時間遅れがもたらす無限次元性と超越性

東北大学・材料科学高等研究所　西口 純矢 *†
Junya Nishiguchi
Advanced Institute for Materials Research,
Tohoku University

1　はじめに

筆者は，2021 年度 RIMS 共同研究（公開型）「力学系理論の最近の進展とその応用」*1 において，平面系の線型遅延微分方程式の安定性解析に関する講演を行った．この文書はその講究録原稿であるが，以下に述べる理由からこの文書は講演内容自体のまとめではない．

遅延微分方程式の基本的な力学系的取り扱いや，非線型問題の解析につながる線型方程式の基礎理論（相空間である連続関数空間の固有値に基づく直和分解，不安定・中心部分空間の有限次元性，中心部分空間上の微分方程式を得るための形式的随伴法など）は Jack Hale により考察・整理され，その後，さまざまに応用されてきたと言ってよい．Hale による書籍 [9] および Sjoerd Verduyn Lunel が著者に加わったその改訂版 [10] はこの分野におけるバイブルである．また，Diekmann et al. [4] は異なる観点から遅延微分方程式を取り扱った興味深い書籍である．日本語の書籍としては，内藤ら [1] がある．

では，遅延微分方程式の研究は Jack Hale により終わったのだろうか？この問いに筆者が答えるのは適切ではないかもしれないし，そもそも答えるのは難しい．しかし，1990 年代半ばからの状態依存遅れを持つ微分方程式の解析の発展は明確に Jack Hale による理論の建設以後のものである．また，遅延微分方程式のより力学系的な書籍がまだ現れていないことは，その力学系的研究が発展途上にあると言えるのではないだろうか．

遅延微分方程式は，常微分方程式に “タイムラグ” を入れることで得られることが多い．これには応用からのモチベーションが大きい．しかし，このようにタイムラグを入れることで遅延微分方程式にすると解析が厄介になってしまう．また力学系としても相空間を無限次元関数空間にするセットアップが必要であり，幾何学的理解はより困難になる．何より，空間的広がりによる無限次元性とは異なり，タイムラグによる無限次元性は視覚的に捉えるのが難しい．つまり，タイムラグを入れて遅延微分方程式にする妥当性を担保するのは容易ではない．

* 〒980-8577 宮城県仙台市青葉区片平 2-1-1 東北大学材料科学高等研究所 (AIMR) 数学連携グループ
† E-mail: junya.nishiguchi.b1@tohoku.ac.jp
*1 https://sites.google.com/view/rims-dyn-sys2021/

このように，遅延微分方程式はどちらかと言うと厄介者として捉えられることが多いが，やはりタイムラグを入れることの応用からの要請は大きいようである．数学分野としても，微分方程式，力学系，応用数学の観点から興味深いものである．そして，空間変数がなくとも時間変数のみでも無限次元性がもたらされるというのがその何よりの醍醐味である．

以上に述べた理由から，この文書では講演の内容をまとめるのではなく，遅延微分方程式あるいはより一般に「時間遅れ系」の概説を行うことにした．この文書は以下のように構成されている．第 2 節では，時間遅れ系の導入とその微分方程式としての扱い，および無限次元力学系としての取り扱いを簡単に述べる．この節では，数学的な定理をきちんと述べることはせず，あくまでもその紹介に留める．第 2 節の終わりでは状態依存遅れについても紹介し，その数学の基礎的アイデアとダイナミクスの観点からの意義についても説明を行う．第 3 節では，線型の遅延微分方程式のスペクトルについて詳細な議論を行う．この節の目標は，線型遅延微分方程式が定める C_0-半群に対して，関数解析における一般的な結果を単に適用することではない．たとえば，その C_0-半群が終局的コンパクトであることをもって一般的な結果を適用しても，遅延微分方程式の理解には必ずしもつながらないであろう．むしろ，関数解析における一般論がどのようにして線型遅延微分方程式のスペクトル解析に必要になるかを明らかにすることが重要であると考える．また，これは線型遅延微分方程式が定める C_0-半群の特殊性を把握するのに役立つであろう．第 3 節の内容自体は既知のものではあるが，その理論展開の仕方は，[9] および [10] におけるそれとは異なる．

2 時間遅れ系とその取り扱い

2.1 時間発展システムとしての時間遅れ系

因果律に “タイムラグ” を有する時間発展システムおよびその数理モデルを総称して **時間遅れ系** (time-delay system) と呼ぶ．時間遅れ系における “タイムラグ” は，たとえば情報の伝達速度の有限性に起因して生じる．具体的には，骨髄における血球濃度の時間変化が時間遅れ系として考えられる．これは生理学における例である．骨髄における血球（白血球，血小板，赤血球）はその濃度に応じて新たにどれくらいの血球が生成されるかが決定される一方で，血球の生成は決して瞬時的ではない[*2]．この血球を生成するのに要する時間（期間）が “タイムラグ” となる．血球の濃度はスカラー量であるが，その時間変化（ダイナミクス）は複雑になりうる[*3]．

2.2 遅延微分方程式

上に述べたことは，時間遅れ系は常微分方程式 (ODE) では記述しえないことを意味する．$\mathbb{R}^n$ に値を取る未知関数 $x = x(t)$ の $t \in \mathbb{R}$ における微分係数 $\dot{x}(t)$ が t 以前の x の情報にも依存するような **遅延微分方程式** (delay differential equation; DDE) は，典型的な数理モデルとしての時間

[*2] 白血球の場合は数時間から数日，血小板の場合は 約 10 日，赤血球の場合は約 120 日を生成に要するようである．

[*3] Mackey and Glass [13] はこれを “dynamical diseases” と呼んだ．

遅れ系である．考えている DDE において微分係数 $\dot{x}(t)$ の過去依存性がある正の数 $r > 0$ に対する $x|_{[t-r,t]} \colon [t-r,t] \to \mathbb{R}^n$ への依存性として常に書かれるとき，各時刻 t における力学系的状態はこのような未知関数 x の区間 $[t-r,t]$ への制限 $x|_{[t-r,t]}$，あるいはそれを t だけ平行移動して得られる関数

$$x_t \colon [-r,0] \ni \theta \mapsto x(t+\theta) \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

と考えなければならない．これを x の t における **履歴切片** (history segment) と呼ぶ．

注 2.1. ODE も形式的には DDE と考えてもよいが，1 階の正規形 ODE の場合は $\dot{x}(t)$ は常に $x(t)$ にのみ依存する．このため，区間 $[-r,0]$ は 1 点集合 $\{0\}$ に “縮退” し，履歴切片 x_t も点 $x(t)$ に “縮退” する．

逆に言えば，このような縮退が起きないのが DDE であり，常に関数である履歴切片を力学系的状態として保持し続ける必要がある．したがって，DDE のダイナミクスの力学系的記述には無限次元力学系のフレームワークが必要である[*4]．

