

A型結晶基底のテンソル積分解とK-hive

The tensor product decomposition of crystal bases of type A and K-hives

東邦大学大学院理学研究科 成澤 翔大

SHOTA NARISAWA

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, TOHO UNIVERSITY *1

東邦大学理学部 白柳 潔

KIYOSHI SHIRAYANAGI

FACULTY OF SCIENCE, TOHO UNIVERSITY *2

Abstract

We provide a new method of the tensor product decomposition of crystal bases of type A_{n-1} using a combinatorial object called K-hives. To provide this method, we define some operators on K-hives. Then it allows us to understand the decomposition method graphically. Since this problem is understood by Young tableaux combinatorics, we can obtain an operation for decomposition on K-hives as an analogy to the insertion algorithm in Young tableaux.

1 はじめに

量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ とは、リー環 \mathfrak{g} の包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の生成元と基本関係式をパラメータ q で変形することで得られる非可換かつ非余可換な Hopf 代数である。これは神保道夫と V.G.Drinfeld によって独立に導入された [2][4]。量子展開環のあるクラスの加群は、結晶基底という $q \rightarrow 0$ の極限における基底をもち、これにより表現論の問題の多くを組合せ論の問題に落とすことができる [5][6]。例えば、古典リー環に対応する量子展開環の結晶基底に対しては、ヤング盤による実現が知られている。特に A_{n-1} 型の場合は、半標準盤で実現され、加群のテンソル積分解などが半標準盤の組合せ論に帰着される [7]。量子展開環の表現論や結晶基底の理論については、例えば [1][3] を参照されたい。

一方、近年 A.Knutson と T.Tao によって hive という組合せ論的な図形が導入された [8]。これは三角形の頂点に実数を配置した図形であり、適当な条件を課した K-hive は半標準盤と一対一に対応することがわかっている。その意味で hive は半標準盤の一般化である。また hive は様々なデータ形式と高い対称性をもち、ヤング盤による議論の見通しを良くするなどの利点がある [10]。

[9] では A_{n-1} 型の場合に、支配的ウェイト λ に対して定まる K-hive の集合 $\mathbb{H}(\lambda)$ に結晶基底の構造を導入した。また特に、これが最高ウェイト λ の既約最高ウェイト加群の結晶基底 $B(\lambda)$ と同型になることを述

*1 7520002n@st.toho-u.jp

*2 kiyoshi.shirayanagi@is.sci.toho-u.ac.jp

べた。本稿では、この実現を用いて $\mathbb{H}(\lambda) \otimes \mathbb{H}(\mu)$ のテンソル積分解を与える。ここで量子展開環の表現論と $\mathbb{H}(\lambda)$ が $B(\lambda)$ の実現になっていることから

$$\mathbb{H}(\lambda) \otimes \mathbb{H}(\mu) \cong \bigoplus_{\nu} \mathbb{H}(\nu)$$

が成り立つことに注意する。テンソル積分解を与える一つの方法は、 $\mathbb{H}(\lambda) \otimes \mathbb{H}(\mu)$ の元で $\mathbb{H}(\nu)$ の最高ウェイトベクトルになっているものを特定することである。もう一つの方法は、具体的に上の同型写像を構成することである。

本稿の構成は次の通りである。2節で A 型量子展開環と結晶基底を必要な範囲で復習する。次に3節で K-hive と [9] で構成した結晶構造を紹介する。最後に4節で K-hive 結晶のテンソル積分解を与える。

2 A_{n-1} 型量子展開環とその結晶基底

ここでは A_{n-1} 型リー環とその基礎事項について復習し、 A_{n-1} 型量子展開環を定義する。その後で、半標準盤による結晶基底のテンソル積分解の記述を目標に、結晶基底の理論の基本的な部分について述べる。以下基礎体を \mathbb{C} とし、結合代数は単位的であるとする。

以下では \mathfrak{g} で A_{n-1} 型リー環 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ を表す。 $I = \{1, 2, \dots, n-1\}$ とする。 $\epsilon_i (i \in I)$ を \mathbb{R}^n の標準基底とする。 $k \in I$ に対して、 $\Lambda_k = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_k$ とし基本ウェイトとよぶ。 $P = \bigoplus_{k \in I} \mathbb{Z}\Lambda_k$ を整ウェイト格子、 $P^+ = \bigoplus_{k \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\Lambda_k$ を支配的ウェイト格子とよぶ。整ウェイト格子、支配的ウェイト格子の元をそれぞれ整ウェイト、支配的ウェイトとよぶ。 $\Delta_+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j\}_{i < j}$, $\Delta_- = -\Delta_+$ とする。 $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$ をルート系とよび、 Δ の元をルートとよぶ。特に $i \in I$ に対し、 $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \in \Delta$ を単純ルートとよぶ。

