

Svrtanによる new Brahmagupta's formula の 円内接多角形問題への適用について

Applying new Brahmagupta's formula by Svrtan to the problems on cyclic polygons

筑波大学 図書館情報メディア系 森継 修一 *1

SHUICHI MORITSUGU

FACULTY OF LIBRARY, INFORMATION AND MEDIA SCIENCE

UNIVERSITY OF TSUKUBA

Abstract

This paper describes computations of the relations between the circumradius R and area S of cyclic polygons given by the lengths of the sides. The classic results of Heron and Brahmagupta clearly show that the product of R and S is expressed by the lengths of the sides for triangles and cyclic quadrilaterals. In the author's previous paper (2015), the similar *integrated formulae* of the circumradius and the area for cyclic pentagons and hexagons were computed using elimination by resultants and factorization of polynomials. In contrast, we revisit the computation of pentagon and hexagon formulae applying “new Brahmagupta's formula” discovered by Svrtan. As a result, we succeeded in computing the integrated formulae for cyclic pentagons and hexagons more efficiently. Analogously, we tried to apply “new Brahmagupta's formula” for the heptagon and octagon cases. However, the elimination process has remained still very difficult, and there seems no other applicable methods than the method of numerical interpolation.

1 序

本研究では、ユークリッド幾何の古典的な問題である円内接多角形問題を扱う。すなわち、円に内接する n 角形の各辺の長さを a_1, a_2, \dots, a_n としたとき、 n 角形の面積 S 、外接円の半径 R 、さらに R と S の関係を辺長 a_i の式で表わせ、という問題である。古典的には、 $n = 3$ の場合の Heron の公式 (1 世紀)、 $n = 4$ の場合の Brahmagupta の公式 (7 世紀) が知られている。また、円に内接する四辺形に関する公式は、他にも多数知られているが、それらを組み合わせて、Svrtan[5] は new Brahmagupta's formula を発見した。本研究の主たる課題は、この「新公式」を適用して、円内接多角形に関する“面積 \times 半径”公式 ($z = 4SR$ がみたすべき定義多項式) の導出法を見直すことである。

結果として、 $n = 5, 6$ の場合は、筆者の前論文 [3] における導出過程が大幅に効率化されることが判明した。前論文では、終結式を計算した結果に含まれる冗長な因子を除外するために、巨大な多変数多項式の因数分解が必要であった。これに対し、「new Brahmagupta 公式」を用いると、より簡潔な関係式を基に消去計算を行うことになるため、因数分解が不要になって計算時間が短縮された。

一方で、 $n = 7, 8$ の場合においては、Svrtan[5] にしたがって、対角線を 2 本引いて図形を 3 分割することにより、「new Brahmagupta 公式」を 2 回適用して関係式を導いた。得られた 3 つの多項式は、イデアルの

*1 〒 305-8550 つくば市春日 1-2 E-mail: moritsug@slis.tsukuba.ac.jp

生成元としては冗長性がないが，記号的な消去計算は，グレブナー基底による方法はもちろん，終結式による方法でも現実的には不可能とみられることが判明した．

筆者の最新論文 [2] では， $n = 7$ に対する $z = 4SR$ の定義多項式 (31, 590 項) を数値補間で求める手法について詳述している．Svrtan[5] には「 $n = 7$ に対しては，31, 590 項をもつ $Z = (4SR)^2$ に関する多項式を得た」という結論のみが示され，これを「 $z = 4SR$ に関する多項式」の誤記とみれば，項数は一致している．ただし，そこで用いられた消去計算の詳細が示されていないため，「new Brahmagupta 公式」が有用だったかどうかは不明である．

2 古典的な結果 ($n = 3, 4$)

3 辺の長さを $\{a_1, a_2, a_3\}$ とする三角形は常に外接円をもち，その面積 S と外接円の半径 R は Heron の公式から，次の関係をみます．

$$4SR = a_1 a_2 a_3 \quad (1)$$

ここで， $z = 4SR$ ， $Z = (4SR)^2$ とおくと，式 (1) は a_i^2 に関する 3 次の基本対称式 $s_3 = a_1^2 a_2^2 a_3^2$ ， $\sqrt{s_3} = a_1 a_2 a_3$ を用いて，以下のように書き換えられる．

$$\begin{cases} |z| - \sqrt{s_3} = 0 \\ Z - s_3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

