

# 複素 1 次元多項式写像に対する正則運動の構成

愛媛大学理学部 平出耕一

Koichi Hiraide

Faculty of Science, Ehime University

1次元において、多項式写像または有理写像が双曲型とは、それが有限個の吸引周期軌道をもち、さらにそれらの吸引鉢の補集合上で拡大であるときをいう。周知のように、双曲的写像は写像の空間において開集合をなす。一方、双曲型の稠密性は、特に1次元の場合において、力学系研究の中心問題の1つである。この問題は Fatou [7] まで遡り、彼は1920年にリーマン球面  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  の双曲型有理写像は有理写像全体の空間において稠密であることを予想した。これは Fatou 予想と呼ばれている。この問題に対し Graczyk-Świątek [8] と Lyubich [12] は、独立に1997年に実数直線  $\mathbb{R}$  の2次多項式写像は双曲型（実）2次多項式写像で近似できることを示した。その後 Smale [19] は、21世紀の数学の問題の第11問題として、複素平面  $\mathbb{C}$  のすべての複素多項式写像は同じ次数の双曲型多項式写像により近似できるか、また、数直線のコンパクト区間上の任意の滑らかな写像は双曲型写像によって  $C^r$  級 ( $r \geq 2$ ) の意味で近似できるか、を問いた。この Smale の問題の後半は、Kozłowski-Shen-van Strien [11] により2007年に問題の前半の実バージョンを解決することによって肯定的に解かれた。しかし、複素の場合については、2次多項式の場合でさえ未解決のままである。

このレポートでは、Fatou 予想の多項式の場合に、すなわち Smale の第11問題の前半に焦点をあてて考察する。すなわち、次の予想について議論する。

**予想 1 (Fatou-Smale)**  $\mathbb{C}$  上の任意の多項式写像は同じ次数の双曲型多項式写像により近似できる。

このレポートで述べる議論のアイデアは、Mañé-Sad-Sullivan [13] による正則運動 (holomorphic motion) の概念をもとにしている。かれらは正則運動の概念を導入し、リーマン球面上の構造安定な有理写像は有理写像の全体の中で稠密であることを、1987年に既に証明している。

実の場合は、繰り込み (renormalization) の手法が複素上界 (complex bound) と共に重要な役割を果たしているが (McMullen [15], [8], [12], [11]), このレポートでは代数幾何の観点から問題を捉え、ホモクリニック類とヘテロクリニック類を利用する。複素の場合、それらは全てジュリア集合に一致する (Julia [10], Blanchard [2], Milnor [17] 等)。実の場合、それらは繰り込みによって得られる部分力学系の列に対応しており、大変有効に働くと思われる。

# 1 複素多項式写像

2変数多項式写像

$$P: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

を考える。第1の変数は力学系の相空間の点に対応し、第2の変数は力学系のパラメータとみなす。  $P(z, t)$  は多項式環  $\mathbb{C}[z, t]$  の元であることに注意する。以下で次を仮定する；

(A1)

$$P(z, t) - z$$

は  $\mathbb{C}[z, t]$  において既約である。

さらに

$$P_t(z) = P(z, t) = a_0(t) + a_1(t)z + \cdots + a_n(t)z^n$$

と表し、次を仮定する；

(A2)  $n \geq 2$ .

(A3)  $a_1(0) = 1$ ,  $a_n(0) \neq 0$ ,  $a_i(0) = 0$  ( $i \neq 1, n$ ).

(A4) 係数多項式の次数に関し

$$\deg(a_1) \geq 1, \quad \deg(a_n) > \deg(a_i) \quad (0 \leq i \leq n-1).$$

また

$$H_P^{\mathbb{C}} = \{t \in \mathbb{C} \mid a_n(t) \neq 0 \text{ かつ } P_t: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ は双曲型}\}.$$