リー環の表現論では、リー環 \mathfrak{g} が埋め込まれた結合代数である包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の表現論を考えることが多い。包絡環は非可換かつ余可換な Hopf 代数であり、生成元と基本関係式による表示を持つ。量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ とは、この包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の q -量子化であり、非可換かつ非余可換な Hopf 代数の構造と生成元と基本関係式による表示をもつ。

定義 1

$E_i, F_i, K_i^{\pm 1} (i \in I)$ を生成元とし、以下を基本関係式とする $\mathbb{C}(q)$ 上の結合代数を A_{n-1} 型量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ という。

$$\begin{aligned} K_i K_j - K_j K_i &= 0, & K_i K_i^{-1} &= K_i^{-1} K_i = 1, \\ K_i E_j K_i^{-1} &= q^{\alpha_i(h)} E_j, & K_i F_j K_i^{-1} &= q^{-\alpha_i(h)} F_j, \\ E_i F_j - F_j E_i &= \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}, \\ E_i^2 E_j - (q + q^{-1}) E_i E_j E_i + E_j E_i^2 &= 0 \quad \text{if } |i - j| = 1, \\ F_i^2 F_j - (q + q^{-1}) F_i F_j F_i + F_j F_i^2 &= 0 \quad \text{if } |i - j| = 1, \\ E_i E_j - E_j E_i &= F_i F_j - F_j F_i = 0 \quad \text{if } |i - j| > 1. \end{aligned}$$

$q \rightarrow 1$ の極限を考えると量子展開環は包絡環に一致する。特に q が 1 の冪根でないとき、結晶基底が存在する加群のクラスに対しては、量子展開環の表現論は包絡環の表現論とほとんど平行に議論できることが知られている。例えば $V(\lambda)$ を最高ウェイト $\lambda \in P^+$ の最高ウェイト加群とする。このとき、任意の有限次元既約 $U_q(\mathfrak{g})$ -加群は $V(\lambda) (\lambda \in P^+)$ と同型になる。また完全可約性が成り立つ。

一方、 $q \rightarrow 0$ の極限では表現論の多くの部分に対し組合せ論的な記述が存在する。以下これをもう少し正確に述べる。 $U_q(\mathfrak{g})$ のあるクラスの加群は結晶基底という $q \rightarrow 0$ における良い基底をもつ。これはその元と

$U_q(\mathfrak{g})$ の生成元 F_i, E_i の $q \rightarrow 0$ における作用によって、色付き有向グラフとして表せる。これを結晶グラフとよび、これを用いることで表現論上の計算を組合せ論に落とすことができる。ここでは結晶基底の組合せ論的な性質のみを抽出した結晶を考える。

定義 2

集合 B に対し、次を満たす写像 $\text{wt} : B \rightarrow P$, $e_i, f_i : B \cup \{0\} \rightarrow B \cup \{0\}$, $\varepsilon_i, \varphi_i : B \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ ($i \in I$) が存在するとき、 B を $U_q(\mathfrak{g})$ -結晶または A_{n-1} 型結晶とよぶ。 $b \in B$ とする。

1. $\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \text{wt}(b)(h_i)$.
2. $\text{wt}(f_i b) = \text{wt}(b) - \alpha_i$ if $f_i b \in B$.
3. $\text{wt}(e_i b) = \text{wt}(b) + \alpha_i$ if $e_i b \in B$.
4. $\varepsilon_i(f_i b) = \varepsilon_i(b) + 1$, $\varphi_i(f_i b) = \varphi_i(b) - 1$ if $f_i b \in B$.
5. $\varepsilon_i(e_i b) = \varepsilon_i(b) - 1$, $\varphi_i(e_i b) = \varphi_i(b) + 1$ if $e_i b \in B$.
6. $f_i b = b' \iff b = e_i b'$ for $b, b' \in B, i \in I$.
7. $\varphi_i(b) = -\infty \implies f_i b = e_i b = 0$ for $b \in B$.

$U_q(\mathfrak{g})$ -結晶 B の元 b を頂点とし、辺 $b \xrightarrow{i} b'$ を $f_i b = b'$ で定義した色付有向グラフを結晶グラフとよぶ。定義 2 (6) より $b \xrightarrow{i} b'$ のとき、 $e_i b' = b$ が成り立つことに注意する。任意の結晶基底は結晶の定義を満たすから結晶として議論できる。結晶の同型は次で定義する。

定義 3

B_1, B_2 を $U_q(\mathfrak{g})$ -結晶とする。 B_1 から B_2 への射 $\Psi : B_1 \rightarrow B_2$ とは、写像 $\Psi : B_1 \cup \{0\} \rightarrow B_2 \cup \{0\}$ で

1. $\text{wt}(\Psi(b)) = \text{wt}(b)$, $\varepsilon_i(\Psi(b)) = \varepsilon_i(b)$, $\varphi_i(\Psi(b)) = \varphi_i(b)$ if $b \in B_1, \Psi(b) \in B_2$.
2. $f_i \Psi(b) = \Psi(f_i b)$, $e_i \Psi(b) = \Psi(e_i b)$ if $\Psi(b), \Psi(e_i b), \Psi(f_i b) \in B_2$ for $b \in B_1$.
3. $\Psi(0) = 0$.

