

内部統制評価計画と区間ベイズ手法 (On a procedure of assessment for tests of controls and interval Bayesian method)

神奈川大学・理学研究科・菊地湧也

Yuya KIKUCHI⁽¹⁾

神奈川大学・理学部・堀口正之

Masayuki HORIGUCHI⁽²⁾

⁽¹⁾Student of Division of Mathematics,
Graduate School of Science,

⁽²⁾Professor of Department of Mathematics,
Faculty of Science,
Kanagawa University

Abstract

内部統制手続きの監査において、必要なサンプル数の考察を行う。例えば、社内での書類の承認を管理職の決済(承認印)で行う場合に、その決済が事前に決められていたルール通りに行われているかどうか、運用状況の確認(監査)を統計的サンプリングによって行うことを考える。具体的には、監査する側の事前の予想逸脱数及び許容逸脱率にもとづく第1種及び第2種のそれぞれの過誤確率 α, β に関する属性サンプリングの手法の概観とともに金額単位サンプリングの検定方式について区間ベイズ推測の適用を行う。

1 はじめに

本研究では、企業活動に対する監査人の内部統制の評価手続きの具体例をもとに、母集団から抜き取られた標本にもとづく統計的推測およびその監査結果の判断に関して、統計的推測によるサンプリング手法の見方・考え方と手法の判断結果のもつリスク(第1種及び第2種の過誤確率)を考慮した必要サンプル数について考察する。

統制評価の監査手続きとして、例えば、社内での書類の承認を管理職の決済(承認印)で行う場合に、その決済が事前に決められていたルール通りに行われているかどうか、運用状況の確認(監査)を統計的サンプリングによって行うことを考える。母集団から抜き取られた検査対象の文書に対して、ルール通りの運用によるものであるか否か、属性サンプリングが行われる。

具体的には、監査の事前計画として、

- k_e 予想逸脱数

- p_T 許容逸脱率の最大値
- β 許容リスク（第2種の過誤確率）の最大値

を考慮した必要サンプル数 n をまず求める(見積もる)ことになる。

成功確率を p_T にもち、標本数を n とする2項分布 $Bin(n, p_T)$ に対して、成功回数が x であるときの確率関数を $Bin(x, n, p_T)$ と表わすとき、監査の事前計画としては、確率分布による以下の不等式が満たされるように必要サンプル数 n を考えている(cf. [6, 3]).

$$\sum_{x=0}^{k_e} Bin(x, n, p_T) = \sum_{x=0}^{k_e} \binom{n}{x} p_T^x (1 - p_T)^{n-x} \leq \beta$$

ここで、2項確率をベータ分布を用いて表せば(cf. [5]),

$$\sum_{x=0}^{k_e} Bin(x, n, p_T) = \int_{p_T}^1 \frac{1}{B(k_e + 1, n - k_e)} t^{(k_e+1)-1} (1 - t)^{(n-k_e)-1} dt$$

であるから、上側確率が β に等しい許容逸脱率の最大値 p_T から、 n と k_e の関係式によって、必要サンプル数 n が得られることがわかる。これらは、ベータ分布の確率密度関数 $f_b(p, 1 + k, n - k)$ に対して、

$$f_b(p, 1 + k, n - k) = (n - k) \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

が成り立つことによる。

このようにして、監査人の事前計画としての許容逸脱数のもとでの許容逸脱率の上限、過誤採択の許容リスクの最大値 β である監査に対して、必要サンプル数 n の算出後の検査で、内部統制の有効性が事前の予想(逸脱許容数)の範囲であると判断できたとき、次に行われるのは、前段の属性サンプリングでの逸脱率などとともにして、検査対象の書類の記載金額単位サンプリングであり、残高に対する誤謬金額に関する詳細テストを以下のように行う。詳細テストを行う対象書類は、一つの母集団分布に従う標本と考え、すでに層化された標本であるとされる。

具体的には、監査計画としての次のステップとして行われる財務諸表項目についての監査であり、同一母集団における金額単位での属性サンプリングが想定される(金額単位サンプリング：Monetary Unit Sampling, MUS と呼ばれる)。

- p_T 許容虚偽表示率の最大値
- p_e 予想虚偽表示率
- β 過誤採択の許容リスクの最大値

とするとき、尺度パラメータ β について、ガンマ分布による次の等式が成り立つことを利用する。

$$\beta = 1 - \int_0^{np_T} \frac{1}{\Gamma(np_e + 1)} y^{(np_e+1)-1} e^{-y} dy$$