と定める。明らかに  $H_P^{\mathbb{C}}$  は

$$\{t \in \mathbb{C} \mid a_n(t) \neq 0\}$$

の開集合である。

**予想 2** 仮定 (A1)~(A4) の下で、  $H_P^{\mathbb{C}}$  は空でないならば  $\mathbb{C}$  で稠密である。

**命題 1** 予想 2 が正しいならば、予想 1 も正しい。

これは次の様に示される。次数が 1 以下の多項式に対し、予想 1 は明らかに正しい。そこで  $n \geq 2$  としてよい ((A2)). 複素数の対

$$(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$$

は  $\alpha_0\alpha_1\alpha_n \neq 0$  を満たすとし,

$$a_i(t) = \begin{cases} \alpha_n t^2 + 1 & i = n \\ \alpha_1 t + 1 & i = 1 \\ \alpha_i t & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とおく. (A3) と (A4) が成り立つ. また, Eisenstein's criterion より  $P(z, t) - z$  は  $\mathbb{C}[z, t]$  において既約である ((A1)).

絶対値  $|t|$  は十分大きいとし,  $c$  を  $P_t$  の臨界点, すなわち,  $P'_t(c) = 0$  とする. ここでプライムは  $z$  に関する微分を表す. このとき

$$\left(\frac{\alpha_1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) + 2\frac{\alpha_2}{t}c + \cdots + n\left(\alpha_n + \frac{1}{t^2}\right)c^{n-1} = 0.$$

となる. もし  $|c| \geq 1$  ならば,  $|c| \leq 2r/|t|$  が成り立つ. ここで

$$r = \left|\frac{\alpha_1}{\alpha_n}\right| + \left|\frac{\alpha_2}{\alpha_n}\right| + \cdots + \left|\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right|$$

である. しかし,  $|t|$  は十分大としているので, これは起こりえない. よって,  $|c| < 1$  が成り立つ. したがって,  $|c| \leq (2r/|t|)^{\frac{1}{n-1}}$  である. よって,  $0 < \varepsilon < 1$  となる  $\varepsilon$  が存在して  $|P_t(c)| \geq (1 - \varepsilon)|t|$  が成り立つ. これより

$$|P_t^m(P_t(c))| \geq ((1 - \varepsilon)|\alpha_n t^3|)^m \rightarrow \infty \quad (m \rightarrow \infty)$$

が得られる. 故に,  $P_t: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  は双曲型であり,  $H_P^{\mathbb{C}} \neq \emptyset$  が成立する. .

従って, 予想 2 が正しいとすると,  $H_P^{\mathbb{C}}$  は  $\mathbb{C}$  で稠密となる. このことから

$$\{(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z \mapsto a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \text{ is hyperbolic}\}$$

は  $\mathbb{C}^{n+1}$  で稠密となり, 予想 1 が正しいこととなる. .

以下, (A1)~(A4) を仮定して, 予想 2 について議論する. (A1) より  $P(z, t) - z$  は既約なので, 代数曲線

$$\mathcal{R}_0 = \{(z, t) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z, t) - z = 0\}.$$

は  $\mathbb{C}^2$  において既約である. 第 2 座標への射影  $\mathcal{R}_0 \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{C}_t$  は,  $\mathbb{C}_t$  上の有限個の分岐点  $t$  と,  $a_n(t) = 0$  を満たす有限個の  $t$  を除くと,  $n$  重の被覆写像である.

点  $t_0 \in \mathbb{C}_t$  を,  $a_n(t_0) \neq 0$  が成り立ち  $\mathcal{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}_t$  に対する分岐点でないように選ぶ. Douady-Hubbard [5], [6] の結果より

$$\#\{\text{吸引周期軌道}\} + \#\{\text{中立周期軌道}\} \leq n - 1$$

なので,  $P_{t_0}$  の拡大固定点  $e_0 \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_z$  が少なくとも1つ存在する. ここで,  $\#$  は要素の個数を表す. 明らかに,  $(e_0, t_0) \in \mathcal{R}_0$  となる.

$$\frac{\partial}{\partial z} \{P(z, t) - z\}_{z=e_0, t=t_0} = \frac{\partial P}{\partial z}(e_0, t_0) - 1 \neq 0$$

であるから,  $\mathbb{C}_t$  における  $t_0$  の小さな近傍  $D$  (開円板) と正則写像

$$e : D \rightarrow \mathbb{C}_z$$

が存在し,

- (1)  $e(t_0) = e_0$
- (2) 任意の  $t \in D$  に対し,  $P(e(t), t) - e(t) = 0$
- (3) すべての  $e(t)$  は  $P_t$  の拡大固定点