を満たすものをいう。射 $\Psi : B_1 \rightarrow B_2$ に対し、写像 $\Psi : B_1 \cup \{0\} \rightarrow B_2 \cup \{0\}$ が単射のとき埋め込み、全単射のとき同型射とよぶ。同型射 $\Psi : B_1 \rightarrow B_2$ が存在するとき、 B_1 と B_2 は $U_q(\mathfrak{g})$ -結晶として同型であるといい、 $B_1 \cong B_2$ とかく。

結晶のテンソル積は次のように定義する。

定義 4

B_1, B_2 を $U_q(\mathfrak{g})$ -結晶とする。 B_1 と B_2 のテンソル積 $B_1 \otimes B_2$ を以下の結晶構造をもつ集合 $B_1 \times B_2$ として定義する。

1. $\text{wt}(b_1 \otimes b_2) = \text{wt}(b_1) + \text{wt}(b_2)$.
2. $\varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) = \max(\varepsilon_i(b_1), \varepsilon_i(b_2) - \text{wt}(b_1)(h_i))$.
3. $\varphi_i(b_1 \otimes b_2) = \max(\varphi_i(b_2), \varphi_i(b_1) + \text{wt}(b_2)(h_i))$.
4. $e_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} e_i b_1 \otimes b_2 & \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes e_i b_2 & \varphi_i(b_1) < \varepsilon_i(b_2). \end{cases}$

$$5. f_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} f_i b_1 \otimes b_2 & \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes f_i b_2 & \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2). \end{cases}$$

ここで基本的な結晶基底の例として, $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ のベクトル表現の結晶基底を考える.

例 1

$U_q(\mathfrak{sl}_2) = \langle E, F, K^{\pm 1} \rangle$ のベクトル表現 $V = \mathbb{C}(q)v_1 \otimes \mathbb{C}(q)v_2$ を考える. V の $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -加群の作用は次で与えられる.

$$\begin{aligned} Ev_1 &= 0, & Fv_1 &= v_2, & Kv_1 &= qv_1, \\ Ev_2 &= v_1, & Fv_2 &= 0, & Kv_2 &= q^{-1}v_2. \end{aligned}$$

このとき, $B = \{b_1, b_2\}$ を

$$\begin{aligned} eb_1 &= 0, & fb_1 &= b_2, \\ eb_2 &= b_1, & fb_2 &= 0 \end{aligned}$$

で定めると, B は V の結晶基底と同型な結晶になる. この結晶グラフは次の通り.

$$b_1 \xrightarrow{1} b_2.$$

さてここで, 表現論の計算を組合せ論に落とす例として例 1 のベクトル表現のテンソル積分解を考えよう.

例 2

V を $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ のベクトル表現, B を V の結晶とする. $B \otimes B$ の結晶グラフは以下のようなになる.

$$\begin{array}{ccc} b_1 \otimes b_1 & \xrightarrow{1} & b_2 \otimes b_1 \\ & & \downarrow 1 \\ b_1 \otimes b_2 & & b_2 \otimes b_2 \end{array}$$

上のグラフから $B \otimes B$ は二つの連結成分に分解できる.

$$B \otimes B \cong \{b_1 \otimes b_1, b_2 \otimes b_1, b_2 \otimes b_2\} \sqcup \{b_1 \otimes b_2\}.$$

また $\text{wt}(b_1 \otimes b_1) = 2\Lambda_1$, $\text{wt}(b_1 \otimes b_2) = \Lambda_2$ が成り立つ. このとき

$$V \otimes V \cong V(2\Lambda_1) \oplus V(\Lambda_2)$$

が成り立つ.

例 2 では, ベクトル表現のテンソル積分解が結晶グラフの連結成分への分解と対応した. これは加群のテンソル積の直和分解を求める表現論の問題が, グラフの連結成分を求める組合せ論の問題に落ちたことを意味する.

さらに結晶基底は半標準盤の集合として実現され, テンソル積分解に対しても半標準盤による記述をもつ: $V(\lambda)$ ($\lambda \in P^+$) を最高ウェイト λ の最高ウェイト加群, $B(\lambda)$ を $V(\lambda)$ の結晶基底とすると, $B(\lambda)$ は型 λ の半標準盤全体 $B(Y)$ で実現される. ここで Y は型 λ のヤング図形. $B(\lambda)$ の最高ウェイトベクトル b_λ は Yamanouchi tableau と対応する.