2.3 過去依存性の１つの表現：微分差分方程式

DDE において，未知関数 x の微分係数 $\dot{x}(t)$ が過去の状態にどのように依存するかは本質的に problematic である．数学的には全く自由に取ってよいが，数理モデルの観点で言えば「考えている現象を記述する上でどのような過去依存性が適切であるか」という問いからは逃れられない．しかし，そのような問いに答えるためにもまずはモデルを立てた上でその解析を行うより他ない．歴史的には，次の形の微分方程式

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau_1), \dots, x(t-\tau_m)) \tag{2.2}$$

がよく研究されてきている．ここで，$\tau_1, \dots, \tau_m > 0$ は正の定数であり，方程式 (2.2) における時間遅れを表す．方程式 (2.2) においては微分と差分がミックスされている．この意味で，方程式 (2.2) は **微分差分方程式** (differential difference equation) と呼ばれてきた．1963 年以前までの微分差分方程式に関する研究の標準的な文献として Bellman and Cooke [2] を挙げる．微分差分方程式は DDE の例であり，方程式 (2.2) においては $\dot{x}(t)$ の過去依存性が $x(t-\tau_1), \dots, x(t-\tau_m)$ への依存性として明示的に表されている．この意味で，方程式 (2.2) における時間遅れの構造は「単純」であり，実際，微分差分方程式は時間遅れ系の数理モデルとしてよく用いられている．そのようなさまざまな具体例は Erneux [7] を参照されたい．

2.4 過去依存性の抽象化：遅れ型関数微分方程式

微分差分方程式 (2.2) を含む DDE の数学研究にはさまざまな切り口がある．DDE を時間発展方程式として考えている以上，その初期値問題の定式化と解の存在や一意性などの基礎定理の構築

[*4] 空間変数を持たず，時間変数のみであっても無限次元力学系が生み出されるのが DDE の醍醐味でもあり厄介なところでもある．歴史的には，無限次元力学系の重要なサブクラスとしてそのダイナミクスが研究されてきた．

は必要不可欠である．また，力学系的考察のためには解の存在と一意性に加えて，解の初期値連続依存性（いわゆる，初期値問題の適切性）やさらに初期値への可微分な依存性も基本的に必要である．実際，これらは DDE の **遅れ型関数微分方程式** (retarded functional differential equation; RFDE) としての定式化

$$\dot{x}(t) = F(x_t) \tag{2.3}$$

を受け入れれば，ODE と同様な方法で考察できる．ここで，ある正の定数 $r > 0$ に対して

$$F \colon C([-r, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$$

は一般に非線型の「ベクトル値汎関数」であり，x_t は (2.1) で定義される履歴切片である[*5]．この分野における標準的な文献としては，Hale [9]，Hale and Verduyn Lunel [10] を参照されたい．

重要なことは，RFDE (2.3) がもはや「$\dot{x}(t)$ は x_t に依存している」ということしか表現しておらず，具体的な過去依存性の表記を放棄していることである[*6]．しかし，上に述べた基礎理論の構築にあたっては RFDE のこの形式と F の適切な滑らかさがあれば十分である．初期値問題を構成する初期条件が

$$x_0 = \phi \in C([-r, 0], \mathbb{R}^n) \tag{2.4}$$

で与えられることは，RFDE の形式を考えれば自然である．ϕ を初期条件 (2.4) における **初期関数** または **初期履歴関数** (initial history function) と呼ぶ．初期条件 (2.4) の下での RFDE (2.3) の一意的な大域解を $x_F(\cdot; \phi) \colon [-r, \infty) \to \mathbb{R}^n$ と書くことにすると，連続関数のなす Banach 空間 $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ における **半流れ** $\Phi_F \colon [0, \infty) \times C([-r, 0], \mathbb{R}^n) \to C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ が

$$\Phi_F(t, \phi) \coloneqq x_F(\cdot; \phi)_t \tag{2.5}$$

により定義される．したがって，解の初期値連続依存性や初期値への可微分な依存性は，それぞれ半流れ Φ_F の連続性および **時刻 t-写像**

$$\Phi_F^t \colon C([-r, 0], \mathbb{R}^n) \ni \phi \mapsto \Phi_F(t, \phi) \in C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$$

の可微分性として理解されなければならない．この意味で，RFDE に対する基礎理論は ODE に対するそれと全く同様というわけではないということに注意する必要がある．

2.5　状態依存な過去依存性

RFDE (2.3) において，F の滑らかさを課すことは ODE との比較という観点で言えば自然なように思われる．実際，微分差分方程式 (2.2) に対しては

$$F(\phi) \coloneqq f(\phi(0), \phi(-\tau_1), \dots, \phi(-\tau_m))$$

[*5] F の定義域は一般には $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ の（一様収束位相に関する）開集合でよい．ここでは簡単のために全体の空間で定義されている場合のみを扱う．

[*6] x_t は関数であるから，$F(x_t)$ にはさまざまなものが考えられる．積分が含まれてもよいし，積分と非線型な変換をどのように組み合わせてもよい．

としてベクトル値汎関数 $F\colon C([-r,0],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$ を定めれば，方程式 (2.2) を RFDE (2.3) として書ける．ここで，$r>0$ は

$$r \geq \max_{1\leq j\leq m} \tau_j$$

を満たす定数である．この場合には，$f\colon \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n)^m\to\mathbb{R}^n$ の滑らかさに応じて F も滑らかである．

では，RFDE (2.3) において F はいつでも滑らかであると仮定して十分であるかと言うと，実はそうではない．たとえば，次の微分方程式を考える：

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau)), \quad \tau = \tau(x(t)). \tag{2.6}$$

ここで，上の微分方程式における時間遅れは定数ではなく，定数でない関数 $\tau\colon\mathbb{R}^n\to[0,r]$ により与えられると考えている．微分方程式 (2.6) もまた DDE であり，やや記号が複雑になるが

$$F(\phi) \coloneqq f\bigl(\phi(0), \phi\bigl(-\tau(\phi(0))\bigr)\bigr) \tag{2.7}$$

によりベクトル値汎関数 $F\colon C([-r,0],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$ を定めれば，DDE (2.6) を RFDE (2.3) として書ける．しかし，f が滑らかであっても F は一般には滑らかではなく，局所 Lipschitz 連続ですらない．これは，(2.7) の右辺において，ϕ が変化すれば $-\tau(\phi(0))$ が変化し，結果として F の滑らかさを得るには ϕ 自体の滑らかさを必要とすることによる．このメカニズムによって，初期値問題の解の一意性もまた，DDE (2.6) に対しては一般には成り立たない (具体例は Driver [5] を参照されたい).

