

結合振動子系において同期しない密なネットワークの探索

京都大学大学院情報学研究科 米田亮介
Ryosuke Yoneda
Graduate School of Informatics,
Kyoto University

1 はじめに

多数の物体が相互作用や外力を通して集団として揃った運動をすることを**同期現象**と呼ぶ。同期現象はホタルの発光 [1, 2]¹、カエルの合唱 [3]、神経細胞の発火 [4–6]、メトロノーム [7]²など自然界に多く見られる現象である。同期現象の諸性質を明らかにするために、対象を円周上を運動する振動子とみなした結合振動子系 [8] を用いた研究がこれまでに盛んになされてきた [9–13]。しかしながら、振動子間の結合を表すネットワークの構造を決めたときに同期を見せるかどうかに関しては未だ理解が進んでいない。

重要な問題の一つとしてネットワークの**接続率** (*connectivity*) もしくは密度と同期の関係に関する研究がある [14–21]。ノード数 N のネットワークの接続率 μ は最小次数を $N - 1$ で規格化したもので定義される。以下では結合振動子系として、自然振動数がすべて同じで、ネットワークの隣接行列は結合があれば 1 を取るようなものを考える。2012 年に Taylor が接続率 μ が 0.9395 より大きいネットワークのもとでは完全同期する解が結合振動子系の唯一の安定平衡点であることを示した [16]。この結果は改良が進められ [18, 20, 21]、現在の最良の結果によると、 $\mu \geq 3/4$ のもとではネットワークは必ず同期することがわかっている [21]。ここで、ネットワークが完全同期するための最小の接続率を**臨界接続率** (*critical connectivity*) と呼び、 μ_c と書くことにすると、 μ_c の最良の上界は $3/4$ であるといえる。現在に至るまで μ_c の厳密な値は知られていない。

以上の結果は μ_c の上界に関する結果だが、 μ_c の下界に関する研究も進んでいる [15, 17, 19, 22]。特に Yoneda *et al.* は接続率が 0.6838... で完全同期以外の安定平衡点が存在するようなネットワークの探索に成功した。これにより μ_c の現在の最良の下界は 0.6838... であることがわかっている。

本報告書では文献 [22] の主結果とその証明を紹介する。これまでの μ_c の下界評価においては、完全同期以外の安定平衡点が存在するようなネットワークを手探りで構築して下界を更新している状況であった [15, 17, 19]。これに対し、Yoneda *et al.* は同期しないネットワークの構築を整数計画問題として定式化した。Townsend *et al.* の先行研究 [19] と同様に巡回ネットワークを考えると、特定の解についてはその対称性から線形固有値を厳密に計算することができる。この線形固有値を用いることで整数計画問題としての定式化が可能になり、システムティックに同期しない密なネットワークの探索が行うことに成功した。これにより μ_c の下界として 0.6838... を導出することに成功した。

本報告書は、第 2 章で自然振動数が同一な結合振動子系とネットワークの接続率を定義する。第 3 章では巡回ネットワーク上の定常解となる *twisted state* を紹介し、その線形固有値を求める。第 4 章では *twisted state* が安定となるような密な巡回ネットワークを探索する問題を整数計画問題として定式化する。またその厳密解を紹介する。第 5 章で μ_c の下界を評価する。

2 準備

2.1 結合振動子系

N 個の振動子がある結合振動子系を考える。各振動子の持つ自然振動数が同一で、振動子間がネットワークを介して結合している場合、 i 番目の振動子の微分方程式は

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (1)$$

¹YouTube の動画 <https://www.youtube.com/watch?v=0B0jTMkyfIA> が参考になる。

²メトロノームを台に載せて自由に振らせると台を通して相互作用が働きメトロノームが集団的に同じ動きを見せるようになる。これは YouTube にも多く動画があがっている (<https://www.youtube.com/watch?v=5v5eBf2KwF8> など) ので見てみると良い。

で与えられる。ここで、 θ_i は i 番目の振動子の位相であり、 $\theta_i \in [0, 2\pi) \simeq \mathbb{S}^1$ である。 a_{ij} はネットワークの隣接行列の (i, j) 成分を表しており、 i, j 間に結合がある場合は $a_{ij} = 1$ 、結合がない場合は $a_{ij} = 0$ である。この報告書ではネットワークとして無向ネットワークを考えるので $a_{ij} = a_{ji}$ である。また、自己ループは考えない³ので、 $a_{ii} = 0$ と決めておく。