が成り立つ. このとき, 写像  $t \mapsto (e(t), t)$  は,  $\mathcal{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}_t$  に対する  $D$  上の1つの切断であることを注意する.  $\mathcal{R}_0$  は既約なので,  $e$  は定値写像にならない. また, 点  $t_0$  について, 第1座標への射影  $\mathcal{R}_0 \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{C}_z$  の任意の分岐点  $z_0$  に対し

$$(z_0, t_0) \notin \mathcal{R}_0$$

が成り立つとする. このとき, 必要ならば  $D$  をさらに小さくするとにより,  $e : D \rightarrow \mathbb{C}_z$  は単葉となる.

$t \in D$  を任意に取り,  $\mathbb{C}_z$  における  $e(t)$  の小さな近傍  $U_t$  を選び, 次の様に不安定多様体を定義する;

$$W^u(e(t); t) = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_t^n(U_t).$$

$J(P_t)$  により Julia 集合を表すと,  $e(t) \in J(P_t)$  であるから, ある  $N > 0$  に対し,  $P_t^N(U_t) \supset J(P_t)$  が成り立つ.  $D$  の選び方より,  $\mathbb{C}_z$  の任意の点は例外点でないので,

$$W^u(e(t); t) = \mathbb{C}_z$$

を得る.

$\lambda_t = P_t'(e(t))$  とおくと,  $D$  をより小さくにとって, すべての  $t \in D$  に対し  $|\lambda_t| > b > 1$  となる定数  $b$  が存在する. 次の命題2より, 不安定多様体  $W^u(e(t); t)$  をパラメータ付ける全射正則写像  $\varphi_t : \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_z$  の存在が分かる.

**命題 2** (Poincaré [18]).  $t \in D$  に対し次を満たす整関数  $\varphi_t : \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_z$  がただ一つ存在する;

- (1) すべての  $w \in \mathbb{C}_z$  に対し,  $P_t \circ \varphi_t(w) = \varphi_t(\lambda_t w)$
- (2)  $\varphi_t(0) = e(t)$  かつ  $\varphi_t'(0) = 1$ .

これは次の様に簡単に示される.

$$\varphi_t(w) = h_0(t) + h_1(t)w + h_2(t)w^2 + \dots$$

とする. 条件 (2) より,  $h_0(t) = e(t)$  かつ  $h_1(t) = 1$  を得る. 係数比較により, 関数方程式 (1) から, 任意の  $m \geq 2$  に対し

$$h_m(t) = \frac{1}{\lambda_t^m - \lambda_t} \sum_{k=2}^n a_k(t) \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_k=m \\ (0 \leq i_j \leq m-1, j=1,2,\dots,k)}} h_{i_1}(t)h_{i_2}(t)\dots h_{i_k}(t).$$

を得る.  $N > n$  とする.  $b > 1$  であるから,  $M > 0$  が存在して

$$M^n b^{-M+\log_N(M-1)-\log_N n} \left\{ \sup_{t \in D} \sum_{k=2}^n |a_k(t)| \right\} < 1.$$

が成り立つ.  $1 \leq m \leq M$  となる  $m$  に対し

$$\sup_{t \in D} |h_{m-1}(t)| \leq C^m b^{-m \log_N m}$$

が成立する  $C > 0$  を選ぶ. このとき, すべての  $m \geq 1$  に対し上の不等式が成り立つことが帰納法により確認できる. このように,  $\varphi_t$  は整関数である. 故に, 命題 2 が成立する.

多変数正則写像の標準的議論により (例えば, Cartan [4] を見よ), 写像  $(w, t) \mapsto \varphi_t(w)$  は正則であり,  $e(t)$  の近傍で  $\varphi_t^{-1}(e(t)) = 0$  を満たす逆写像  $\varphi_t^{-1}$  が存在し写像  $(z, t) \mapsto \varphi_t^{-1}(z)$  は  $\mathbb{C}^2$  における  $(e_0, t_0)$  の近傍で正則であることが分かる.