$j \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対し,

$$Y[j] = \begin{cases} (\lambda_1, \dots, \lambda_j + 1, \dots, \lambda_n) & j \neq n, \\ (\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_j - 1, \dots, \lambda_n - 1) & j = n \end{cases}$$

とする. $Y[j]$ がヤング図形でないとき, $B(Y[j]) = \emptyset$ とする. $T \in B(Y)$ は 1 行目を右から左へ読み, 次に 2 行目を右から左へ読み, ... という操作を続けることで語 $j_1 \cdots j_m$ と対応させることができることに注意する. このとき次が成り立つ.

命題 5

$\lambda, \mu \in P^+$, Y を型 λ のヤング図形, Z を型 μ のヤング図形とする, $Y[j_1, \dots, j_m] = Y[j_1] \cdots [j_m]$ とする.

$$B(Y) \otimes B(Z) \cong \bigoplus_{T=j_1 \cdots j_m \in B(Z)} B(Y[j_1, \dots, j_m]).$$

3 A 型結晶基底と K-hive

hive とは A.Knutson と T.Tao により導入された組合せ論の対象である [8]. これは正三角形上に実数を配置した図形で, 三つの表示形式をもつ [10]. 本稿では, 主に hive にいくつかの条件を課した K-hive を扱い, 特に gradient representation という形式を採用する. また K-hive は半標準盤と一対一に対応する. よってこの対応から, K-hive の集合には A 型結晶の構造が誘導されるが, この対応とは独立に結晶構造を与えることもできる [9]. ここでは, K-hive を定義し, そのあとで結晶構造を具体的に与える.

定義 6

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{Z}^n$ とする. $(U_{ij})_{1 \leq i < j \leq n} \in \mathbb{Z}^{n(n-1)/2}$ とする. サイズ n の **integer hive graph** とは 以下を満たす組 $(\alpha, \beta, \gamma, (U_{ij})_{1 \leq i < j \leq n})$ のことをいう.

$$\beta_k = (\gamma_k + \sum_{i=1}^{k-1} U_{ik}) + (\alpha_k - \sum_{j=k+1}^n U_{kj}). \tag{1}$$

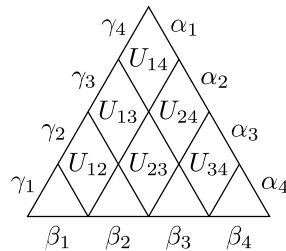
以下 $(U_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$ を単に $(U_{ij})_{i < j}$ とかく. integer hive graph の集合を次のように定義する.

$$G^{(n)}(\lambda, \mu, 0) = \{H = (\lambda, \mu, 0, (U_{ij})_{i < j}) \mid H \text{ is an integer hive graph of size } n\},$$

$$G^{(n)}(\lambda) = \bigsqcup_{\mu} G^{(n)}(\lambda, \mu, 0).$$

混合の恐れがないときは $G^{(n)}(\lambda)$ を $G(\lambda)$ と表す.

integer hive graph は正三角形のグラフとして表示する. 例えば $n = 4$ の場合は次のようになる.



$G = (\alpha, \beta, 0, (U_{ij})_{i < j}) \in G(\lambda)$ に対し, $\text{LD}_j = \{\beta_j, \gamma_j\} \cup \{U_{ij} \mid i < j\}$ を left j -th diagonal, $\text{RD}_i = \{\beta_i, \alpha_i\} \cup \{U_{ij} \mid i < j\}$ を right i -th diagonal とよぶ. $\alpha_i, \beta_i (i \in I \cup \{n\})$, $U_{ij} (1 \leq i < j \leq n)$ の列 (g_1, \dots, g_s) を考える. $g_k \in \text{LD}_{j_k} \cup \text{RD}_{i_k}$ とする. $g_1, g_s \in \{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \mid i \in I \cup \{n\}\}$ また $k = 2, \dots, s$ に対し $g_k \in \text{LD}_{j_{k-1}} \cup \text{RD}_{i_{k-1}}$ が成り立つとき, (g_1, \dots, g_s) を G 上のパスとよぶ.

$\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ は整ウエイトとみなせることに注意する. 特に $\alpha = (\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n)$ のとき, α は支配的ウエイトとみなせる.

定義 7

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ とする. $1 \leq i < j \leq n$ に対し, $L_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} U_{ik} - \sum_{k=1}^j U_{i+1,k}$ とする. integer hive graph $H = (\alpha, \beta, \gamma, (U_{ij})_{i < j})$ が次を満たすとき H を **K-hive** とよぶ: $\alpha \in P^+$, $\beta \in P$, $\gamma = 0$, $U_{ij}, L_{ij} \geq 0 (1 \leq i < j \leq n)$, $\beta_i \geq \sum_{k=1}^{i-1} U_{ki} (i \in I \cup \{n\})$. K-hive の集合を次のように表す.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(n)}(\alpha, \beta, 0) &= \{H \in G(\alpha, \beta, 0) \mid H \text{ is a K-hive}\}, \\ \mathbb{H}^{(n)}(\alpha) &= \bigcup_{\beta \in P} \mathcal{H}^{(n)}(\alpha, \beta, 0). \end{aligned}$$

混合の恐れがないときは $\mathbb{H}^{(n)}(\alpha)$ を $\mathbb{H}(\alpha)$ とかく.