2.2 平衡点とその線形安定性

式 (1) が平衡点 $\theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_N^*)^\top$ を持つとしよう。このとき、

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j^* - \theta_i^*) = 0 \quad (2)$$

が各 $i \in [N]$ で成り立つ。 θ^* が平衡点であれば任意の $c \in \mathbb{S}^1$ に対して $\theta^* + c = (\theta_1^* + c, \dots, \theta_N^* + c)^\top$ も解であることに注意しておく。これは系 (1) が持つ回転対称性からくるものである。

平衡点 θ^* の線形安定性はそのヤコビ行列 J_{θ^*} の固有値で定まる。 J_{θ^*} の各要素は

$$[J_{\theta^*}]_{i,j} = \begin{cases} a_{ij} \cos(\theta_j^* - \theta_i^*) & i \neq j \\ -\sum_{k=1}^N a_{ik} \cos(\theta_k^* - \theta_i^*) & i = j \end{cases} \quad (3)$$

で与えられる。このヤコビ行列は対称行列であるからすべての固有値は実である。また、必ず零固有値を持つことに注意しておく。この零固有値は回転対称性 $\theta^* + c$ からくるものなので、安定性に影響を与えるものではない。よって、回転対称性からくる零固有値を除いた $N - 1$ 個の固有値がすべて負であれば平衡点 θ^* は線形安定である。一方で、少なくとも 1 つの固有値が正であれば平衡点 θ^* は線形不安定であると言える。もし零固有値が 2 個以上あれば、安定性解析により高次の解析が必要になる。これは中心多様体縮約などの手法を用いることで解析が可能になるが、本報告書では平衡点の線形安定性のみに着目する。

系 (1) は自明な完全同期解 (すべての $i \in [N]$ に対して $\theta_i = 0$) を持つ。この完全同期解を $\mathbf{0}$ と書くことにする。 $\mathbf{1}$ と平行でないような任意のベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ に対して $\mathbf{v}^\top J_0 \mathbf{v} = -\sum_{i>j} a_{ij} (v_i - v_j)^2 < 0$ であることが計算するとわかる。これより完全同期解のヤコビ行列 J_0 は $N - 1$ 個の負の固有値を持つことがわかるので、完全同期解はネットワーク構造によらずに常に線形安定であることがわかる。

2.3 臨界接続率 μ_c

N 頂点あるネットワークの接続率 μ はネットワークの最小次数を $N - 1$ で規格化したものである⁴。 i 番目の頂点の次数は隣接行列 A の i 行目の要素の和を取ったもの一致することに注意すると、接続率 μ は

$$\mu = \frac{\min_{i \in [N]} \sum_{j \in [N]} a_{ij}}{N - 1} \quad (4)$$

で与えられる。全結合ネットワークでは $\mu = 1$ である。また、孤立した頂点を含むネットワークにおいては $\mu = 0$ である。

臨界接続率 μ_c は次で定義される。

Definition 1 (臨界接続率 μ_c [19]). 臨界接続率 μ_c は $\mu \geq \mu_c$ なるネットワークであれば完全同期解のみが安定平衡点となるような最小な値で定義される。すなわち、 $\mu \geq \mu_c$ なる任意のネットワークは必ず同期する一方、 $\mu < \mu_c$ なるネットワークについて完全同期解以外の安定平衡点を持つようなものが存在する、ということである。

現在知られている最良の μ_c の評価は

$$0.6838 \dots \leq \mu_c \leq \frac{3}{4} \quad (5)$$

である。

³正確には考える意味がない。自己ループに対応する結合については $\sin(\theta_i - \theta_i) = 0$ となるからである。

⁴規格化定数が N ではなく $N - 1$ であるのは、自己ループを考えないためである。自己ループを除けば 1 つの頂点から出る枝の本数の最大値は自分以外の頂点数に等しく $N - 1$ となる。

3 巡回ネットワーク

本報告書では Townsend *et al.* による研究 [19] と同じく、巡回ネットワークについて考える。巡回ネットワークはその隣接行列が巡回行列となるようなネットワークとして定義される。ここで巡回行列は次の形を取るものである。