安定集合を

$$W^s(e(t); t) = \{z \in \mathbb{C} \mid P_t^m(z) \rightarrow e(t) \quad (m \rightarrow \infty)\}.$$

によって定義する.  $e(t)$  は拡大固定点なので,  $W^s(e(t); t)$  は加算集合であることが容易に分かる.

共通部分

$$W^s(e(t); t) \cap W^u(e(t); t) \setminus \{e(t)\}$$

の点  $z$  は  $e(t)$  に対するホモクリニック点である.  $P_t^N(z) = e(t)$  を満たす最小の  $N > 0$  をとる. もし点列

$$\{z, P_t(z), \dots, P_t^{N-1}(z)\}$$

の中に少なくとも一つ  $P_t$  の臨界点が存在するならば,  $z$  は  $e(t)$  に対するホモクリニック接触の点と呼ぶ.

代数曲線

$$\mathcal{C}_0 = \{(z, t) \in \mathbb{C}^2 \mid \frac{\partial}{\partial z} P(z, t) = 0\}.$$

を考える. 第2座標への射影  $\mathcal{C}_0 \rightarrow \mathbb{C}_t$  は, 分岐点あるいは  $a_n(t) = 0$  となる有限個の  $t$  を除いて,  $n-1$  重被覆である. 仮定 (A4) より  $\frac{\partial}{\partial z} P(z, t)$  は  $z-c$  の形の因子を持たない. ここで  $c$  は定数である. 従って,  $\mathcal{C}_0 \rightarrow \mathbb{C}_t$  は  $\mathbb{C}_t$  上で定値な切断を持たない. 以下で, 点  $t_0$  は上で述べた選択に加えて,  $\mathcal{C}_0 \rightarrow \mathbb{C}_t$  の分岐点でもないとする.  $D$  は開円盤 (従って単連結) なので,  $\mathcal{C}_0 \rightarrow \mathbb{C}_t$  は  $D$  で丁度  $(n-1)$  個の切断を持ち, それらは全て定値写像でない. さらに, 点  $t_0$  は, 第1座標への射影  $\mathcal{C}_0 \rightarrow \mathbb{C}_z$  の任意の分岐点  $z_0 \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_z$  に対し

$$(z_0, t_0) \notin \mathcal{C}_0$$

を満たすように選ばれているとする. 従って,  $D$  は小さく選ばれているので,  $\mathcal{C}_0 \rightarrow \mathbb{C}_t$  に対する  $D$  上の切断は全て単葉となる.

各  $m \geq 0$  に対し, 解析曲線

$$\mathcal{C}_m = \{(P_t^m(z), t) \in \mathbb{C}^2 \mid (z, t) \in \mathcal{C}_0\}.$$

を定義する. 第2座標への射影  $\mathcal{C}_m \rightarrow \mathbb{C}_t$  は, 有限個の点を除いて, 高々  $(n-1)$  重被覆である.

**命題 3** 任意の  $m \geq 0$  に対し  $\mathcal{C}_m \cap \mathcal{R}_0$  は有限集合である.

実際, もし  $\mathcal{C}_m \cap \mathcal{R}_0$  が集積点をもちそれが分岐点上にないとすると,  $\mathbb{C}_t$  の空でない開部分集合  $U$  が存在して,  $\mathcal{C}_m \rightarrow \mathbb{C}_t$  と  $\mathcal{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}_t$  は  $U$  上で同じ切断を持つ.  $\mathcal{R}_0$  は既約なので, 解析接続により  $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{C}_m$  を得る. これは矛盾である. 従って  $\mathcal{C}_m \cap \mathcal{R}_0$  は高々可算である. もし  $(w, t) \in \mathcal{C}_m \cap \mathcal{R}_0$  とすると,  $w = P_t^m(z)$  となる  $z \in \mathbb{C}_z$  が存在し, 代数方程式

$$\frac{\partial}{\partial z} P(z, t) = 0, \quad P(P_t^m(z), t) - P_t^m(z) = 0$$

が成り立つ. 故に, そのような点  $(z, t)$  は有限個でなければならない (cf. Hartshorne [9]). 従って, 証明が完了する.