DDE (2.6) における時間遅れは **状態依存** (state-dependent) と呼ばれ，(2.6) を **状態依存遅れを持つ微分方程式** とも呼ぶ．(2.7) で定義されるベクトル値汎関数 $F\colon C([-r,0],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$ が一般に滑らかでない (局所 Lipschitz 連続ですらない) ことは，DDE (2.6) に対しては RFDE の基礎理論が適用できないことを意味する*7．約 20 年前，Hans-Otto Walther [15] は DDE (2.6) を含むある RFDE のクラスを考察し，適切な初期履歴関数の空間 (Walther はこれを **解多様体** と呼んだ) を設定した*8．そして，そのクラスの RFDE が解多様体の上で連続半流れを定め，かつ時刻 t-写像が C^1-級になることを示した．これにより，状態依存遅れを持つ微分方程式に対しても解多様体上での微分可能力学系としての基本的考察が可能であることが明らかとなった．

コラム 1 (解多様体)**.** ベクトル値汎関数 $F\colon C^1([-r,0],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$ に対して，次で定まる部分集合 $X_F\subset C^1([-r,0],\mathbb{R}^n)$

$$X_F \coloneqq \{\phi : \phi'(0) = F(\phi)\}$$

---

*7 国際学会において，John Mallet-Paret が「Jack Hale は定数遅れしか考えていなかった」と発言しているのを筆者は聞いたことがある．ここでの定数遅れとは，微分差分方程式 (2.2) に限定されず，「積分型の過去依存性も含まれるものの過去依存性が未知関数自体に依存して変化することはない」という意味と思われる．実際，Jack Hale が RFDE を導入した初期の仕事 [8] では，LaSalle の不変性原理の RFDE への拡張を，過去依存性が積分によって表される DDE に応用している．

*8 解多様体については下記コラムを参照されたい．

を **解多様体** (solution manifold) と呼ぶ．ここで，$C^1([-r,0],\mathbb{R}^n)$ は $[-r,0]$ 上の $\mathbb{R}^n$ に値を取る C^1-級関数全体のなす線型空間で，C^1-ノルムによる Banach 空間と考えている．これを解多様体と呼ぶ理由は，(i) 初期履歴関数を X_F から取ると，解の履歴切片は常に X_F にとどまること（正不変性），(ii) F の Fréchet 微分が連続関数空間 $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ で定義された連続線型写像に拡張されるという条件の下で X_F が Banach 空間 $C^1([-r,0],\mathbb{R}^n)$ に埋め込まれた余次元 n の C^1-級部分多様体であること，による．ただし，X_F が空でないことを前提とする．

2.6 状態依存遅れが生み出す非線型性

定数遅れは状態依存遅れの理想化であるが，状態依存遅れは微分方程式としての困難さを備えている．したがって，数理モデルの観点においては，「状態依存遅れは定数遅れと比較してダイナミクスにどのような質的差異をもたらすか」という問いに答えることは重要である．これにより，「一般には解析が複雑になってしまう状態依存遅れを用いなければ説明できない現象がある」ということを明らかにでき，数理モデルとして状態依存遅れを採用することの妥当性につながる．

上記の問いに答えるためには，定数遅れと状態依存遅れのそれぞれに対して，対応する DDE のダイナミクスをよく知っておく必要がある．定数遅れと状態依存遅れの違いを理解する 1 つの鍵は，状態依存遅れが生み出す非線型性にある．例として，$n \times n$ 実行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ に対して，DDE

$$\dot{x}(t) = Ax(t-\tau), \quad \tau = \tau(x(t)) \tag{2.8}$$

を考える．ここで，$\tau \colon \mathbb{R}^n \to [0,r]$ は定数でない関数である．DDE (2.8) は一見すると線型方程式のように見えるが，時間遅れが状態依存のため重ね合わせの原理が成り立たない．したがって，DDE (2.8) は非線型方程式であり，この非線型性は状態依存遅れにより生み出されたものである．状態依存遅れが生み出す非線型性の下でのホモクリニック軌道の構成については Walther [16] を参照されたい．また，エルニーニョ現象などの気候ダイナミクスの非線型微分差分方程式モデルにおいても，分岐解析の観点から状態依存遅れを採用することの是非が議論されている．たとえば，Keane, Krauskopf, and Postlethwaite [12] を参照されたい．

3 時間遅れとスペクトル

3.1 平衡点と線型化

この小節では，RFDE (2.3) が連続半流れ Φ_F を定めると仮定する．たとえば，F が Lipschitz 連続であることはその十分条件である．

$\phi \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ が

$$\Phi_F(t,\phi) \coloneqq x_F(\cdot;\phi)_t \equiv \phi \quad (t \geq 0) \tag{3.1}$$

を満たすとき，ϕ を RFDE (2.3) の **平衡点** と呼ぶ．半流れ Φ_F の定義式 (2.5) と関係式 (3.1) より平衡点 ϕ は定数関数でなければならず，対応する解 $x_F(\cdot;\phi) \colon [-r,\infty) \to \mathbb{R}^n$ も定数関数とな

る[*9]．まとめると以下のようになる．

補題 3.1. $\phi \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ が RFDE (2.3) の平衡点であるための必要十分条件は，ϕ が定数関数であり，かつ ϕ が F の零点であること，すなわち $F(\phi)=0$ となることである．

注 3.2. [9, Chapter 4] および [10, Chapter 4] では，非自励系を含む形での連続時間力学系の定式化の 1 つであるプロセスが扱われている[*10]．そこでは平衡点の概念はプロセスに対して定義されており，RFDE (2.3) の場合には上で述べたものと同じになる．しかし，補題 3.1 における特徴付けは，これらの文献においては明示的には述べられていないようである．

各時刻 $t \geq 0$ に対して，RFDE (2.3) の解 $x\colon [-r,\infty) \to \mathbb{R}^n$ が取る値 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ はもはや力学系的状態ではなく，履歴切片 $x_t \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ が力学系的状態であるのであった．また，RFDE (2.3) の右辺は ODE とは異なりベクトル場ではない．したがって，RFDE (2.3) の平衡点 ϕ における線型化の意味をきちんと考える必要がある．そこで，平衡点 ϕ に対する "微小摂動" $\chi \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ を考え[*11]，関数 $y(\cdot;\chi)\colon [-r,\infty) \to \mathbb{R}^n$ を

$$y(t;\chi) \coloneqq x_F(t;\phi+\chi) - x_F(t;\phi)$$

で定める．すると，$y(\cdot;\chi)_0 = \chi$ であり，

$$\dot{y}(t;\chi) = \dot{x}_F(t;\phi+\chi) - \dot{x}_F(t;\phi) = F(x_F(\cdot;\phi+\chi)_t) - F(x_F(\cdot;\phi)_t)$$

を満たす．ここで，$F(x_F(\cdot;\phi)_t) \equiv F(\phi)$ であり，F の Fréchet 微分可能性の下で右辺の ϕ における一次近似を取ることで線型 RFDE

$$\dot{x}(t) = DF(\phi)x_t \tag{3.2}$$

を得る．ただし，$DF(\phi)$ で F の ϕ における Fréchet 微分を表す．これを RFDE (2.3) の平衡点 ϕ における **線型化方程式** と呼ぶ．