$\lambda \in P^+$ に対し, $\mathbb{H}(\lambda)$ には次の方法で A 型結晶の構造が入る.

命題 8 ([9])

$\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i \epsilon_i \in P^+$ とする. $H \in \mathbb{H}(\lambda)$ に対し, $\text{wt}, f_j, e_j, \varphi_j, \varepsilon_j (j \in I)$ を次のように定義すると $\mathbb{H}(\lambda)$ は A 型結晶になる. $j \in I$ を fix する.

1. $\text{wt}(H) = \sum_{i \in I} (\mu_i - \mu_{i+1}) \Lambda_i$.
2. $k \in \{1, 2, \dots, j\}$ に対し, $\varphi_j^{(k)}(H) = \max\{\varphi_j^{(k-1)}(H) + U_{k,j} - U_{k+1,j+1}, 0\}$ とする. $\varphi_j^{(0)} = 0$ とする. このとき $\varphi_j(H) = \varphi_j^{(j)}(H)$ とする.
3. $k \in \{1, 2, \dots, j\}$ に対し, $\varepsilon_j^{(k)}(H) = \max\{\varepsilon_j^{(k-1)}(H) + U_{n+1-k,j+1} - U_{n-k,j}, 0\}$ とする. $\varepsilon_j^{(0)} = 0$ とする. このとき $\varepsilon_j(H) = \varepsilon_j^{(n-j)}(H)$ とする.
4. $\varphi_j(H) = 0$ のとき $f_j H = 0$ とする. $\varphi_j(H) \neq 0$ のとき,

$$k' = \min\{k \in I \cup \{n\} \mid \forall l \geq k, \varphi_j^{(l)}(H) \geq \varphi_j^{(k)}(H) > 0\}.$$

とし, $f_j H = (\lambda, \mu', 0, (U'_{kl})_{k < l})$ と定義する. ここで

$$\begin{aligned} \mu' &= \sum_{k \neq j, j+1} \mu_k \epsilon_k + (\mu_j - 1) \epsilon_j + (\mu_{j+1} + 1) \epsilon_{j+1}, \\ U'_{kl} &= \begin{cases} U_{kl} - 1 & \text{if } k = k', l = j, \\ U_{kl} + 1 & \text{if } k = k', l = j + 1, \\ U_{kl} & \text{else.} \end{cases} \end{aligned}$$

とする.

5. $\varepsilon_j(H) = 0$ のとき $e_j H = 0$ とする. $\varepsilon_j(H) \neq 0$ のとき,

$$k' = \min\{k \in I \cup \{n\} \mid \forall l \geq k, \varepsilon_j^{(l)}(H) \geq \varepsilon_j^{(k)}(H) > 0\}.$$

とし, $e_j H = (\lambda, \mu', 0, (U'_{kl})_{k<l})$ と定義する. ここで

$$\mu' = \sum_{k \neq j, j+1} \mu_k \epsilon_k + (\mu_j + 1)\epsilon_j + (\mu_{j+1} - 1)\epsilon_{j+1},$$

$$U'_{kl} = \begin{cases} U_{kl} + 1 & \text{if } k = n + 1 - k', l = j, \\ U_{kl} - 1 & \text{if } k = n + 1 - k', l = j + 1, \\ U_{kl} & \text{else.} \end{cases}$$

とする.

特に $\mathbb{H}(\lambda)$ は既約最高ウェイト加群の結晶基底の実現になっている.

命題 9 ([9])

$\lambda \in P^+$ とする. $H_\lambda = (\lambda, \lambda, 0, (0)_{i<j}) \in \mathbb{H}(\lambda)$ とする. このとき $\Phi: \mathbb{H}(\lambda) \rightarrow B(\lambda)$ を $\Phi(H_\lambda) = b_\lambda$ で定義すると Φ は結晶の同型写像となる.

4 K-hive 結晶のテンソル積分解

4.1 分解ルール

さてここで $\mathbb{H}(\lambda) \otimes \mathbb{H}(\mu)$ の結晶としての直和分解を考えよう. 命題 9 と完全可約性から次が成り立つ.

$$\mathbb{H}(\lambda) \otimes \mathbb{H}(\mu) \cong \bigoplus_{\nu} \mathbb{H}(\nu).$$

したがって, この分解を得るためには $\mathbb{H}(\lambda) \otimes \mathbb{H}(\mu)$ の元のなかで最高ウェイトベクトルになるものを探せば良い. まず $G(\lambda)$ 上の操作をいくつか定義する.