集合

$$A = \{t \in D \mid e(t) \text{ に対するホモクリニック接触の点が存在する} \}$$

を定義しよう. このとき, 次が成り立つ;

**命題 4**  $\mathbb{C}_t$  における  $A$  の閉包の内部；  $\text{int}(\bar{A})$  は空集合である。

これは次の様に示される。  $\text{int}(\bar{A}) \neq \emptyset$  を仮定する。  $t_1 \in A \cap \text{int}(\bar{A})$  を取ると、  $e(t_1)$  に対するホモクリニック接触の点  $z$  が存在する。 このとき、  $z$  から  $e(t_1)$  までの軌道の中に臨界点  $c(t_1)$  がある。 ここで、  $c: D \rightarrow \mathbb{C}_z$  は  $\mathbb{C}_0 \rightarrow \mathbb{C}_t$  に対する  $D$  上の1つの切断の第1座標である。  $P_{t_1}^N(c(t_1)) = e(t_1)$  となる  $N > 0$  を選ぶ。 命題3より、写像

$$t \mapsto P_t^N(c(t)) - e(t)$$

は  $D_1 \subset \text{int}(\bar{A})$  を満たす  $t_1$  の小さな近傍  $D_1$  上で開写像である。 従って、写像

$$t \mapsto \varphi_t^{-1}(P_t^N(c(t)))$$

もまた  $D_1$  上で開写像である。 すべての  $\ell \geq 0$  に対し

$$\varphi_t(\lambda_t^\ell \varphi_t^{-1}(P_t^N(c(t)))) = P_t^{\ell+N}(c(t))$$

でありまた  $|\lambda_t| > b > 1$  であるから、  $\varphi_{t_1}: \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_z$  が全射という事実より、

$$\{P_t^{N+\ell}(c(t)) \mid t \in D_1, \ell \geq 0\}$$

は  $\mathbb{C}_z$  に一致することが分かる。 従って、  $t'_1 \in D_1$  と  $\ell \geq 0$  が存在して、  $P_{t'_1}^{N+\ell}(c(t'_1)) = c(t'_1)$  が成り立つ、すなわち、  $P_{t'_1}$  は超吸引周期点  $c(t'_1)$  をもつ。  $D_2 \subset D_1$  となる  $t'_1$  の近傍  $D_2$  を小さく選ぶと、すべての  $t \in D_2$  に対し  $c(t)$  は  $P_t$  の吸引周期点の鉢に含まれる。

$D_2 \subset \text{int}(\bar{A})$  であるから、  $t_2 \in A \cap D_2$  が存在する。 従って  $e(t_2)$  に対するホモクリニック接触の点を取ることが出来る。 従って、上記の議論を繰り返して、円盤の列

$$D_1 \supsetneq D_2 \supsetneq \cdots \supsetneq D_n.$$

が得られる。 このとき、  $t \in D_n$  ならば  $P_t$  の臨界点は全て吸引周期点の鉢の中に含まれる。 これは  $D_n \cap A \neq \emptyset$  に矛盾する。 故に、証明が完了する。

$e(t)$  のホモクリニック類を

$$\begin{aligned} \Lambda_t &= \overline{W^s(e(t); t) \cap W^u(e(t); t)} \\ &= \overline{W^s(e(t); t)}, \end{aligned}$$

で定義する。 次は簡単に得られる。

**命題 5**  $\Lambda_t = J(P_t)$ .

## 2 予想2の簡約

集合

$$B = \{t \in D \mid \Lambda_t \text{は } P_t \text{の臨界点を少なくとも1つ含む}\}$$

を定義する. 明らかに,  $A \subset B$  が成り立つ.

**予想3**  $\text{int}(B) = \emptyset$ .

予想2は次の様に予想3に簡約される.