次に，円内接四角形の面積および外接円半径に関する Brahmagupta の公式を結合すると

$$(4SR)^2 = (a_1 a_2 + a_3 a_4)(a_1 a_3 + a_2 a_4)(a_1 a_4 + a_2 a_3) \quad (3)$$

と表される．ここで， a_i^2 に関する 4 次の基本対称式 $s_1 = a_1^2 + \dots + a_4^2$ ， $s_2 = a_1^2 a_2^2 + \dots$ ， $s_3 = a_1^2 a_2^2 a_3^2 + \dots$ ， $\sqrt{s_4} = a_1 a_2 a_3 a_4$ を用いると，次のような簡潔な表現が得られる．

$$Z = s_3 + s_1 \sqrt{s_4} \quad (4)$$

なお，式 (3) は凸四角形の場合を表しているので，凸でない場合には， $a_4 := -a_4$ とおいた式を求め，基本対称式表現に変換すると次のように表される．

$$Z = s_3 - s_1 \sqrt{s_4} \quad (5)$$

すなわち， n が偶数の場合の補助的な表現 $\sqrt{s_n} = a_1 \dots a_n$ の係数に *crossing parity* ε [4][1] を導入し， $\varepsilon = 0$ (三角形)，1 (凸四角形)，-1 (凸でない四角形) に対応させると，統一した表現が得られる．

定理 1

式 (2) (4) (5) をまとめて， $n = 3, 4$ の場合の面積 \times 半径公式は，以下のような多項式で表現される．

$$\begin{cases} \varphi_3(z) = |z| - \sqrt{s_3} \\ \psi_{3,4}(Z) = Z - (s_3 + \varepsilon \cdot s_1 \sqrt{s_4}) \end{cases} \quad (6)$$

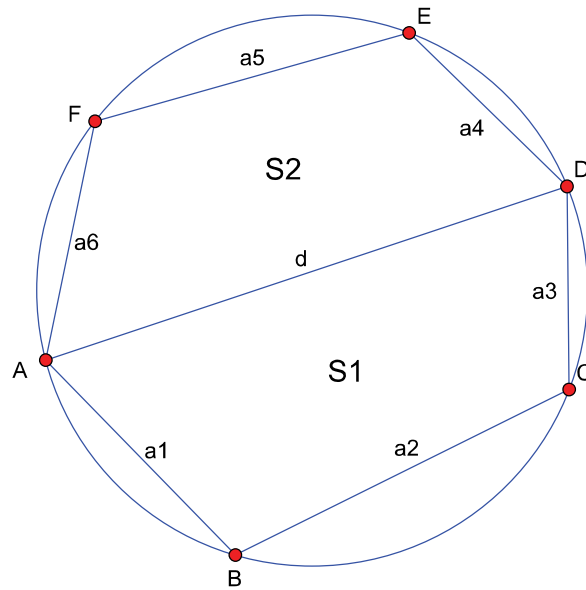


図 1: new Brahmagupta 公式 [5]

3 五角形・六角形の場合の再計算

3.1 new Brahmagupta 公式

4 辺の長さを $\{a, b, c, d\}$ とする円内接四角形に対する Brahmagupta の面積公式

$$16S^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) - a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 8abcd \quad (7)$$

において, 右辺を d の関数とみなして $G(d)$ で表し, $g(a, b, c; d) = G'(d)/4$ とおく.

$$g(a, b, c; d) = -d^3 + (a^2 + b^2 + c^2)d + 2abc \quad (8)$$

一方で, 円内接六角形 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ を対角線 d により 2 つの円内接四角形 $\{a_1, a_2, a_3, d\}$ と $\{a_4, a_5, a_6, d\}$ とに分割し, それぞれの面積を S_1, S_2 とおく (図 1). このとき, Svrtan[5] は,

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{g(a_4, a_5, a_6; d)}{g(a_1, a_2, a_3; d)} \quad (9)$$

が成り立つことを示し (原著では多項式表現), これを「new Brahmagupta 公式」と名づけている. 結果として, 式 (7) を用いて S_2^2/S_1^2 を表すより簡潔な表現が得られ, 関連する計算の効率化が期待できることになる. ただし, 式 (9) の導出には初等幾何的な線分の長さの関係だけが用いられているが, なぜ導関数の形をしているかなどの説明はなされていない. なお, Brahmagupta の面積公式 (7) は $a = 0$ を代入すれば三角形 $\{b, c, d\}$ の面積を表すため, 式 (9) は円内接五角形を四角形+三角形に分割した場合でも成立する.