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} = (x_{j-i})_{1 \leq i, j \leq N} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{N-2} & x_{N-1} \\ x_{N-1} & x_0 & x_1 & & \\ \vdots & x_{N-1} & x_0 & \ddots & \vdots \\ x_2 & & \ddots & \ddots & x_1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{N-1} & x_0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

ここで、任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して $x_k = x_{k \bmod N}$ である。また、自己ループは考えないので $x_0 = 0$ である。ネットワークとして無向かつ重みがないものを考えるので、任意の $i \in [N-1]$ に対して $x_i \in \{0, 1\}$ かつ $x_i = x_{N-i}$ である。これより、巡回ネットワークは $x_1, \dots, x_{\lfloor N/2 \rfloor}$ それぞれについて 0, 1 を選ぶことによって決まるので N 頂点の巡回ネットワークについては $2^{\lfloor N/2 \rfloor}$ の可能性がある。巡回ネットワークの接続率は

$$\mu = \frac{\sum_{i \in [N-1]} x_i}{N-1}, \quad (7)$$

である。これは巡回ネットワークの各頂点がすべて同じ次数を持つ正則グラフであることからわかる。

Townsend *et al.* は任意の N と $0 \leq p \leq \lfloor N/2 \rfloor$ に対して

$$\theta_p^* = \left(0, \frac{2\pi p}{N}, \dots, \frac{2\pi p(N-1)}{N} \right)^\top \quad (8)$$

が巡回ネットワーク上の系 (1) の平衡点となることを示した。以下では θ_p^* を p -twisted state と呼ぶ。0-twisted state θ_0^* はすべての位相が 0 となる完全同期解である。

式 (3) を用いると p -twisted state のヤコビ行列は θ_p^* as

$$[J_{\theta_p^*}]_{i,j} = \begin{cases} x_{j-i} \cos\left(\frac{2\pi p(j-i)}{N}\right) & i \neq j \\ -\sum_{k=1}^N x_{k-i} \cos\left(\frac{2\pi p(k-i)}{N}\right) & i = j \end{cases}. \quad (9)$$

で与えられる。このヤコビ行列の各要素はその添字の差のみに依存している。そこで、

$$y_k = \begin{cases} x_k \cos\left(\frac{2\pi pk}{N}\right) & k \in [N-1] \\ -\sum_{l=1}^{N-1} x_l \cos\left(\frac{2\pi pl}{N}\right) & k = 0 \end{cases}, \quad (10)$$

を用いると、ヤコビ行列の (i, j) 成分は $[J_{\theta_p^*}]_{i,j} = y_{j-i}$ で表される。 $x_{N-k} = x_k$ より $y_{N-k} = y_k$ であるから、 $J_{\theta_p^*}$ はまた対称な巡回行列となる。巡回行列の固有値は厳密に求まり、それは $k \in [N-1]$ に対して

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \sum_{l=0}^{N-1} y_l \cos\left(\frac{2\pi kl}{N}\right) \\ &= \sum_{l=1}^{N-1} x_l \cos\left(\frac{2\pi pl}{N}\right) \left[-1 + \cos\left(\frac{2\pi kl}{N}\right) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

で与えられる。 λ_0 は常に 0 であり、これは上で述べた回転対称性に起因するものである。

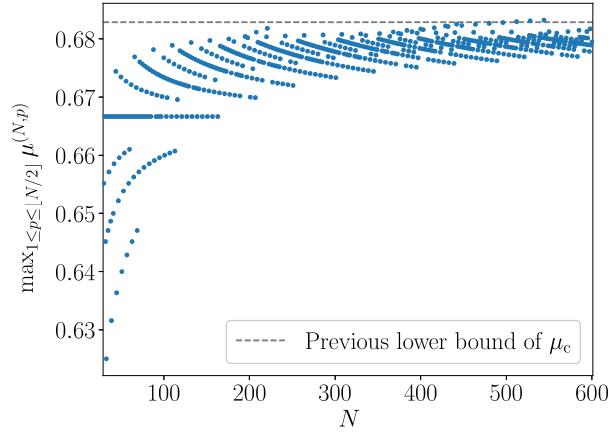


Figure 1: Problem 1 により得られる $\max_p \mu^{(N,p)}$ を $30 \leq N \leq 600$ についてプロットしたもの。灰色の点線は先行研究 [19] で得られた μ_c の最良の下界評価。 $N = 512, 544$ でこれまでの下界を上回る値が得られている。