[*9] $\theta_1,\theta_2 \in [-r,0]$ が $\theta_1 < \theta_2$ を満たしているとき，関係式 (3.1) より

$$\phi(\theta_2) = x_F(\theta_2;\phi) = x_F((\theta_2-\theta_1)+\theta_1;\phi) = \phi(\theta_1)$$

となる．よって，ϕ は定数関数である．さらに，$x_F(t;\phi) \equiv \phi(0)$ となるので，$x_F(\cdot;\phi)$ は定数関数である．

[*10] X を位相空間とする．連続写像 $U\colon [0,\infty)\times\mathbb{R}\times X \to X$ が X 上の **プロセス** (process) であるとは，次で定まる写像 $\Phi\colon [0,\infty)\times(\mathbb{R}\times X) \to \mathbb{R}\times X$ が $\mathbb{R}\times X$ 上の半流れであることを言う：$\Phi(\tau,t,x) \coloneqq (t+\tau, U(\tau,t,x))$．ここで，$\tau$ は **経過時間** (elapsed time) を表す．この定式化は [9] および [10] におけるそれと等価である．プロセスは，非自励系の微分方程式を考える上で自然なものと言える（が，あまり用いられていない）．

[*11] 連続関数であるような微小摂動を考えるのは自然である．では，瞬時的な入力のような不連続な微小摂動を考えることには意味はないと言い切れるだろうか？注意するべきは，RFDE (2.3) のフレームワークではこのような不連続な微小摂動を扱えないという点である．

3.2　線型 RFDE とその特性方程式

線型化方程式 (3.2) において，$DF(\phi)$ は $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ から $\mathbb{R}^n$ への連続線型写像である．一般に，連続線型写像 $L\colon C([-r,0],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$ に対して，線型 RFDE

$$\dot{x}(t) = Lx_t \tag{3.3}$$

を考える．RFDE の基礎理論から直ちにわかることは，線型 RFDE (3.3) が実 Banach 空間 $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ 上の C_0-半群 $(T_L(t))_{t\geq 0}$ を定めることである．すなわち，$T_L(t)\phi \coloneqq x_L(\cdot;\phi)_t$ において，写像

$$[0,\infty)\times C([-r,0],\mathbb{R}^n)\ni(t,\phi)\mapsto T_L(t)\phi\in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$$

は連続半流れである．

L はベクトル場ではないので，線型 RFDE (3.3) に対して解の漸近挙動がどのように決定されるかは明らかではない．そのような状況の中で，素朴な考察として線型 RFDE (3.3) が自明でない複素指数関数解

$$x(t) = \mathrm{e}^{zt}v \quad (v\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}) \tag{3.4}$$

を持つための複素数 z に関する条件を考えることができる．その条件の導出においては，L の積分による表示

$$L\phi = \int_{-r}^{0}\mathrm{d}\eta(\theta)\,\phi(\theta) \tag{3.5}$$

を用いると便利である．ここで，$\eta\colon[-r,0]\to M_n(\mathbb{R})$ は $n\times n$ 実行列に値を取る有界変動関数，すなわち，各成分が有界変動であるような行列値関数であり，表示式 (3.5) の右辺はベクトル値関数 ϕ の行列値関数 η による Riemann-Stieltjes 積分である[*12]．L の積分表示 (3.5) は，右辺を実数値関数の積分で表示することにより有界閉区間上の実数値連続関数空間に対する Riesz の表現定理から従う．

表示式 (3.5) を用いると，$x(t)=\mathrm{e}^{zt}v$ が線型 RFDE (3.3) の解であることは

$$\Delta(z)v \coloneqq \left[zI - \int_{-r}^{0}\mathrm{e}^{z\theta}\,\mathrm{d}\eta(\theta)\right]v = 0$$

で表される[*13]．ここで，I は $n\times n$ の単位行列を表す．これにより，自明でない複素指数関数解 (3.4) を持つための条件として方程式

$$\det\Delta(z) = 0 \tag{3.6}$$

[*12] 区間 $[-r,0]$ のタグ付き分割 $-r=\theta_0<\cdots<\theta_m=0$, $\theta_j'\in[\theta_{j-1},\theta_j]$ $(1\leq j\leq m)$ における小区間の長さを 0 に近づける極限の下での，Riemann 和 $\sum_{j=1}^{m}[\eta(\theta_j)-\eta(\theta_{j-1})]\phi(\theta_j')$ の収束性により定義される．

[*13] $\Delta(z)$ の第 2 項の積分は，変数変換 $s=-\theta$ を施せば $\eta(-s)$ の Laplace-Stieltjes 変換とも思える．詳細は Widder [17] を参照されたい．

を得るが，これを線型 RFDE (3.3) の **特性方程式** と呼ぶ．$\Delta\colon \mathbb{C} \to M_n(\mathbb{C})$ は各成分が整関数であるような，$n \times n$ 複素行列に値を取る関数である．各 $z \in \mathbb{C}$ に対して，$\Delta(z)$ を線型 RFDE (3.3) の **特性行列** と呼ぶ．方程式 (3.6) は一般には超越方程式である．この超越性は，線型 RFDE (3.3) における過去依存性の情報を格納する有界変動関数 $\eta\colon [-r, 0] \to M_n(\mathbb{R})$ によりもたらされる．

注 3.3. 連続線型写像 $L\colon C([-r, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ に対して，等式 (3.5) が成り立つような有界変動関数 η はただ 1 つには定まらないが，$\Delta(z)$ の表示はそのような η の取り方に依らない．

例 3.4. 行列 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ と $\tau \in (0, r]$ に対して，有界変動関数 $\eta\colon [-r, 0] \to M_n(\mathbb{R})$ を

$$\eta(\theta) \coloneqq \begin{cases} O & (-r \le \theta \le -\tau), \\ B & (-\tau < \theta < 0), \\ A + B & (\theta = 0). \end{cases}$$

と定めると $\Delta(z) = zI - (A + \mathrm{e}^{-\tau z} B)$ となり，特性方程式 (3.6) は超越方程式である．この η は (3.5) により $L\phi = A\phi(0) + B\phi(-\tau)$，すなわち，線型 RFDE (3.3) が線型の微分差分方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) \tag{3.7}$$

の場合に対応する．$B = O$ のときは，特性方程式 (3.6) は代数方程式である A の固有方程式となり，方程式 (3.7) は線型 ODE $\dot{x} = Ax$ になる．このことから分かるように，線型 RFDE (3.3) は線型 ODE を自然と含み，それを排除する必要はない．

特性方程式 (3.6) の根について，次のことがわかる．

補題 3.5. 特性方程式 (3.6) の根 z は

$$|z| \le \left[\sup_{\theta \in [-r, 0]} \mathrm{e}^{\Re(z)\theta} \right] V(\eta) \tag{3.8}$$

