 (2001), 243–270.

[12] S. Morita, *Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces*, Duke Math. J. 70 (1993), 699–726.

[13] R. Saito, *On a higher dimensional extension of the first Johnson homomorphism via bordism groups*, 東京大学大学院数理科学研究科修士論文, (2019).

[14] T. Sakasai, *Homology cylinders and the acyclic closure of a free group*, Algebr. Geom. Topol. 6 (2006), 603–631.

[15] T. Sakasai, *A survey of Magnus representations for mapping class groups and homology cobordisms of surfaces*, Handbook of Teichmüller theory volume III (editor: A. Papadopoulos), (2012), 531–594.

[16] T. Sakasai, *The Magnus representation and homology cobordism groups of homology cylinders*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 22 (2015), 741–770.

[17] J. Stallings, *Homology and central series of groups*, J. Algebra 2 (1965), 170–181.

東京大学大学院数理科学研究科
逆井 卓也（さかさい たくや）
sakasai@ms.u-tokyo.ac.jp