4 整数計画問題による定式化

完全同期解以外に安定平衡点を持つ密なネットワークを探索する問題を考えよう。巡回ネットワーク上の twisted state に問題を制限することでこの探索問題が整数計画問題に落とし込むことができることを以下で見ていく。最適化問題としては、式 (11) の固有値 λ_k がすべて負であるもとで x_i を動かしたときに接続率 $\mu(7)$ の最大化することができれば良い。

x_i は整数であることから、次の整数計画問題の標準形に書き下すことができる [23]。

Problem 1. $N \geq 2$ と $1 \leq p \leq \lfloor N/2 \rfloor$ に対して、

$$\begin{aligned}
 & \text{maximize} && \mu = \frac{1}{N-1} \mathbf{1}^\top \mathbf{x}, \\
 & \text{subject to} && \mathbf{x} \in \{0, 1\}^{N-1}, \\
 & && L^{(N,p)} \mathbf{x} < \mathbf{0}, \\
 & && C^{(N)} \mathbf{x} = \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

ここで、行列 $L^{(N,p)} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ と $C^{(N)} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ の (k, l) 成分は次で定義される。

$$[L^{(N,p)}]_{k,l} = \cos\left(\frac{2\pi pl}{N}\right) \left[-1 + \cos\left(\frac{2\pi kl}{N}\right)\right], \tag{13}$$

$$[C^{(N)}]_{k,l} = \delta_{k,l} - \delta_{k,N-l}. \tag{14}$$

k 番目の固有値は $\lambda_k = [L^{(N,p)} \mathbf{x}]_k$ で与えられるので、 $L^{(N,p)} \mathbf{x} < \mathbf{0}$ という条件は p -twisted state が線形安定となるための条件である。また、 $C^{(N)} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ はネットワークは無向である条件 $x_k = x_{N-k}$ ($k \in [N-1]$) を反映している。直観的には、この最適化問題は制約条件 $L^{(N,p)} \mathbf{x} < \mathbf{0}$ と $C^{(N)} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす中で、できるだけ多くの x_l を 1 にする、と見ることができる。

ネットワークの探索問題を整数計画問題に変換することで最大の接続率を系統的に調べることができるようになる。整数計画問題の最適解を $\mu^{(N,p)}$ とおこう。すなわち、 N 個の振動子が p -twisted state を安定にするネットワークの中で最大の接続率を $\mu^{(N,p)}$ と書く。図 1 に $30 \leq N \leq 600$ における $\mu^{(N,p)}$ の値のグラフを示す。この数値計算には Cbc[24] と呼ばれる最適化ライブラリを使用した。これは Python の PuLP や Julia[25] の JuMP[26] のインターフェイスライブラリを通して使用できる。またこのコードは GitHub 上で <https://github.com/yonesuke/DenseSync> にて公開している。 N が大きくなると数値計算の探索空間が膨大になるため $N \leq 600$ までしか結果は示していないが、それでもこれまでの先行研究で得られた μ_c の下界 [19] を上回る結果が $N = 512, 544$ で見られる。

整数計画問題は通常 NP 困難と呼ばれるクラスに属する難しい問題であるが [23]、今回の問題 1 については、任意の (N, p) のペアに対して厳密な解 $\mu^{(N,p)}$ を得ることに成功した。次の定理が $\mu^{(N,p)}$ の厳密解である。

Theorem 1 (最大接続率 $\mu^{(N,p)}$). $N \geq 2$ と $1 \leq p \leq \lfloor N/2 \rfloor$ に対して $m = \gcd(N, p)$, $\tilde{N} = N/m$ とする。

1. $\tilde{N} \leq 4$ であれば問題 1 は実行可能解を持たない。
2. $\tilde{N} \geq 5$ の場合、 s_k を

$$s_k = \sum_{l=1}^k \cos\left(\frac{2\pi l}{\tilde{N}}\right) \left[-1 + \cos\left(\frac{2\pi l}{\tilde{N}}\right)\right], \quad (15)$$