を満たす．ただし，$V(\eta)$ で行列値関数 η の作用素ノルムに関する総変動量を表す．

証明は，z が特性方程式 (3.6) の根であることを，z が行列 $M(z) \coloneqq \int_{-r}^{0} \mathrm{e}^{z\theta}\, \mathrm{d}\eta(\theta)$ の固有値であることとして表現すればよい．詳細は省略する．これは，複素数 z をパラメータに持つ線型 ODE $\dot{x} = M(z)x$ が自明でない複素指数関数解 (3.4) を持つ条件を考察することと同じである．

注 3.6. [4, Section I.4] においても不等式 (3.8) と類似の結果が得られている．ただし，そこでの議論は $\det \Delta(z)$ の詳細な表示を要する．

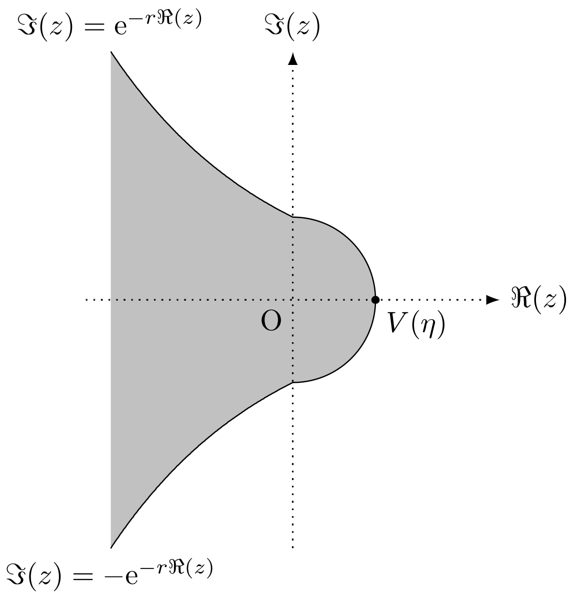

図 1: 複素 z 平面における特性方程式 (3.6) の根の存在範囲の制限．ここで，$\Re(z) \geq 0$ の部分の境界は原点を中心とする半径 $V(\eta)$ の円周である．

不等式 (3.8) より，$\sigma \in \mathbb{R}$ に対して，$\Re(z) \geq \sigma$ を満たす特性方程式 (3.6) の根 z は

$$|z| \leq \begin{cases} V(\eta) & (\sigma \geq 0), \\ \mathrm{e}^{-\sigma r} V(\eta) & (\sigma < 0) \end{cases} \tag{3.9}$$

を満たすことがわかる．不等式 (3.9) は，特性方程式 (3.6) の根の存在範囲の制限を与える．その可視化として図 1 を参照されたい．ここで，$|\Im(z)| \leq |z|$ であるので，複素 z 平面における薄灰色の領域（ただし，境界を含む）に特性方程式 (3.6) の根は制限される．ここでの議論を [1, 第 5 章, 定理 5.6 およびその証明] と比較されたい．また，$z \mapsto \det \Delta(z)$ が整関数であることの帰結として，任意の $\sigma \in \mathbb{R}$ に対して，特性方程式 (3.6) は閉領域 $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq \sigma\}$ には重複度を込めて有限個の根しか持たないこともわかる．

例 3.7. 例 3.4 において行列 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ が同時上三角化可能なときは，特性方程式 (3.6) は超越方程式

$$z - a - b\mathrm{e}^{-\tau z} = 0 \tag{3.10}$$

に帰着される．ここで，a, b はそれぞれ A, B の固有値であり，一般には複素数である．この場合には，**Lambert の** W **関数** という複素関数 $z \mapsto z\mathrm{e}^{z}$ の多価関数としての逆関数を用いて，超越方程式の根を表示できることが知られている．実際，超越方程式を

$$\tau(z-a)\mathrm{e}^{\tau(z-a)} = \tau b \mathrm{e}^{-\tau z} \mathrm{e}^{\tau(z-a)}$$

と変形することで，超越方程式 (3.10) の根 z は $\tau(z-a) \in W(\tau b\mathrm{e}^{-\tau a})$ として表示できる．Lambert の W 関数のレビュー論文として Corless et al. [3] を参照されたい．

注 3.8. Lambert の W 関数の性質を得ることで，超越方程式 (3.10) の根の分布についての情報を得られる．詳細は [14] を参照されたい．一般の行列 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対する $\Delta(z) = zI - (A + \mathrm{e}^{-\tau z}B)$ のときの特性方程式 (3.6) の根の A, B, τ 依存性は現在でもよく分かっていない．$A = O$ かつ $n = 2$ のときの結果に関する研究として Hara and Sugie [11] を挙げる．

3.3 線型 RFDE の解の指数安定性と終局コンパクト性

一般に，複素 Banach 空間 X 上の C_0-半群 $(T(t))_{t\geq 0}$ に対して，$T(t)$ の **スペクトル半径**[*14]

$$r_\sigma(T(t)) \coloneqq \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(T(t))\} = \lim_{n\to\infty} \|T(t)^n\|^{\frac{1}{n}}$$

は，$(T(t))_{t\geq 0}$ の成長上限 $\omega_0 \in [-\infty, \infty)$ と次のように関係する[*15]：

$$r_\sigma(T(t)) = \mathrm{e}^{\omega_0 t} \quad (t > 0). \tag{3.11}$$

ただし，$\omega_0 = -\infty$ のときはすべての $t > 0$ に対して $r_\sigma(T(t)) = 0$ であり，この意味で等式 (3.11) を理解する．また，Laplace 変換の手法により，$(T(t))_{t\geq 0}$ の無限小生成作用素 A の **スペクトル上限** $s(A) \coloneqq \sup\{\Re(z) : z \in \sigma(A)\}$ とは，

$$-\infty \leq s(A) \leq \omega_0 \tag{3.12}$$

の関係にある[*16]．

さて，関係式 (3.11) を有効に用いるためには，$T(t)$ のスペクトル半径を求める手段が必要である．これを実現できる状況が，C_0-半群 $(T(t))_{t\geq 0}$ が **終局的コンパクト**，すなわち，ある $t_0 > 0$ に対して $T(t_0)$ がコンパクト作用素となるときである．関数解析における一般論により，複素 Banach 空間上のコンパクト作用素のスペクトルは非常によい性質を持つことが知られている (**Riesz-Schauder 理論**．たとえば，[18, Section 5 in Chapter X] を参照されたい)．そして，$T(t)$ の固有値全体の集合 (これを **点スペクトル** と呼び $\sigma_{\mathrm{p}}(T(t))$ で表す) とその無限小生成作用

[*14] 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の線型位相空間 X とその上の線型作用素 T に対して，次を満たす複素数 λ 全体からなる部分集合 $\rho(T) \subset \mathbb{C}$ を T の **レゾルベント集合** と呼ぶ：X 上の線型作用素 $\lambda - T$ に対して，(i) 値域 $R(\lambda - T)$ は稠密，(ii) $\lambda - T$ は可逆，(iii) 逆作用素 $R(\lambda; T) \coloneqq (\lambda - T)^{-1}$ は連続．補集合 $\sigma(T) \coloneqq \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ を T の **スペクトル** と呼ぶ．X が Banach 空間かつ T が閉作用素である場合は，$\lambda \in \rho(T)$ ならば $R(\lambda; T)$ は X 上の有界作用素，すなわち $R(\lambda; T) \in B(X)$ である．詳しくは Yosida [18, Chapter VIII] を参照されたい．