3.2 面積 × 半径公式 ($n = 5, 6$) の計算への適用

以前の論文 [3] の結論として、以下を得ているが、最終式を計算した結果を因数分解して正しい因子を見出すステップに多くの CPU 時間を取られていた。

$$\begin{cases} \varphi_5(z) &= |z|^7 - 2s_3|z|^5 - (s_1^2 + 4s_2)\sqrt{s_5}|z|^4 + \cdots & (18 \text{ 項}) \\ \psi_{5,6}(Z) &= Z^7 - (4s_3 + 28\varepsilon\sqrt{s_6})Z^6 + \cdots & (327 \text{ 項}) \end{cases} \quad (10)$$

ただし、 $\varepsilon = 0$ は五角形の場合、 $\varepsilon = 1$ は凸六角形を含むグループ、 $\varepsilon = -1$ は凸な場合を含まないグループに対応している。

ここでは、「new Brahmagupta 公式」(9) を用いると、より効率的に、多項式の因数分解なしで上記の結果が得られることを示す。

なお、円内接四角形 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ の外接円半径 R は、Brahmagupta の公式から

$$R^2 = \frac{(a_1a_2 + a_3a_4)(a_1a_3 + a_2a_4)(a_1a_4 + a_2a_3)}{(-a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_1 - a_2 + a_3 + a_4)(a_1 + a_2 - a_3 + a_4)(a_1 + a_2 + a_3 - a_4)} \quad (11)$$

と表され、 $a_4 = 0$ とおけば、三角形 $\{a_1, a_2, a_3\}$ に対する Heron の公式に帰着する。

3.2.1 円内接五角形の場合

図 1 において、 $a_6 = 0$ の場合を考えると、面積 S の円内接五角形 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ を対角線 d により、

$$\text{四角形 } \{a_1, a_2, a_3, d\} + \text{三角形 } \{a_4, a_5, d\} \quad (12)$$

と分割したことに相当する。このとき、それぞれの面積を S_1, S_2 とおくと、 $S = S_1 + S_2$ である。また、これらの図形はひとつの外接円を共通にもつので、その半径を R とおく。

このとき、式 (9) を用いて面積比を表し、

$$\frac{S_2}{S_1} = -\frac{g(a_4, a_5, 0; d)}{g(a_1, a_2, a_3; d_1)} = -\frac{\alpha}{\beta} \quad (13)$$

と略記する。 $S_1 = -\frac{\beta}{\alpha}S_2$ を $S = S_1 + S_2$ に代入すると

$$S = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)S_2 + S_2 = \left(-\frac{\beta}{\alpha} + 1\right)S_2 \quad (14)$$

両辺に $\alpha \cdot 4R$ をかけて

$$\alpha(4SR) = (\alpha - \beta)(4S_2R) \quad (15)$$

ここで三角形に対する面積 × 半径公式 (1) より、 $4S_2R = a_4a_5d$ である。また、 $d \mid \alpha$ が確かめられるので、両辺を d で割ると、 $z = 4SR$ (五角形に対する面積 × 半径) に対し、

$$f_0(a_i, d, z) = (a_4^2 + a_5^2 - d^2)z - (\alpha - \beta)a_4a_5 \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{Z}[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, d]) \quad (16)$$

という形で、 $z = 4SR$ の定義多項式が 1 次式 (展開すると 9 項、 d に関しては 2 次) で表せる。

一方で、 $f_0(a_i, d, z)$ から対角線 d を消去するためには、 $\mathbf{Z}[a_i, d]$ に属する独立な多項式が必要である。これには、分割でできた四角形と三角形に半径公式 (11) を適用した式を基本とする。

$$\begin{aligned} f_1(a_1, a_2, a_3, d, R) &= (a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + d^4 + \cdots) R^2 + (a_1^2a_2^2a_3^2 + a_1^2a_2^2d^2 + a_1^2a_3^2d^2 + a_2^2a_3^2d^2 + \cdots) \\ f_2(a_4, a_5, d, R) &= (a_4^4 + a_5^4 + d^4 - 2a_4^2a_5^2 - 2a_4^2d^2 - 2a_5^2d^2) R^2 + a_4^2a_5^2d^2 \end{aligned} \quad (17)$$