で定め、 k_c を $s_k \geq 0$ なる最小の k で定義する。このとき、 $\mu^{(N,p)}$ は次で与えられる。

$$\mu^{(N,p)} = \frac{m(2k_c - 1) - 3 - 2 \lfloor ms_{k_c-1}/(s_{k_c} - s_{k_c-1}) \rfloor}{N - 1}. \quad (16)$$

$s_k \geq 0$ は k に関する 1 次元の関数なので k_c は簡単に求まることに注意しておく。この報告書では証明については述べない。詳しくは文献 [22] を見よ。この厳密解は $N \leq 600$ までの数値計算結果と完全に一致していることも確認した。

5 $\sup \mu^{(N,p)}$

この章では最大接続率 $\mu^{(N,p)}$ の極大値 $\bar{\mu}$ を求める。

$$\bar{\mu} := \sup \left\{ \mu^{(N,p)} \mid 1 \leq p \leq \lfloor N/2 \rfloor, N \geq 2 \right\}, \quad (17)$$

この値によって μ_c の下界を改良することに成功した。

定理 1 の証明から

$$\bar{\mu} = \sup \left\{ \mu^{(m\tilde{N}, m)} \mid m \geq 1, \tilde{N} \geq 5 \right\}. \quad (18)$$

がわかる。

$$\alpha_{\tilde{N}} = 2k_c - 1 - 2 \frac{s_{k_c-1}}{s_{k_c} - s_{k_c-1}}, \quad (19)$$

に対して

$$\frac{\alpha_{\tilde{N}}m - 3}{\tilde{N}m - 1} \leq \mu^{(m\tilde{N}, m)} \leq \frac{\alpha_{\tilde{N}}m - 2}{\tilde{N}m - 1}, \quad (20)$$

であるから、はさみうちの原理より

$$\mu^{(m\tilde{N}, m)} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \mu^{(m\tilde{N}, m)} = \frac{\alpha_{\tilde{N}}}{\tilde{N}} \quad (21)$$

が $m \geq 1, \tilde{N} \geq 5$ に対して成立する。ここで $k_c \leq N/2$ と $-1 \leq s_{k_c-1}/(s_{k_c} - s_{k_c-1}) < 0$ が成り立つことから

$$\frac{\alpha_{\tilde{N}}m - 2}{\tilde{N}m - 1} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{\tilde{N}}m - 2}{\tilde{N}m - 1} = \frac{\alpha_{\tilde{N}}}{\tilde{N}} \quad (22)$$

が得られることを用いた。よって

$$\bar{\mu} = \sup \left\{ \frac{\alpha_{\tilde{N}}}{\tilde{N}} \mid \tilde{N} \geq 5 \right\}. \quad (23)$$

がわかる。図 2 で $5 \leq \tilde{N} \leq 100$ における $\alpha_{\tilde{N}}/\tilde{N}$ の値を数値計算により求めたものを示す。

$\alpha_{\tilde{N}}/\tilde{N}$ の最大値を求めよう。まず

$$\frac{k_c}{\tilde{N}} \leq K_c + \frac{1}{2\tilde{N}} + \frac{2\pi}{3\tilde{N}^2}, \quad (24)$$

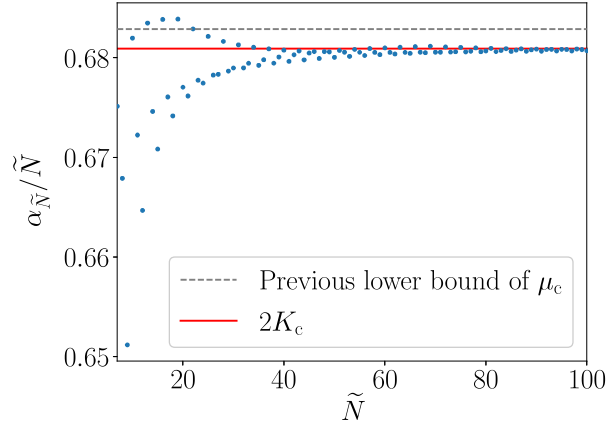


Figure 2: $5 \leq \tilde{N} \leq 100$ における $\alpha_{\tilde{N}}/\tilde{N}$ のグラフ。灰色の点線は μ_c のこれまでの最良の評価 [19]。赤色の実線は $2K_c$ を表す。