ここで、右辺の値が β の値を下回るまでサンプル数 n を増やすことで、必要サンプル数が求まる。

例： $\beta = 0.05, p_T = 0.04$ に対して、許容可能逸脱率に対する予想逸脱率 p_e の比率を0.3とすると、 $p_e = p_T \times 0.3 = 0.012$ を得る。また、このときの必要サンプル数は $n = 150$ であることが上式から求まる。

ここで、ガンマ分布を利用した必要サンプル数の算出は、許容可能逸脱率が5%未満であることと必要標本数がおおよそ $n \geq 20$ であることを念頭にして、2項分布のポアソン近似を用いた手法であることが次の関係式から理解できる。

ポアソン分布における累積分布関数を

$$CPoi(k, \lambda) = \sum_{x=0}^k Poi(x, \lambda) = \sum_{x=0}^k \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

と表すとき、次の関係式が成り立つ(cf. [5])。

$$\begin{aligned} CPoi(np_e, np_T) &= \beta \\ \iff \sum_{x=0}^{np_e} \frac{(np_T)^x}{x!} e^{-np_T} &= \beta \\ &= \int_{np_T}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(np_e + 1)} t^{(np_e+1)-1} e^{-t} dt \end{aligned}$$

であって、上式の n の値を増やしていき、 np_T, np_e に関する値が β の値を初めて下回る最小の n の値を求めれば、その値が必要サンプル数となる。

具体的に、この場合の必要サンプル数 n を求める手順について考えると、

$$\int_0^{np_T} \frac{1}{\Gamma(np_e + 1)} t^{(np_e+1)-1} e^{-t} dt = 1 - \beta \quad (1)$$

であるから、ガンマ分布の累積分布関数を G 、その逆関数を G^{-1} と表せば上式(1)において

$$np_T = G^{-1}(1 - \beta, np_e + 1)$$

が成り立ち、 $e = \frac{p_e}{p_T}, F = np_T$ (※ただし、定数 e は自然対数の底の値ではないことに注意)とすれば、

$$F = G^{-1}(1 - \beta, 1 + eF) \quad (2)$$

を得る。このときの定数 F はMUS係数(MUS Factor)と呼ばれる。

β, e を所与とするとき、上式(2)を解いて F 値が得られる。このとき、

$$n = \frac{F}{p_T}$$

として必要サンプル数が得られる。

2 金額単位サンプリングでの過大計上額の推測

つぎに、母集団の過大計上の上限額の推定について考える。 $k = np_e$ は、過大計上の予想最大数を表す。過誤採択の許容リスクの上限 β を $\beta = 0.05$ としたとき、過大計上の上限率 r_U は

$$r_U = G^{-1}(1 - 0.05, 1 + k)$$

を満たし、この等式によって、具体的に r_U の値が求められる。

棚卸資産の評価（財務諸表監査）においては、監査対象の勘定の残高と実際の記帳残高について、許容可能な予想合計額を超えた場合に棚卸資産の評価に重要な虚偽表示があると結論付けることになる。これはまた、監査計画策定時の見積評価額を μ_0 、過大評価の限界額、つまり、この監査計画での許容評価額を T とするときの必要サンプル数の算出と関連する。具体的には、次のような正規母集団の標本での母分散 σ^2 既知の場合の仮説検定の手順によって検証される：

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0 \\ H_1 &: \mu = \mu_0 - T \end{aligned}$$

に対して、 H_0 のもとで、 $X_i \sim N(\mu_0, \sigma^2)$ 、 $\{X_i\}$ が互いに独立ならば、

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

であって、 $\alpha = P(\bar{X} \leq l_\alpha)$ とおけば、 $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1^2)$ であって、

$$\alpha = P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{l_\alpha - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) := P(Z \leq -z_\alpha)$$

であるから、例えば $\alpha = 0.05$ ならば、

$$-1.645 = \frac{l_\alpha - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

より

$$l_\alpha = \mu_0 - 1.645 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

を得る。

他方、 H_1 のもとで $\bar{X} > l_\alpha$ であるために H_1 が棄却されるとき H_0 を採択する過誤(過大計上を見逃すリスク)の確率は

$$\begin{aligned} \beta &= P(\bar{X} > l_\beta) \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - (\mu_0 - T)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{l_\beta - (\mu_0 - T)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) := P(Z > z_\beta) \end{aligned}$$

ただし, H_1 のもとで $Z = \frac{\bar{X} - (\mu_0 - T)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1^2)$ である. 例えば, $\beta = 0.1$ であれば,

$$z_\beta = \frac{l_\beta - (\mu_0 - T)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = 1.282$$

を l_β について解いて

$$l_\beta = \mu_0 - T + 1.282 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

を得る. ここで, $l_\alpha = l_\beta$ とおくと

$$\mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu_0 - T + z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

より

$$T = (z_\alpha + z_\beta) \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

よって,

$$n = \left\{ (z_\alpha + z_\beta) \times \frac{\sigma}{T} \right\}^2$$

が得られる.