これらは外接円半径 R^2 が共通なので、終結式を計算して消去すると (R^2 について解いて代入しても同じ)

$$h(a_1, \dots, a_5, d) := \text{Res}_{R^2}(f_1, f_2) \quad (52 \text{ 項}, \quad \deg_d h = 7) \quad (18)$$

さらに, $\{f_0, h\}$ から終結式によって d を消去し, Content Part を除去すると, 1 秒未満の CPU 時間で次を得る.

$$\text{PrimitivePart}_z(\text{Res}_d(f_0, h)) = 1 \cdot z^7 + \dots \quad (242 \text{ 項}) \quad (19)$$

これは, 基本対称式表現の式 (10) における $\varphi_5(z)$ を, 辺長による表現 $\mathbf{Z}[a_1, \dots, a_5, z]$ に展開したものであることが確かめられる. 筆者の前論文 [3] の方法では, 終結式を 7 次式 \times 7 次式に因数分解するのに 2.5 分ほどかかっていたのに対し, 大幅な改善になっている.

3.2.2 円内接六角形の場合

図 1 において, 面積 S の円内接六角形 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ を対角線 d により,

$$\text{四角形 } \{a_1, a_2, a_3, d\} + \text{四角形 } \{a_4, a_5, a_6, d\} \quad (20)$$

と分割したとする. このとき, それぞれの面積を S_1, S_2 とおくと, $S = S_1 + S_2$ である. また, これらの図形はひとつの外接円を共通にもつので, その半径を R とおく.

このとき, 式 (9) を用いて面積比を表し,

$$\frac{S_2}{S_1} = -\frac{g(a_4, a_5, a_6; d)}{g(a_1, a_2, a_3; d)} = -\frac{\alpha}{\beta} \quad (21)$$

と略記する. $S_1 = -\frac{\beta}{\alpha} S_2$ を $S^2 = S_1^2 + 2S_1S_2 + S_2^2$ の第 2 項のみに代入すると

$$S^2 = S_1^2 + 2\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) S_2^2 + S_2^2 \quad (22)$$

両辺に $\alpha \cdot (4R)^2$ をかけると

$$\alpha(4SR)^2 = \alpha(4S_1R)^2 + (\alpha - 2\beta)(4S_2R)^2 \quad (23)$$

ここで, 式 (3) より,

$$\begin{cases} (4S_1R)^2 &= (a_1a_2 + a_3d)(a_1a_3 + a_2d)(a_1d + a_2a_3) \\ (4S_2R)^2 &= (a_4a_5 + a_6d)(a_4a_6 + a_5d)(a_4d + a_5a_6) \end{cases} \quad (24)$$

と表されることに注意する. したがって, 円内接六角形において $Z = (4SR)^2$ とおいたとき,

$$f_0(a_i, d, Z) = \alpha Z - \alpha(4S_1R)^2 - (\alpha - 2\beta)(4S_2R)^2 \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{Z}[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, d]) \quad (25)$$

という形で, $Z = (4SR)^2$ の定義多項式が 1 次式 (展開すると 100 項, d に関しては 6 次) で表せる.

一方で, $f_0(a_i, d, Z)$ から対角線 d を消去するためには, $\mathbf{Z}[a_i, d]$ に属する独立な多項式が必要である. これには, 分割でできた 2 つの四角形に半径公式 (11) を適用した式を基本とする.

$$\begin{aligned} f_1(a_1, a_2, a_3, d, R) &= (a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + d^4 + \dots) R^2 + (a_1^2a_2^2a_3^2 + a_1^2a_2^2d^2 + a_1^2a_3^2d^2 + a_2^2a_3^2d^2 + \dots) \\ f_2(a_4, a_5, a_6, d, R) &= (a_4^4 + a_5^4 + a_6^4 + d^4 + \dots) R^2 + (a_4^2a_5^2a_6^2 + a_4^2a_5^2d^2 + a_4^2a_6^2d^2 + a_5^2a_6^2d^2 + \dots) \end{aligned} \quad (26)$$