[*15] $\mathbb{R}$ の部分集合 Ω を次のように定める：$\omega \in \Omega \iff \|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$ がすべての $t \geq 0$ に対して成り立つような $M \geq 1$ が存在する．このとき，Ω の下限を C_0-半群 $(T(t))_{t\geq 0}$ の **成長上限** (growth bound) と呼ぶ．関係式 (3.11) を含めた詳細は Engel and Nagel [6, Section 2 in Chapter IV] を参照されたい．ある $t_0 > 0$ に対して $\|T(t_0)\| = 0$ となる場合はすべての $t \geq t_0$ に対して $T(t) = 0$ であり，成長上限の考察としては自明であることに注意する．

[*16] $\sigma(A) = \emptyset$ のときは $s(A) = -\infty$ と定める．不等式 (3.12) は $\omega_0 = -\infty$ の場合も含めて成立する．

素の固有値全体の集合を結びつけることができる．この小節では，これらの事実を最後に用いる．得られる結果は，行列 A に対する **スペクトル写像定理**[*17]

$$\sigma\bigl(\mathrm{e}^{tA}\bigr) = \mathrm{e}^{t\sigma(A)} := \bigl\{\mathrm{e}^{tz} : z \in \sigma(A)\bigr\} \quad (t \in \mathbb{R})$$

から帰結する，$\dot{x} = Ax$ の零解の指数安定性の A の固有値を用いた特徴付けを線型 RFDE (3.3) に拡張するものである．

次は線型 RFDE (3.3) に対する基本的な事実である．

> **補題 3.9** (ref. [9], [10])**．** 任意の $t \geq r$ に対して，$T_L(t)$ は実 Banach 空間 $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ 上のコンパクト作用素である．

証明には $T_L(r)$ がコンパクト作用素であることを示せばよいが，それには Ascoli-Arzelà の定理を用いる．一様有界性の議論には，初期条件 (2.4) の下での積分方程式

$$x(t) = \phi(0) + \int_0^t Lx_s \,\mathrm{d}s \quad (t \geq 0)$$

と Gronwall の不等式を組み合わせればよい．同程度連続性は一様有界性からの帰結であるが，ここで $t \geq r$ であること，すなわち初期条件の情報が失われることが用いられる．詳細は省略する．

以後，複素化により $(T_L(t))_{t\geq 0}$ を複素 Banach 空間 $C([-r,0],\mathbb{C}^n)$ 上の C_0-半群と考え，その無限小生成作用素

$$A_L \colon C([-r,0],\mathbb{C}^n) \supset D(A_L) \to C([-r,0],\mathbb{C}^n)$$

の固有値を考えることにする．以下では，L も複素化する．

> **補題 3.10** (ref. [9], [10], [4])**．** 複素 Banach 空間 $C([-r,0],\mathbb{C}^n)$ 上の C_0-半群 $(T_L(t))_{t\geq 0}$ の無限小生成作用素 A_L は
>
> $$D(A_L) = \bigl\{\phi \in C^1([-r,0],\mathbb{C}^n) : \phi'(0) = L\phi\bigr\}, \quad A_L\phi = \phi'$$
>
> で与えられる．

証明は，C^1-級関数 x に対して関数 $t \mapsto x_t \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ の可微分性を考察することにより得られるがここでは省略する．補題 3.10 において興味深いのは，無限小生成作用素 A_L は「微分作用素」であり，線型 RFDE (3.3) に個別の性質はその定義域にしか現れないことである．

注 3.11. 平行移動による（適当な関数空間における）シフト半群の無限小生成作用素は微分作用素であるから，補題 3.10 は線型 RFDE (3.3) が定める C_0-半群にもシフトが隠れていることを示唆している．Diekmann et al. [4, Chapter II] はこの方針に沿って理論を展開している．

[*17] 行列 A の Jordan 標準形を考えることで従う．関連して，[6, Chapter I] も参照されたい．

一般に RFDE (2.3) の解 $x\colon [-r,\infty)\to\mathbb{R}^n$ に対して，F の連続性の下で制限 $x|_{[0,\infty)}\colon [0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ は C^1-級である．これを用いれば，$D(A_L)$ における拘束条件 $\phi'(0)=L\phi$ と線型 RFDE (2.3) を見比べることにより，次の系が補題 3.10 より直ちに従う．

系 3.12. 任意の $t\ge r$ と任意の $\phi\in C([-r,0],\mathbb{C}^n)$ に対して，$T_L(t)\phi\in D(A_L)$ が成り立つ．

注 3.13. Walther [15] による解多様体 X_F は，補題 3.10 における A_L の定義域 $D(A_L)$ の非線型版と言える．ただし，解多様体を考える目的は，連続半流れを得ることに加えてその時刻 t-写像の Fréchet 微分の意味での C^1-滑らかさを得ることにある．

補題 3.10 より，$\phi\in D(A_L)$ が A_L の固有値 z に属する固有関数ならば

$$\phi(\theta)=\mathrm{e}^{z\theta}\phi(0)\quad\text{かつ}\quad\phi(0)\neq 0$$

でなくてはならない．これを $D(A_L)$ における関係式 $\phi'(0)=L\phi$ に代入して $\Delta(z)\phi(0)=0$ を得る．すなわち，$\det\Delta(z)=0$ である．逆に，$\det\Delta(z)=0$ ならば $\Delta(z)v=0$ となる $v\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ が存在する．この v に対して $\phi(\theta)\coloneqq\mathrm{e}^{z\theta}v$ と定めれば，上と同様に ϕ は A_L の固有値 z に属する固有関数となる．以上により，次が成り立つ．

補題 3.14. 複素数 z に対して，それが A_L の固有値であることと特性方程式 (3.6) の根であることは同値である．このとき，$v\in(\ker\Delta(z))\setminus\{0\}$ に対して $\phi(\theta)\coloneqq\mathrm{e}^{z\theta}v$ $(\theta\in[-r,0])$ は A_L の固有値 z に属する固有関数である．

補題 3.14 と特性方程式 (3.6) の導出過程より, 複素数 z が A_L の固有値ならば, ある $v\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ に対して $x(t)=\mathrm{e}^{zt}v$ は線型 RFDE (3.3) の複素解である．また，$\phi(\theta)\coloneqq\mathrm{e}^{z\theta}v$ $(\theta\in[-r,0])$ で定まる関数 $\phi\in C([-r,0],\mathbb{C}^n)$ は A_L の固有値 z に属する固有関数であると同時に，任意の $t\ge 0$ に対して $T_L(t)$ の固有値 e^{zt} に属する固有関数である*18．これは線型 RFDE に対する **点スペクトル包含定理***19

$$\sigma_{\mathrm{p}}(T_L(t))\setminus\{0\}\supset\mathrm{e}^{t\sigma_{\mathrm{p}}(A_L)}\coloneqq\left\{\mathrm{e}^{tz}: z\in\sigma_{\mathrm{p}}(A_L)\right\}$$