定義 10

$H = (\lambda, \mu, 0, (U_{kl})_{k<l}) \in G(\lambda)$ に対し,

$$i_0 := \max\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}, \quad j_0 := \max\{j \in I \mid U_{i_0 j} \neq 0\}$$

とする. このとき, $\sigma(H) = (\nu, \xi, 0, (V_{kl})_{k<l})$ を

$$\nu = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i_0} - 1, \dots, \lambda_n),$$

$$\xi = (\mu_1, \dots, \mu_{j_0} - 1, \dots, \mu_{n-1}),$$

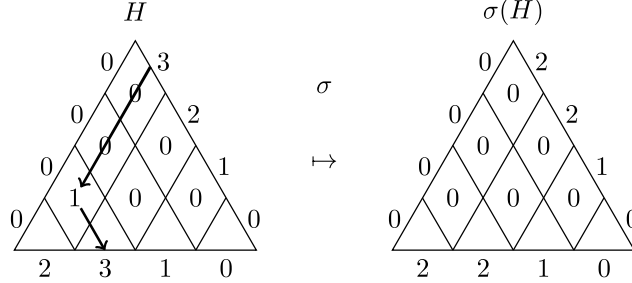
$$V_{kl} = \begin{cases} U_{kl} - 1 & k = i_0, j = j_0, \\ U_{kl} & \text{otherwise} \end{cases}$$

として定める. また $j_{\sigma(H)} = j_0$ とする.

i_0, j_0 の取り方から $\sigma(H) \in G(\lambda)$ がわかる. この作用は次の例のようにパスを用いた操作として考えることができる.

例 3

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ とし, $H \in \mathbb{H}((3, 2, 1, 0))$ を以下のように取る. λ_{i_0} から始めて *right i_0 -th diagonal* を U_{i_0, j_0} まで下り, そこから *left j_0 -th diagonal* を μ_{j_0} まで下る H 上のパスを考える. σ はこのパスで指定された $\lambda_{i_0}, U_{i_0, j_0}, \mu_0$ を 1 減らす作用として理解できる.



定義 11

$H = (\lambda, \mu, 0, (U_{ij})_{i < j}) \in \mathbb{H}(\lambda)$ とする. $j \in I$ を fix する. $\tau_j(H) = (\nu, \xi, 0, (V_{kl})_{k < l})$ を次で定める.

$$(\nu, \xi) = \begin{cases} ((\lambda_1, \dots, \lambda_j + 1, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \dots, \mu_j + 1, \dots, \mu_n)) & j \neq n, \\ ((\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_n - 1), (\mu_1 - 1, \dots, \mu_n - 1)) & j = n, \end{cases}$$

$$V_{kl} = U_{kl} \quad (1 \leq k < l \leq n).$$

定義から $\tau_j(H) \in G(\nu)$ が成り立つ. この操作がヤング図形 Y に対する操作 $Y[j]$ と類似していることに注意する.

まずいくつかの計算で次の特別な場合についての分解ルールを得る.

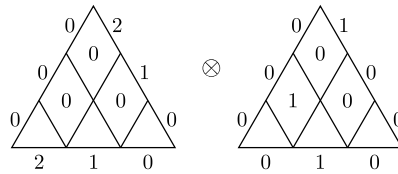
補題 12

$H \otimes K \in \mathbb{H}(\lambda) \otimes \mathbb{H}(\Lambda_1)$ が最高ウェイトベクトルであることは, $H = H_\lambda$ かつある $\nu \in P^+$ が存在して $\tau_{j_{\sigma(H)}}(K) \in \mathbb{H}(\nu)$ が成り立つことと同値.

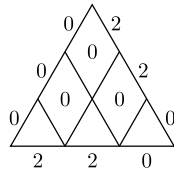
定義より一般に $\tau_j(H) \in G(\nu)$ だが, σ の K への作用に依存した添字 $j_{\sigma(K)}$ に対して $\tau_{j_{\sigma(K)}}(H) \in \mathbb{H}(\nu)$ となると $H \otimes K$ は最高ウェイトベクトルになる. この条件は $Y[j]$ がヤング図形でないとき $B(Y[j]) = \emptyset$ とみなすことと対応している.

例 4

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ とし, $H \otimes K \in \mathbb{H}((2, 1, 0)) \otimes \mathbb{H}((1, 0, 0))$ を以下のように取る.



定義より $H = H_{(2,1,0)}$, また $j_{\sigma(K)} = 2$. このとき $\tau_2(H)$ は以下のようなになる.



簡単な計算で $\tau_2(H) \in \mathbb{H}((2, 2, 0))$ がわかる. よって $H \otimes K$ は最高ウェイトベクトル.

ヤング盤を語に対応させる方法の類似を考えることで, $H \in \mathbb{H}(\lambda)$ の $\mathbb{H}(\Lambda_1)^{\otimes N}$ への埋め込みを得る. この埋め込みにより, 補題 12 を繰り返し適用することで一般の場合がわかる.