**命題6** 予想3が正しいければ, 予想2は正しい.

実際,

$$B^{global} = \{t \in \mathbb{C} \mid a_n(t) \neq 0 \text{を満足し} \Lambda_t \text{は } P_t \text{の臨界点を少なくとも1つ含む}\},$$

と定めると,  $t_0$  は任意に固定された点であるので, 予想3が正しいければ,  $\text{int}(B^{global}) = \emptyset$  が成り立つ.  $q(t)$  を周期  $m$  の  $P_t$  の放物型周期点とすると,  $q(t) \in \Lambda_t$  であり,  $(P_t^m)'(q(t))$  は1の冪根である. 一方, 仮定  $H_P^{\mathbb{C}} \neq \emptyset$  より, それは  $t$  に関し一定でない. よって,  $a_n(t) \neq 0$  であり  $P_t$  は放物型周期点をもつという条件をみたす  $\mathbb{C}_t$  の点  $t$  の集合を  $\mathcal{P}$  とすると,  $\mathcal{P}$  は高々可算な集合である. 故に

$$\mathbb{C}_t \setminus (B^{global} \cup \mathcal{P})$$

は  $\mathbb{C}_t$  において稠密となる. Sullivan [20] の結果より

$$H_P^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_t \setminus (B^{global} \cup \mathcal{P} \cup \{t \in \mathbb{C}_t \mid a_n(t) = 0\}).$$

であるから, 予想2が成立し, 証明が完了する.

## 3 正則運動の構成

予想3について議論するために, 以下において  $\text{int}(B) \neq \emptyset$  を仮定する.

命題4より  $D' \subset \text{int}(B)$  であり  $D' \cap \bar{A} = \emptyset$  を満たす開円盤  $D'$  を取ることが出来る. このとき, 任意の  $t \in D'$  と  $m \geq 0$  に対し, 逆像  $P_t^{-m}(e(t))$  は  $P_t$  の臨界点を含まない.  $e: D \rightarrow \mathbb{C}_z$  は単葉なので,  $e(D')$  は開円板であり正則な逆写像

$$e^{-1}: e(D') \rightarrow D'$$



が定まる. 従って, 各  $z \in e(D')$  と  $m \geq 0$  に対し  $w$  に関する代数方程式;

$$P_{e^{-1}(z)}^m(w) = z$$

は  $n^m$  個の解を持つ. 固定された  $z \in e(D')$  に対し, 各解  $w$  は  $P_{e^{-1}(z)}^m : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  の臨界点でないから,

$$\frac{\partial}{\partial w} \{P_{e^{-1}(z)}^m(w) - z\} = (P_{e^{-1}(z)}^m)'(w) \neq 0$$

が成り立つ. 従って, 各解は互いに異なり, そしてまたそれらは,  $e(D')$  が単連結であることより,  $e(D')$  上の丁度  $n^m$  個の正則写像により表される. 混乱のない限り, その各々の正則写像を同じ記号

$$P_{e^{-1}}^{-m} : e(D') \rightarrow \mathbb{C}_z$$

でそれぞれ表す.  $P_{e^{-1}}^{-m}$  の微分は

$$(P_{e^{-1}}^{-m})'(z) = \frac{1 - \frac{\partial}{\partial t}(P_t^m)(P_{e^{-1}}^{-m}(z))|_{t=e^{-1}(z)}(e^{-1})'(z)}{(P_t^m)'(P_{e^{-1}}^{-m}(z))|_{t=e^{-1}(z)}},$$

となり, 従って  $P_{e^{-1}}^{-m}$  は一般に臨界点を持ち得ることに注意する.

すべての  $t \in D'$  に対し無限遠点  $\infty$  は  $P_t$  の超吸引固定点なので, 命題 5 より  $\{\Lambda_t \mid t \in D'\}$  は一様有界な集合族である. 故に, Montel の定理によって上で定めた正則写像全体

$$\mathcal{F} = \{P_{e^{-1}}^{-m} : e(D') \rightarrow \mathbb{C}_z \mid m \geq 0\}$$

は正規族となる.