の成立を意味する．スペクトルの一般論により逆側の包含も成立する．したがって，上の包含を等号に変えたもの (**点スペクトル写像定理**) が一般に成立するが，逆側の包含の証明には周期的半群の考え方を必要とする．たとえば，[6, Section 3 in Chapter IV] を参照されたい．

以上により次の定理を得る．

*18 $x(t)=\mathrm{e}^{zt}v$ に対して，$x_t(\theta)=x(t+\theta)=\mathrm{e}^{zt}\mathrm{e}^{z\theta}v$ である．

*19 点スペクトル包含定理は複素 Banach 空間上の C_0-半群 $(T(t))_{t\ge0}$ に対して一般に成立する．証明には，無限小生成作用素の固有値 z に対して C_0-半群 $(\mathrm{e}^{-zt}T(t))_{t\ge0}$ を考えればよい．

定理 3.15 (cf. [9], [10], [4])**.** 以下の 2 つの性質は同値である：

(a) 特性方程式 (3.6) のすべての根の実部は負である．

(b) すべての $t \geq 0$ に対して $\|T_L(t)\| \leq M\mathrm{e}^{-\delta t}$ が成り立つような $\delta > 0$ と $M \geq 1$ が存在する．すなわち，$(T_L(t))_{t\geq 0}$ は **一様指数安定** である．

証明. C_0-半群 $(T_L(t))_{t\geq 0}$ の成長上限が $-\infty$ のときは，性質 (b) は自明に成立する．また，このときは不等式 (3.12) より無限小生成作用素 A_L のスペクトル上限は $-\infty$ であるので，

$$\sigma_{\mathrm{p}}(A_L) \subset \sigma(A_L) = \emptyset$$

となる．これと補題 3.14 より，性質 (a) も自明に成立する．よって，以下では $(T_L(t))_{t\geq 0}$ の成長上限が有限の場合を考える．等式 (3.11) より，このときは $r_\sigma(T_L(r)) > 0$ が成り立つ．

性質 (b) は C_0-半群 $(T_L(t))_{t\geq 0}$ の成長上限が負であることと同値であり，関係式 (3.11) より，このためには

$$r_\sigma(T_L(r)) < 1$$

であることが必要十分である．補題 3.9 より $T_L(r)$ はコンパクトであり，Riesz-Schauder 理論[20] により，

$$\begin{aligned} r_\sigma(T_L(r)) &= \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(T_L(r)) \setminus \{0\}\} \\ &= \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma_{\mathrm{p}}(T_L(r)) \setminus \{0\}\} \end{aligned}$$

が成り立つ．点スペクトル写像定理より $\sigma_{\mathrm{p}}(T_L(r)) \setminus \{0\} = \mathrm{e}^{r\sigma_{\mathrm{p}}(A_L)}$ であるので，以上より

$$r_\sigma(T_L(r)) = \sup\left\{\mathrm{e}^{r\Re(z)} : z \in \sigma_{\mathrm{p}}(A_L)\right\}$$

を得る．これと補題 3.14 および小節 3.2 における議論により (a) と (b) の同値性が従う． □

3.4 線型 RFDE のレゾルベント集合と特性行列

補題 3.14 より，A_L の固有値全体の集合の情報は特性行列 $\Delta(z)$ と特性方程式 (3.6) を介して得られることがわかった．また，定理 3.15 より，特性方程式 (3.6) の根が線型 RFDE (3.3) の零解の指数安定性を完全に決定することがわかった．これは線型 RFDE (3.3) の線型 ODE との類似性を示すとともに，それが持つ著しい性質の証左と言える．

では，A_L のスペクトル $\sigma(A_L)$ 自体はどのようであるか？これは C_0-半群 $(T_L(t))_{t\geq 0}$ の特殊性を理解する上でも重要である．これを考えるためには，与えられた $\psi \in C([-r,0],\mathbb{C}^n)$ に対する

[20] ここでは以下の事実を用いる：複素 Banach 空間 X 上のコンパクト作用素 T に対して，(i) T のスペクトル $\sigma(T)$ は，複素平面 $\mathbb{C}$ において集積点を持てばそれは 0 に限る，(ii) $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathrm{p}}(T) \setminus \{0\}$.

$\phi \in D(A_L)$ を未知とする方程式 $(\lambda - A_L)\phi = \psi$ を調べればよい．補題 3.10 より，$\phi \in D(A_L)$ がこの方程式を満足するための必要十分条件は，ϕ が ODE

$$\phi'(\theta) = \lambda\phi(\theta) - \psi(\theta) \quad (\theta \in [-r, 0]) \tag{3.13}$$

と境界条件

$$\lambda\phi(0) - \psi(0) = L\phi \tag{3.14}$$

を満たすことである．ODE に対する定数変化法より，方程式 (3.13) を満足する ϕ は初期条件 $\phi(0)$ を未知として

$$\phi(\theta) = \mathrm{e}^{\lambda\theta}\left[\phi(0) + \int_\theta^0 \mathrm{e}^{-\lambda s}\psi(s)\,\mathrm{d}s\right]$$

と書ける．この表示の下で，境界条件 (3.14) は

$$\Delta(\lambda)\phi(0) = \psi(0) + \int_{-r}^0 \mathrm{d}\eta(\theta) \int_\theta^0 \mathrm{e}^{\lambda(\theta - s)}\psi(s)\,\mathrm{d}s$$

となる．上の議論は次の定理を導く．

定理 3.16 (cf. [9], [10], [4])**.** 複素数 λ に対して，線型 RFDE (3.3) の特性行列 $\Delta(\lambda)$ は正則と仮定する．このとき，任意の $\psi \in C([-r, 0], \mathbb{C}^n)$ に対して，$\phi \in D(A_L)$ を未知とする方程式 $(\lambda - A_L)\phi = \psi$ は一意的な解

$$\begin{cases} \phi(\theta) = \mathrm{e}^{\lambda\theta}\left[v + \displaystyle\int_\theta^0 \mathrm{e}^{-\lambda s}\psi(s)\,\mathrm{d}s\right] \quad (\theta \in [-r, 0]), \\ v = \Delta(\lambda)^{-1}\left[\psi(0) + \displaystyle\int_{-r}^0 \mathrm{d}\eta(\theta) \int_\theta^0 \mathrm{e}^{\lambda(\theta - s)}\psi(s)\,\mathrm{d}s\right] \end{cases} \tag{3.15}$$