定理 13

$H_1 \in \mathbb{H}(\lambda), H_2 \in \mathbb{H}(\mu)$ とする. 上の埋め込みで $H_2 \cong H_{21} \otimes \cdots \otimes H_{2N} \in \mathbb{H}(\Lambda_1)^{\otimes N}$ とみなす. このとき, $H_1 \otimes H_2$ が最高ウェイトベクトルであることは, $H_1 = H_\lambda$ かつ任意の $k = 1, \dots, N$ に対して $\nu \in P^+$ が存在して $\tau_{j\sigma(H_{2k})} \cdots \tau_{j\sigma(H_{21})}(H_1) \in \mathbb{H}(\nu)$ が成り立つことと同値.

4.2 分解写像

次に $\mathbb{H}(\lambda) \otimes \mathbb{H}(\mu)$ から $\bigoplus_\nu \mathbb{H}(\nu)$ への具体的な分解写像を構成しよう. 再びいくつか K-hive 上の操作を定義する.

定義 14

$H = (\lambda, \mu, 0, (U_{ij})_{i < j}) \in \mathbb{H}(\lambda)$ に対し, $i_0 = \max\{i \in I \cup \{n\} \mid \lambda_i \neq 0\}$, $j_0 = \min\{j \in I \cup \{n\} \mid U_{i_0 j} \neq 0\}$ とする. このとき $\iota(H) = (\nu, \xi, 0, (V_{ij})_{i < j})$ を次のように定める.

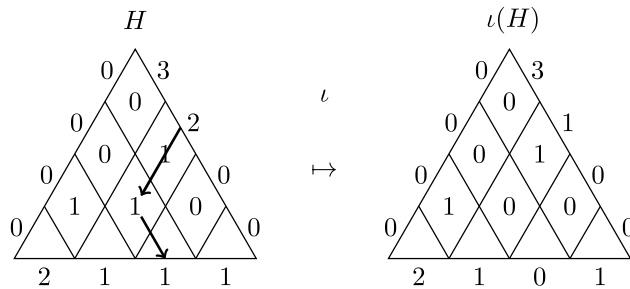
$$\begin{aligned} \nu &= (\lambda_1, \dots, \lambda_{i_0} - 1, \dots, \lambda_n), \\ \xi &= (\mu_1, \dots, \mu_{j_0} - 1, \dots, \mu_n), \\ V_{ij} &= \begin{cases} U_{ij} - 1 & i = i_0, j = j_0, \\ U_{ij} & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

また $j_{\iota(H)} = j_0$ とする.

構成から $\iota(H) \in \mathbb{H}(\nu)$ が計算によりわかる.

例 5

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$, $H \in \mathbb{H}((3, 2, 1, 0))$ を以下のようにとる. λ_k から始めて. right k -th diagonal を $U_{kl} \neq 0$ となる最小の要素まで進み, 次に left l -th diagonal を μ_l まで進むパスを考える. ι はこのパスで指定された λ_k, U_{kl}, μ_l を 1 減らす作用と理解できる.



次に K-hive 上のパスを定義し, それを用いてヤング盤における insertion アルゴリズムの類似を考える.

定義 15

$H = (\lambda, \mu, 0, (U_{ij})_{i < j}) \in \mathbb{H}(\lambda)$ とする. $a \in I$ を fix する. $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$p_{a,m} \in \{\lambda_k, \mu_k \mid k \in I \cup \{n\}\} \cup \{U_{kl} \mid 1 \leq k < l \leq n\}$$

を次のように定義する.

$$p_{a,0} = \mu_a,$$

$$p_{a,m} := U_{i_m, j_m} = \begin{cases} U_{1a} & m = 1, \\ U_{i_{m-1}+1, j_{m-1}} & m \in 2\mathbb{Z}_{>0} + 1, \\ U_{i_{m-1}, \min\{j \in I_{>j_{m-1}} \mid U_{i_{m-1}, j} \neq 0\}} & m \in 2\mathbb{Z}_{>0}. \end{cases}$$

$N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $\{j \in I_{>j_{N-1}} \mid U_{i_{N-1}, j} \neq 0\}$ が空集合となる時, $p_{a,N} = \lambda_{i_{N-1}}$ とし, $m > N$ に対しては $p_{a,m}$ は undefined とする. このとき $p_i(H)$ を

$$p_a(H) = (p_{a,m})_{m=1, \dots, N}$$

と定義する.

定義 16

$H = (\lambda, \mu, 0, (U_{ij})_{i < j}) \in \mathbb{H}(\lambda)$ と $a \in I$ に対し $p_a(H) = (p_{a,m})_{m=1, \dots, N}$ とする. $\rho_a(H) = (\nu, \xi, 0, (V_{kl})_{k < l})$ を次で定義する.

$$\nu = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i_N} + 1, \dots, \lambda_n),$$