また, $A = z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ とおくと,

$$\frac{A}{T} = \frac{z_\alpha}{z_\alpha + z_\beta}$$

は, n や σ に依存せず定まる値であることもわかる. これを用いて

$$n = \left\{ \frac{z_\alpha \sigma}{T} \left(\frac{A}{T} \right)^{-1} \right\}^2$$

と表すことができることもわかる. $\frac{A}{T}$ は, 許容虚偽表示比の過誤棄却サンプリングリスクに対するアラウアンス係数 (Ratio of desired allowance for sampling risk to tolerable misstatement) と呼ばれる定数である (cf. [3]).

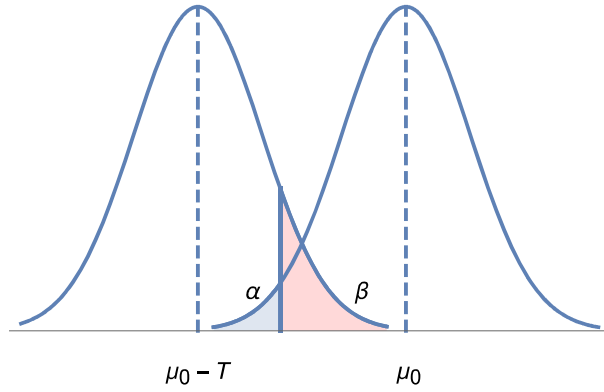


Figure 1: 金額単位サンプリングでの仮説検定と過誤確率

3 区間ベイズ手法による母平均 μ の区間推定

ここでは, 正規母集団に対する適応型品質管理の区間ベイズ手法([1])を, 本研究の金額単位サンプリングに適用し, 観測値 \bar{x} に対する事後期待値 $\mu_{\bar{x}}$ としての位置母数 μ の区間表現 $[\underline{\mu}_{\bar{x}}, \bar{\mu}_{\bar{x}}]$ による必要サンプル数の導出について考察する.

L, U を (Ω, \mathcal{F}) 上のルベグ測度とする. Q を (Ω, \mathcal{F}) 上のルベグ測度で

$$I(L, U) = \{Q|L \leq Q \leq U\}$$

を満たすものとする.

議論を簡単にするため(cf. [1]), 定数 $k > 1$ によって $U = kL$ であるとする. 区間型事前一様測度 $I(L, U)$ に対して

$$X \sim N(\theta, \sigma_0^2) \quad (\sigma_0^2: \text{既知})$$

を観測した後での事後区間 $I(L_X, U_X)$ について,

$$L_X \sim f(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma_0^2}}, U_X \sim kf(x|\theta)$$

で表される.

さらに, 事後平均 $\frac{Q(\theta f(X|\theta))}{Q(f(X|\theta))}$, $Q \in I(L, U)$ の下限値と上限値は, 次の方程式のそれぞれの一意の解 $\underline{\lambda}, \bar{\lambda}$ である([4]).

$$\begin{cases} U_X(\theta - \lambda)^- + L_X(\theta - \lambda)^+ = 0 & (3a) \\ U_X(\theta - \lambda)^+ + L_X(\theta - \lambda)^- = 0 & (3b) \end{cases}$$

具体的には, (3a), (3b)のそれぞれの解 $\underline{\lambda}, \bar{\lambda}$ は, $Z = \frac{X - \mu}{\sigma_0}$ とおくとき,

$$ku = (k - 1) \{u\Phi(u) + \phi(u)\} \quad (4)$$

を u について解いてその解 u^* によって、 $\lambda \leq \mu \leq \bar{\lambda}$ に対して、 $\frac{X - \bar{\lambda}}{\sigma_0} \leq \frac{X - \mu}{\sigma_0} = Z \leq \frac{X - \lambda}{\sigma_0}$ であって、 $-u^* \leq \frac{X - \mu}{\sigma_0} = Z \leq u^*$ より

$$\begin{cases} \lambda = X - u^* \sigma_0 \\ \bar{\lambda} = X + u^* \sigma_0 \end{cases} \quad (5a)$$

$$\begin{cases} \lambda = X - u^* \sigma_0 \\ \bar{\lambda} = X + u^* \sigma_0 \end{cases} \quad (5b)$$

を得る. 観測値 X に関して $X < \mu_0$ である時の区間ベイズ推定を下図(Figure 2)に図示する.