であることから

$$\frac{\alpha_{\tilde{N}}}{\tilde{N}} \leq 2K_c + \frac{2}{\tilde{N}} + \frac{4\pi}{3\tilde{N}^2} \quad (25)$$

と評価できることを用いる。ここで

$$2K_c := \lim_{\tilde{N} \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{\tilde{N}}}{\tilde{N}} = 2 \lim_{\tilde{N} \rightarrow \infty} \frac{k_c}{\tilde{N}} = 2 \cdot 0.34046 \dots \quad (26)$$

である。式 (25) の証明と K_c の値の導出は文献 [22] の Appendix A を参照せよ。この不等式により、 $N \geq 1001$ であれば $\alpha_{\tilde{N}}/\tilde{N} \leq 0.683$ となることがわかる。

図 2 が示すように $N \leq 1000$ であれば $\alpha_{\tilde{N}}/\tilde{N}$ が 0.683 よりも大きいところが存在する。数値計算によりこの最大値が $\tilde{N} = 19$ で達成されることがわかった。この結果をまとめると、 μ_c の下界の評価を改良する次の結果が得られる。

Theorem 2 ($\sup \mu^{(N,p)}$).

$$\bar{\mu} = \frac{11}{19} - \frac{2}{19} \frac{\sum_{l=1}^5 \left[-\cos\left(\frac{2\pi l}{19}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi l}{19}\right) \right]}{-\cos\left(\frac{12\pi}{19}\right) + \cos^2\left(\frac{12\pi}{19}\right)} \quad (27)$$

$$= 0.683875 \dots \quad (28)$$

定理 2 はこれまでの臨界接続率 μ_c の下界の評価を改良するものである。完全同期解以外の安定平衡点を持つ巡回ネットワークは $(N, p) = (19m, m)$ で与えられる p -twisted state のもとで得られるネットワークの $m \rightarrow \infty$ で最も密になることを示している。各 m における密なネットワークの構成方法を Algorithm 1 に示す。このネットワークがグラフ理論の観点からなにか特別な性質を持っているかどうかは何もわかっていない。

Algorithm 1 $(N, p) = (19m, m)$ なる m -twisted state を安定平衡点とするネットワークのなかで最も接続率が高いものの隣接行列を計算するアルゴリズム。 $\mathbf{x}[i]$ は \mathbf{x} の i 番目の要素、 $A[i, j]$ は行列 A の (i, j) 成分であり、 $b_l = -\cos(2\pi l/19) + \cos^2(2\pi l/19)$ である。

Require: m

```

1:  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{19m} \leftarrow \mathbf{0}$ 
2:  $A \in \{0, 1\}^{19m \times 19m}$  (Adjacency matrix)
3: ExtraAllowance  $\leftarrow 2 \left\lceil -m \sum_{l=1}^5 b_l / b_6 - 1 \right\rceil$ 
4:  $c \leftarrow 0$ 
5: for  $k \leftarrow 0$  to  $m - 1$  do
6:   for  $i \leftarrow 1$  to 5 do
7:      $\mathbf{x}[19k + i], \mathbf{x}[19(k + 1) - i] \leftarrow 1$ 
8:   end for
9:   if  $k \geq 1$  then
10:     $\mathbf{x}[19k] \leftarrow 1$ 
11:   end if
12: end for
13: for  $k \leftarrow 0$  to  $m - 1$  do
14:    $\mathbf{x}[19k + 6], \mathbf{x}[19(m - k) - 6] \leftarrow 1$ 
15:    $c \leftarrow c + 2$ 
16:   if  $c > \text{ExtraAllowance}$  then
17:     break
18:   end if
19:    $\mathbf{x}[19k + 13], \mathbf{x}[19(m - k) - 13] \leftarrow 1$ 
20:    $c \leftarrow c + 2$ 
21:   if  $c > \text{ExtraAllowance}$  then
22:     break
23:   end if
24: end for
25: for  $i, j \leftarrow 1$  to  $19m$  do
26:    $A[i, j] \leftarrow \mathbf{x}[i - j \bmod 19m]$ 
27: end for
28: return  $A$  (Resulting adjacency matrix)