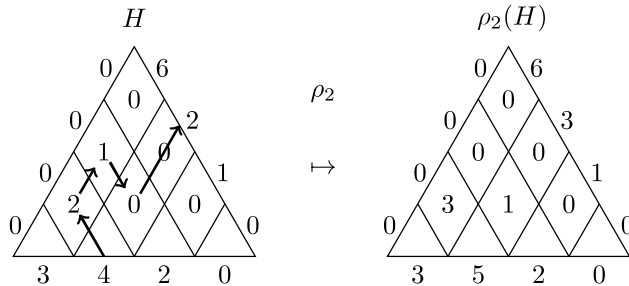
$$\xi = (\mu_1, \dots, \mu_a + 1, \dots, \mu_n),$$

$$V_{kl} = \begin{cases} U_{kl} + 1 & \exists m \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1, p_{a,m} = U_{kl}, \\ U_{kl} - 1 & \exists m \in 2\mathbb{Z}_{>0}, p_{a,m} = U_{kl}, \\ U_{kl} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

いくつかの計算により $\rho_a(H) \in \mathbb{H}(\nu)$ がわかる. これはヤング盤における Insertion algorithm の類似になっている.

例 6

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ とし $H \in \mathbb{H}((6, 2, 1, 0))$ を以下のようにとる. μ_2 から始めて left 2-th diagonal を U_{12} まで進む. 次に right 1-th diagonal を $U_{1j} \neq 0$ まで進み, right 2-th diagonal に入る, さらに right 2-th diagonal を $U_{2j} \neq 0$ まで進む.... この操作を繰り返して H 上のパスを構成する. このとき ρ_2 は $p_2(H)$ で指定された H の要素を $+1$ か -1 する作用と理解できる.



$H \otimes K \in \mathbb{H}(\lambda) \otimes \mathbb{H}(\mu)$ とする. $\Theta(H_1 \otimes H_2) = \iota(H_1) \otimes \rho_{j_{\iota(H_1)}}(H_2)$ とする. このとき, 定義 14, 定義 16 からある $\nu, \xi \in P^+$ が存在して,

$$\Theta(H_1 \otimes H_2) \in \mathbb{H}(\nu) \otimes \mathbb{H}(\xi)$$

となる. 特にこれは結晶の同型写像になっている. これを繰り返し用いることで次を得る. $\lambda, \mu \in P^+$ に対し,

$$P^+(\lambda, \mu) = \left\{ \nu \in P^+ \mid \nu = \sum_{i \in I} (\mu_i + k_i) \Lambda_i, \sum_{i \in I} k_i = \sum_{i \in I} \lambda_i \right\}$$

とする.

定理 17

結晶の同型写像 $\mathbb{H}(\lambda) \otimes \mathbb{H}(\mu) \rightarrow \bigoplus_{\nu \in P^+(\lambda, \mu)} \mathbb{H}(\nu)$ が存在する.

5 おわりに

本稿では $\mathbb{H}(\lambda)$ のテンソル積分解を与えた. 具体的には, 最高ウェイトベクトルである条件を考えることで分解ルールを与え, また K-hive 上の操作を用いて分解写像を構成した. 特に分解写像の構成に利用した作用 ρ_j は, ヤング盤における Insertion algorithm の類似になっている. よって, これを拡張することで $\mathbb{H}(\lambda)$ 上の Robinson–Schensted 対応の構成などが期待されるが, それは今後の課題である.

Acknowledgements

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

参考文献

- [1] S. Ariki. *Representations of quantum algebras and combinatorics of Young tableaux*, Vol. 26 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. Translated from the 2000 Japanese edition and revised by the author.
- [2] V. G. Drinfeld. Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 283, No. 5, pp. 1060–1064, 1985.
- [3] J. Hong and S. Kang. *Introduction to quantum groups and crystal bases*, Vol. 42 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [4] M. Jimbo. A q -difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, Vol. 10, No. 1, pp. 63–69, 1985.
- [5] M. Kashiwara. Crystalizing the q -analogue of universal enveloping algebras. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 133, No. 2, pp. 249–260, 1990.
- [6] M. Kashiwara. On crystal bases of the Q -analogue of universal enveloping algebras. *Duke Math. J.*, Vol. 63, No. 2, pp. 465–516, 1991.

- [7] M. Kashiwara and T. Nakashima. Crystal graphs for representations of the q -analogue of classical Lie algebras. *J. Algebra*, Vol. 165, No. 2, pp. 295–345, 1994.
- [8] A. Knutson and T. Tao. The honeycomb model of $GL_n(\mathbf{C})$ tensor products. I. Proof of the saturation conjecture. *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 12, No. 4, pp. 1055–1090, 1999.
- [9] S. Narisawa and K. Shirayanagi. Crystal bases of irreducible highest weight modules over a quantum group of type A and the hive model. *RIMS Kokyuroku*, 2159, *Computer Algebra – Theory and its Applications*, pp. 149–157, 2020. (in Japanese).
- [10] I. Terada, R. C. King, and O. Azenhas. The symmetry of Littlewood-Richardson coefficients: a new hive model involutory bijection. *SIAM J. Discrete Math.*, Vol. 32, No. 4, pp. 2850–2899, 2018.