$t' \in D'$  を 1 つ取って固定する.  $c(t')$  は  $\Lambda_{t'}$  の中の臨界点とする. ここで,  $c$  は  $\mathbb{C}_0 \rightarrow \mathbb{C}_t$  に対する  $D$  上の 1 つの切断の第 1 座標である. 命題 5 より点  $c(t')$  と有限集合  $P_{t'}^{-m}(e(t'))$  の間の距離 (最短距離) は,  $m \rightarrow \infty$  のとき, 0 に収束する. 従って,  $\mathcal{F}$  の部分族

$$\{P_{e^{-1}}^{-m_i} : e(D') \rightarrow \mathbb{C}_z \mid 0 < m_1 < m_2 < \dots\}$$

を選んで, それが  $Q(e(t')) = c(t')$  を満たす正則写像

$$Q : e(D') \rightarrow \mathbb{C}_z$$

に収束するよう出来る. このとき,  $D'$  上で

$$Q \circ e = c \tag{1}$$

が成り立つ。実際、もし成立しないとすると、 $Q \circ e - c$  は  $D'$  上で開写像で零点を持つ。従って、

$$P_{e^{-1}}^{-m_i} \circ e - c$$

もまた十分大きな  $m_i$  に対し  $D'$  上で零点を持つ。これは  $D' \cap A = \emptyset$  に反する。故に、関係式 (1) が  $D'$  上で成り立つ。関係式 (1) より、上の正則写像  $Q$  は単葉であり、また点  $t'$  において関係式 (1) が成り立つと仮定して、 $Q$  は  $\mathcal{F}$  の部分族の取り方に依存しないで定まる。

上と同様にして、各点  $z \in \Lambda_{t'}$  に対し、点  $z$  と有限集合  $P_{t'}^{-m}(e(t'))$  の距離は  $m \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束するので、 $Q_z(e(t')) = z$  を満たす正則写像

$$Q_z : e(D') \rightarrow \mathbb{C}_z$$

が  $\mathcal{F}$  の部分族を選ぶことにより定まる。更に、各  $Q_z$  は  $Q_z(e(t')) = z$  が成り立つとして、 $\mathcal{F}$  の部分族の選び方に依存せず定まる。

写像  $\mathcal{M}_{t'} : D' \times \Lambda_{t'} \rightarrow \mathbb{C}_z$  を

$$\mathcal{M}_{t'}(t, z) = Q_z(e(t)).$$

により定義する。このような  $\mathcal{M}_{t'}$  は正則運動と呼ばれる (cf. Mañé, Sad and Sullivan [13]). 構成より次が分かる；

(1)  $\{t'\} \times \Lambda_{t'}$  上で

$$\mathcal{M}_{t'}(t', z) = z$$

(2) すべての  $t \in D'$  に対し

$$\mathcal{M}_{t'}(t, \Lambda_{t'}) = \Lambda_t$$

(3)  $z_j \rightarrow z$  ならば  $Q_{z_j} \rightarrow Q_z$

(4)  $\mathcal{M}_{t'}$  は  $D'$  上で  $P$  と両立する、すなわち、すべての  $t \in D'$  と  $z \in \Lambda_{t'}$  に対し

$$P_t \circ \mathcal{M}_{t'}(t, z) = \mathcal{M}_{t'}(t, P_{t'}(z))$$

上の性質 (4) から、 $P_t$  と  $P_{t'}$  の Julia 集合へのそれぞれの制限は位相共役であることが得られる。また、上の性質 (3) から次が得られる。

**命題 7**  $Q_z$  が定値写像となる点  $z$  の全体は  $\Lambda_{t'}$  の閉集合を成す。

以下において、 $E$  により次の条件の少なくとも 1 つを満たす  $\mathbb{C}_t$  の点  $t$  の集合を表すことにする；

(i)  $a_n(t) = 0$

- (ii)  $t$  は  $\mathcal{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}_t$  あるいは  $\mathcal{C}_0 \rightarrow \mathbb{C}_t$  に対する分岐点
- (iii)  $(z, t) \in \mathcal{R}_0$  を満たす  $\mathcal{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}_z$  に対する分岐点  $z$  が存在する
- (iv)  $(z, t) \in \mathcal{C}_0$  を満たす  $\mathcal{C}_0 \rightarrow \mathbb{C}_z$  に対する分岐点  $z$  が存在する

$E$  は有限集合であることに注意する.  $D$  の選び方より  $D \cap E = \emptyset$  が成り立つ. 従って,  $D' \cap E = \emptyset$  である.  $\mathbb{C}_t \setminus E$  の領域  $D_{max}$  を

$$\{t \in \mathbb{C}_t \setminus E \mid \Lambda_t \text{ は } P_t \text{ の臨界点を少なくとも 1 つ含む}\}$$

の内部の  $D'$  を含む連結成分として定義する. このとき,  $\mathcal{M}_{t'}$  を解析接続して極大な正則運動

$$\mathcal{M} : \widetilde{D}_{max} \times \Lambda_{t'} \rightarrow \mathbb{C}_z$$

が得られる. ここで,  $\widetilde{D}_{max}$  は  $D_{max}$  の普遍被覆空間である.