```

References

- [1] H. M. Smith, “Synchronous flashing of fireflies”, *Science* **82**, 151 (1935).
- [2] J. Buck and E. Buck, “Mechanism of rhythmic synchronous flashing of fireflies”, *Science* **159**, 1319 (1968).
- [3] I. Aihara, T. Mizumoto, T. Otsuka, H. Awano, K. Nagira, H. G. Okuno, and K. Aihara, “Spatio-temporal dynamics in collective frog choruses examined by mathematical modeling and field observations”, *Scientific Reports* **4**, 3891 (2014).
- [4] R. Cossart, D. Aronov, and R. Yuste, “Attractor dynamics of network UP states in the neocortex”, *Nature* **423**, 283 (2003).
- [5] A. T. Winfree, “Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators”, *Journal of Theoretical Biology* **16**, 15 (1967).
- [6] Z. Lu, K. Klein-Cardena, S. Lee, T. M. Antonsen, M. Girvan, and E. Ott, “Resynchronization of circadian oscillators and the east-west asymmetry of jet-lag”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **26**, 094811 (2016).
- [7] J. Pantaleone, “Synchronization of metronomes”, *American Journal of Physics* **70**, 992 (2002).
- [8] Y. Kuramoto, in *International symposium on mathematical problems in theoretical physics* (Springer-Verlag, 1975), pp. 420–422.

- [9] S. H. Strogatz, “From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators”, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **143**, 1 (2000).
- [10] E. Ott and T. M. Antonsen, “Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **18**, 037113 (2008).
- [11] H. Chiba, “A proof of the Kuramoto conjecture for a bifurcation structure of the infinite-dimensional Kuramoto model”, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **35**, 762 (2013).
- [12] J. D. da Fonseca and C. V. Abud, “The Kuramoto model revisited”, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2018**, 103204 (2018).
- [13] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes, “Critical phenomena in complex networks”, *Reviews of Modern Physics* **80**, 1275 (2008).
- [14] S. Watanabe and S. H. Strogatz, “Constants of motion for superconducting Josephson arrays”, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **74**, 197 (1994).
- [15] D. A. Wiley, S. H. Strogatz, and M. Girvan, “The size of the sync basin”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **16**, 015103 (2006).
- [16] R. Taylor, “There is no non-zero stable fixed point for dense networks in the homogeneous Kuramoto model”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **45**, 055102 (2012).
- [17] E. A. Canale and P. Monzón, “Exotic equilibria of Harary graphs and a new minimum degree lower bound for synchronization”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **25**, 023106 (2015).
- [18] S. Ling, R. Xu, and A. S. Bandeira, “On the landscape of synchronization networks: a perspective from nonconvex optimization”, *SIAM Journal on Optimization* **29**, 1879 (2019).
- [19] A. Townsend, M. Stillman, and S. H. Strogatz, “Dense networks that do not synchronize and sparse ones that do”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **30**, 083142 (2020).
- [20] J. Lu and S. Steinerberger, “Synchronization of Kuramoto oscillators in dense networks”, *Nonlinearity* **33**, 5905 (2020).
- [21] M. Kassabov, S. H. Strogatz, and A. Townsend, “Sufficiently dense kuramoto networks are globally synchronizing”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **31**, 073135 (2021).
- [22] R. Yoneda, T. Tatsukawa, and J.-n. Teramae, “The lower bound of the network connectivity guaranteeing in-phase synchronization”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **31**, 063124 (2021).
- [23] M. Conforti, G. Cornuéjols, and G. Zambelli, *Integer programming* (Springer International Publishing, 2014).
- [24] J. Forrest, T. Ralphs, S. Vigerske, LouHafer, B. Kristjansson, jpfasano, EdwinStraver, M. Lubin, H. G. Santos, rlougee, and M. Saltzman, *Coin-or/cbc: version 2.10.5*, 2020.
- [25] J. Bezanson, A. Edelman, S. Karpinski, and V. B. Shah, “Julia: A fresh approach to numerical computing”, *SIAM Review* **59**, 65 (2017).
- [26] I. Dunning, J. Huchette, and M. Lubin, “JuMP: A Modeling Language for Mathematical Optimization”, *SIAM Review* **59**, 295 (2017).