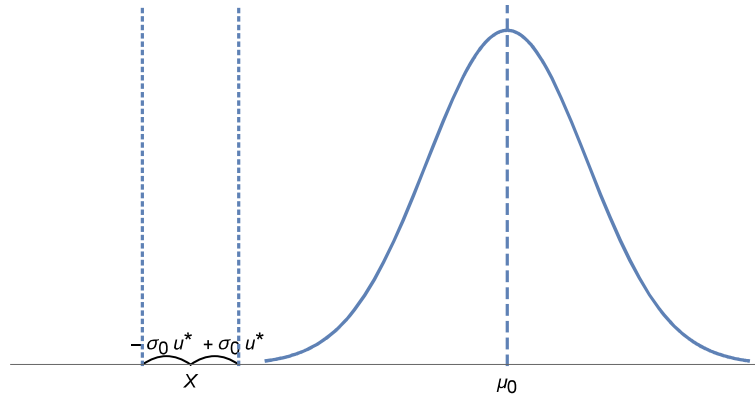


Figure 2: 観測値 X による母平均の事後期待値の区間表現 $[\lambda, \bar{\lambda}]$

また、式(4)の解 u^* について数値例を以下の表(Table 1)に示す(cf. [4]).

ここで、 $X_i \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ の n 個の無作為標本に対して、その標本平均 $\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$ によって、区間ベイズ手法によって得られる母平均 μ の事後区間表現 $[\lambda, \bar{\lambda}]$ を用いた必要サンプル数について考える. 右端点(上限値)の $\bar{\lambda}$ を用いて、

$$\bar{X} + u^* \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \mu_0 - T$$

と考えたとき、

$$\mu_0 - T + z_\beta \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

を n について解いてみると、

$$\bar{X} + u^* \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} + z_\beta \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \mu_0 - z_\alpha \quad (6)$$

$$\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} (u^* + z_\alpha + z_\beta) = \mu_0 - \bar{X}$$

$$\sqrt{n} = \frac{\sigma_0 (u^* + z_\alpha + z_\beta)}{\mu_0 - \bar{X}}$$

Table 1: table:ustar

| | | | | | | |
|-------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| k | 1.0 | 1.05 | 1.10 | 1.15 | 1.20 | 1.25 |
| u^* | 0 | 0.01946 | 0.03802 | 0.05575 | 0.07273 | 0.08900 |
| k | 1.30 | 1.35 | 1.40 | 1.45 | 1.50 | 1.55 |
| u^* | 0.1046 | 0.1197 | 0.1342 | 0.1482 | 0.1617 | 0.1747 |
| k | 1.60 | 1.65 | 1.70 | 1.75 | 1.80 | 1.85 |
| u^* | 0.1873 | 0.1996 | 0.2115 | 0.2230 | 0.2342 | 0.2451 |
| k | 1.90 | 1.95 | 2.00 | 2.05 | 2.10 | 2.15 |
| u^* | 0.2557 | 0.2660 | 0.2760 | 0.2858 | 0.2954 | 0.30471 |
| k | 2.20 | 2.25 | 2.30 | 2.35 | 2.40 | 2.45 |
| u^* | 0.3138 | 0.3227 | 0.3314 | 0.3399 | 0.3483 | 0.35642 |
| k | 2.50 | 2.55 | 2.60 | 2.65 | 2.70 | 2.75 |
| u^* | 0.3644 | 0.3722 | 0.3799 | 0.3874 | 0.3948 | 0.4020 |
| k | 2.80 | 2.85 | 2.90 | 2.95 | 3.00 | 3.05 |
| u^* | 0.4091 | 0.4161 | 0.4230 | 0.4297 | 0.4363 | 0.4428 |

より,

$$n = \left(\frac{\sigma_0 (u^* + z_\alpha + z_\beta)}{\mu_0 - \bar{X}} \right)^2$$

が得られる.

同様に, 左端点(下限値)の $\underline{\lambda}$ を用いて

$$\bar{X} - u^* \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \mu_0 - T$$

を考えると,

$$\mu_0 - T + z_\beta \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

を n について解くと,

$$\begin{aligned} \bar{X} - u^* \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} + z_\beta \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} &= \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \\ \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} (z_\alpha + z_\beta - u^*) &= \mu_0 - \bar{X} \\ \sqrt{n} &= \frac{\sigma_0 (z_\alpha + z_\beta - u^*)}{\mu_0 - \bar{X}} \end{aligned}$$

より,

$$n = \left(\frac{\sigma_0 (z_\alpha + z_\beta - u^*)}{\mu_0 - \bar{X}} \right)^2$$

が得られる.