予想 3 についてさらに議論を進めるためには,  $H_P^{\mathbb{C}} \neq \emptyset$  を仮定する必要がある. そのとき,  $D_{max} \cap H_P^{\mathbb{C}} = \emptyset$  なので, 境界  $\partial D_{max}$  は  $\mathbb{C}_t$  を 2 つの領域に分ける. 1 つは  $D_{max}$  自身であり, 他の 1 つは  $H_P^{\mathbb{C}}$  を含む. 以後の議論については, 機会を改めて報告する.

## Acknowledgements

This work was supported by Grant-in-Aid for Scientific Researches (C) (Grant No. 18K03418) from the Japan Society for the Promotion of Science.

## 参考文献

- [1] N. Aoki and K. Hiraide, Topological Theory of Dynamical Systems: Recent Advances, North-Holland Mathematical Library 52, Elsevier, 1994.
- [2] P. Blanchard, Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, Bull. Amer. Math. Soc. 11 (1984), 85–141.
- [3] R. Bowen, Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms, Lecture Notes in Mathematics 470, Springer-Verlag, 1975.

- [4] H. Cartan, Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables, Addison-Wesley, 1973.
- [5] A. Douady and J. Hubbard, Itération des polynômes quadratiques complexes, C. R. Acad. Sci. Paris 294 (1982), 123–126.
- [6] \_\_\_\_\_, Étude dynamique des polynômes complexes. Partie I. (French), Publications Mathématiques d’Orsay 84-2, 1984; Partie II. (French) With the collaboration of P. Lavaurs, Tan Lei and P. Sentenac, Publications Mathématiques d’Orsay, 85-4, 1985.
- [7] P. Fatou, Sur les équations fonctionnelles, Bull. Soc. Math. France, Paris 47 (1919), 161–271 , and 48 (1920), 33–94, 208–314.
- [8] J. Graczyk and G. Świątek, Generic hyperbolicity in the logistic family, Ann. Math. 146 (1997), 1–52.
- [9] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, 1977.
- [10] G. Julia, Memoire sur l’itération des fonctions rationnelles, J. Math. Pure Appl. 8 (1918), 47–245.
- [11] O. Kozlovski, W. Shen and S. van Strien, Density of hyperbolicity in dimension one, Ann. Math. 166 (2007), 145–182.
- [12] M. Lyubich, Dynamics of quadratic polynomials I, II, Acta Math, 178 (1997), 185–247, 247–297.
- [13] R. Māné, P. Sad and D. Sullivan, On the dynamics of rational maps, Ann. Sci. École Norm Sup. Paris (4) 16 (1983), 193–217.
- [14] J. Mather, Stability of  $C^\infty$  mappings: The division theorem, Ann. of Math. (2), 87 (1969), 254–291.
- [15] C. McMullen, Complex Dynamics and Renormalization, Annals of Mathematics Studies 135, Princeton University Press, 1994.
- [16] W. de Melo and S. van Strien, One Dimensional Dynamics, Springer-Verlag, 1993.

- [17] J. Milnor, Dynamics in One Complex Variable, Annals of Mathematics Studies 160, Princeton University Press, 2006.
- [18] H. Poincaré, Sur une classe nouvelle de transcendentes, Journ. de Math. 6 (1890), 313-365.
- [19] S. Smale, Mathematical problems for the next century, Mathematical Intelligencer. 20 (2) (1998), 7–15 ; In Mathematics: frontiers and perspectives, Amer. Math. Soc., 271–294, 2000.
- [20] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains, Ann. Math. 122 (1985), 401–418.