を持つ．したがって，$\lambda \in \rho(A_L)$ が成り立つ．

定理 3.16 から，次の系が従う．

系 3.17 (cf. [9], [10], [4])**.** $\sigma(A_L) = \sigma_{\mathrm{p}}(A_L)$ が成り立つ．すなわち，$\lambda \in \rho(A_L)$ であることと，線型 RFDE (3.3) に対する特性行列 $\Delta(\lambda)$ が正則であることは同値である．このとき，$\psi \in C([-r, 0], \mathbb{C}^n)$ に対する $\phi \coloneqq R(\lambda; A_L)\psi$ は，(3.15) により与えられる．

証明. スペクトルと点スペクトルが等しいことを示すには，$\sigma(A_L) \subset \sigma_{\mathrm{p}}(A_L)$ を示せばよい．補題 3.14 よりこれは $\{\lambda \in \mathbb{C} : \det \Delta(\lambda) \neq 0\} \subset \rho(A_L)$ と同値であり，この包含は定理 3.16 から帰結する．残りの主張も，補題 3.14 と定理 3.16 から直ちに帰結する． □

注 3.18. 系 3.17，補題 3.14，および不等式 (3.9) より，レゾルベント集合 $\rho(A_L)$ は空集合でない．また，$\lambda \in \rho(A_L)$ に対する $\phi \coloneqq R(\lambda; A_L)\psi$ の表示式 (3.15) と Ascoli-Arzelà の定理より，

有界作用素 $R(\lambda; A_L)$ はコンパクトであることがわかる．これを，A_L は **コンパクトレゾルベント** を持つと言う ([6, Definition 4.24 in Chapter 4] を参照)．[6, 2.8 Delay Differential Operators, Chapter IV] とも比較されたい．

Riesz-Schauder 理論の下で，補題 3.9，系 3.17，および点スペクトル写像定理より，

$$\sigma(T_L(r)) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathrm{p}}(T_L(r)) \setminus \{0\} = \mathrm{e}^{r\sigma_{\mathrm{p}}(A_L)} = \mathrm{e}^{r\sigma(A_L)}$$

が成り立つ．これを用いれば，$(T_L(t))_{t\geq 0}$ の成長上限と A_L のスペクトル上限が一致することを示せる．詳細は省略するが，たとえば [6, Section 1 in Chapter V] も参照されたい．これと小節 3.2 における特性方程式 (3.6) の根の分布に関する知識により，定理 3.15 の別証明を与えることができる．これは，線型 RFDE (3.3) の指数安定性の，関数解析の観点での理解を与えると言える．

4　おわりに

以上の議論により，遅延微分方程式の数学的定式化である遅れ型関数微分方程式の解の漸近挙動については一定程度の理解に到達したと言えよう．また，上の理論展開は，遅れ型関数微分方程式が定める無限次元力学系の特殊性と，その理解のための関数解析の理論適用の有効性をまざまざと示している．特に線型方程式については，一般には超越方程式であるその特性方程式の根が解の指数安定性を完全に支配する．しかしながら，これは一般的理解を与えるものではあるものの，個別の問題に対する理解を与えるものでは必ずしもない．たとえば，線型方程式における特性方程式の根は，方程式の過去依存性を格納する有界変動関数にどのように依存するであろうか？これは現在においても困難かつ興味深い問題であり，線型方程式を超えて非線型問題の考察の入り口にもなる．この文書では，紙数の都合上，線型方程式のスペクトルによる相空間の直和分解については触れることができなかった．これは非線型方程式の平衡点における不変多様体を考える基礎であり重要である．これについては別の機会に譲りたい．

■謝辞　この原稿を執筆する機会を与えてくださった，RIMS 共同研究（公開型）「力学系理論の最近の進展とその応用」の研究代表者である京都大学の柴山允瑠先生にお礼申し上げます．

参考文献

[1] 内藤 敏機，原 惟行，日野 義之，宮崎 倫子，『タイムラグをもつ微分方程式—関数微分方程式入門—』，牧野書店，2002.

[2] R. Bellman and K. L. Cooke, *Differential-difference equations*, Academic Press, New York-London, 1963.

[3] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey and D. E. Knuth, *On the Lambert W function*, Adv. Comput. Math. **5** (1996), 329–359. DOI: 10.1007/BF02124750.

[4] O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel and H.-O. Walther, *Delay Equations. Functional, complex, and nonlinear analysis*, Appl. Math. Sci., Vol. 110. Springer-Verlag, New York, 1995. DOI: 10.1007/978-1-4612-4206-2.

[5] R. D. Driver, *A two-body problem of classical electrodynamics: the one-dimensional case*, Ann. Physics **21** (1963), 122–142. DOI: 10.1016/0003-4916(63)90227-6.

[6] K.-J. Engel and R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, With contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafune, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli and R. Schnaubelt. Grad. Texts in Math., Vol. 194. Springer-Verlag, New York, 2000. DOI: 10.1007/b97696.

[7] T. Erneux, *Applied delay differential equations*, Surv. Tutor. Appl. Math. Sci., Vol. 3. Springer, New York, 2009. DOI: 10.1007/978-0-387-74372-1.

[8] J. K. Hale, *A stability theorem for functional-differential equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **50** (1963), 942–946. DOI: 10.1073/pnas.50.5.942.

[9] J. K. Hale, *Theory of functional differential equations*, Second edition. Appl. Math. Sci., Vol. 3. Springer-Verlag, New York, 1977. DOI: 10.1007/978-1-4612-9892-2.

[10] J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to functional differential equations*, Appl. Math. Sci., Vol. 99. Springer-Verlag, New York, 1993. DOI: 10.1007/978-1-4612-4342-7.

[11] T. Hara and J. Sugie, *Stability region for systems of differential-difference equations*, Funkcial. Ekvac. **39** (1996), no. 1, 69–86.

[12] A. Keane, B. Krauskopf and C. M. Postlethwaite, *Climate models with delay differential equations*, Chaos **27** (2017), 114309, 15 pp. DOI: 10.1063/1.5006923.

[13] M. C. Mackey and L. Glass, *Oscillation and chaos in physiological control systems*, Science **197** (1977), 287–289. DOI: 10.1126/science.267326.

[14] J. Nishiguchi, *On parameter dependence of exponential stability of equilibrium solutions in differential equations with a single constant delay*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **36** (2016), no. 10, 5657–5679. DOI: 10.3934/dcds.2016048.

[15] H.-O. Walther, *The solution manifold and C^1-smoothness for differential equations with state-dependent delay*, J. Differential Equations **195** (2003), no. 1, 46–65. DOI: 10.1016/j.jde.2003.07.001.

[16] H.-O. Walther, *A homoclinic loop generated by variable delay*, J. Dynam. Differential Equations **27** (2015), no. 3–4, 1101–1139. DOI: 10.1007/s10884-013-9333-2.

[17] D. V. Widder, *The Laplace transform*, Princeton Mathematical Series, Vol. 6. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.

[18] K. Yosida, *Functional analysis*, Reprint of the sixth (1980) edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. DOI: 10.1007/978-3-642-61859-8.