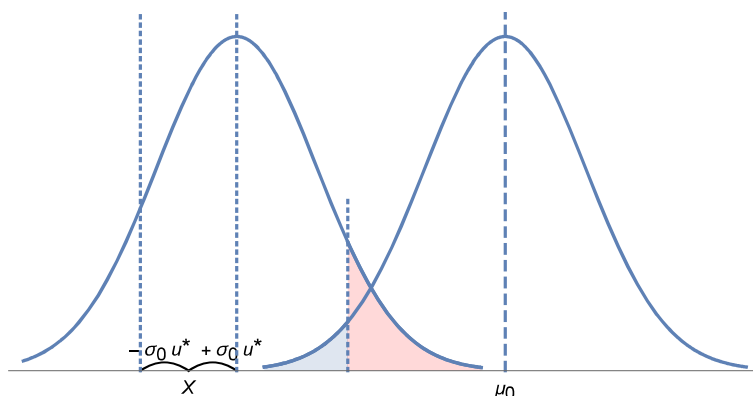


Figure 3: 事後期待値の区間表現の上限値 $\bar{\lambda}$ の場合の α, β の確率の様子

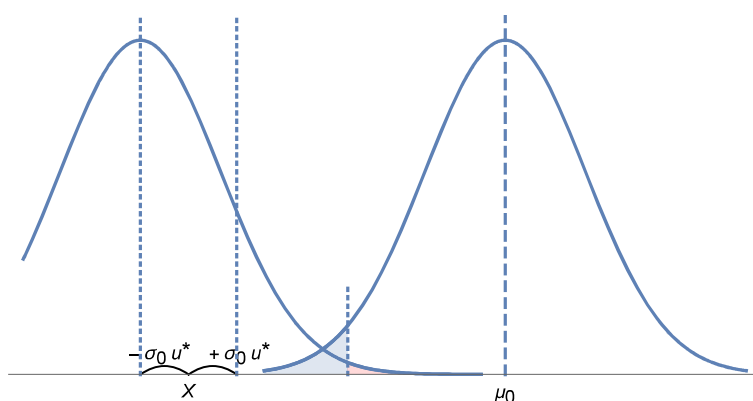


Figure 4: 事後期待値の区間表現の下限值 $\underline{\lambda}$ の場合の α, β の確率の様子

Figure 3とFigure 4を比較すると、Figure 3の上限値 $\bar{\lambda}$ を利用した場合のほうが過誤採択の許容リスクの確率 β が大きい。よって、許容リスクを小さくしたい場合は、下限値 $\underline{\lambda}$ を利用するかまたは、上限値 $\bar{\lambda}$ におけるZ値(式(6)の z_β 値)のp-valueまたは、検出力 $1 - \beta$ を利用した統計的推測による監査結果の判断も可能であると考えられる。

References

- [1] 佐々木稔, 堀口正之, 蔵野正美 区間ベイズ推定による適応型品質管理 数理解析研究所講究録1589「不確実な状況における意思決定の理論と応用」, pp. 120-129, 2008
- [2] 富田竜一, 西山都, 石原佳和 Q & A監査のための統計的サンプリング入門 金融財政事情研究会. 2009

- [3] 増田幸一編訳 監査における統計的サンプリング法 日経事業出版センター. 2018.
- [4] Lorraine De Robertis and J. A. Hartigan. Bayesian inference using intervals of measures. *Ann. Statist.*, 9(2):235–244, 1981.
- [5] Raiffa, Howard and Schlaifer, Robert *Applied Statistical Decision Theory* Harvard University, 1961
- [6] Stewart, Trevor R. *Technical Notes on the AICPA Audit Guide Audit Sampling* American Institute of Certified Public Accountants, Inc., 2012.

Yuya KIKUCHI
Division of Mathematics,
Graduate School of Science,
Masayuki Horiguchi
Department of Mathematics,
Faculty of Science,
Kanagawa University
Address: Tsuchiya 2946, Hiratsuka City,
Kanagawa Prefecture, 259-1293, Japan
E-mail address: horiguchi@kanagawa-u.ac.jp

神奈川大学・理学研究科 菊地湧也
神奈川大学・理学部 堀口正之