これらは外接円半径 R^2 が共通なので、終結式または代入により消去すると

$$h(a_1, \dots, a_6, d) := \text{Res}_{R^2}(f_1, f_2) \quad (150 \text{ 項}, \quad \deg_d h = 7) \quad (27)$$

さらに, $\{f_0, h\}$ から終結式によって d を消去し, Content Part を除去すると, 計 180 秒程度の CPU 時間で次を得る.

$$\text{PrimitivePart}_Z(\text{Res}_d(f_0, h)) = 1 \cdot Z^7 + \dots \quad (44,926 \text{ 項}) \quad (28)$$

これは, 基本対称式表現の式 (10) における $\psi_{5,6}(Z)$ を, 辺長による表現 $\mathbf{Z}[a_1, \dots, a_6, Z]$ に展開したものであることが確かめられる. 筆者の前論文 [3] の方法では, 終結式を 7 次式 \times 7 次式に因数分解するのに CPU 時間で約 11 日かかっていたのに対し, 大幅な改善になっている.

4 面積 \times 半径公式 ($n = 7$) の計算への適用

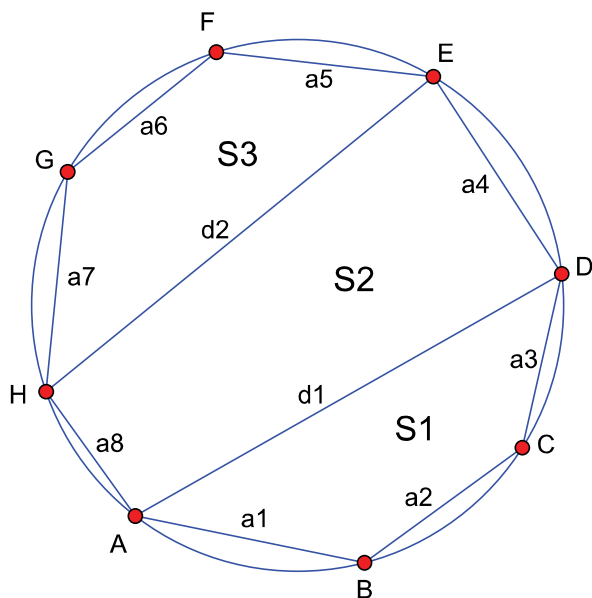


図 2: 円内接八角形の分割 [5]

4.1 面積の関係の定式化

図 2 において, $a_8 = 0$ の場合を考えると, 面積 S の円内接七角形 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ を 2 本の対角線 d_1, d_2 により,

$$\text{四角形 } \{a_1, a_2, a_3, d_1\} + \text{三角形 } \{d_1, a_4, d_2\} + \text{四角形 } \{a_5, a_6, a_7, d_2\} \quad (29)$$

と分割したことに相当する. それぞれの部分の面積を S_1, S_2, S_3 とおくと, $S = S_1 + S_2 + S_3$ である. また, これらの図形はひとつの外接円を共通にもつので, その半径を R とおく.

このとき、式 (9) を用いて面積比を表し、

$$\frac{S_2}{S_1} = -\frac{g(a_4, d_2, 0; d_1)}{g(a_1, a_2, a_3; d_1)} = -\frac{\alpha}{\beta} \quad \frac{S_2}{S_3} = -\frac{g(a_4, d_1, 0; d_2)}{g(a_5, a_6, a_7; d_2)} = -\frac{\gamma}{\delta} \quad (30)$$

と略記する. $S_1 = -\frac{\beta}{\alpha}S_2$ および $S_3 = -\frac{\delta}{\gamma}S_2$ を $S = S_1 + S_2 + S_3$ に代入すると

$$S = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)S_2 + S_2 + \left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)S_2 \quad (31)$$

両辺に $4R$ をかけて

$$4SR = \left(-\frac{\beta}{\alpha} + 1 - \frac{\delta}{\gamma}\right)4S_2R \quad (32)$$

ここで三角形に対する面積 \times 半径公式 (1) より, $4S_2R = d_1d_2a_4$ に注意し, 分母を払うと, $z = 4SR$ (七角形に対する面積 \times 半径) に対し,

$$\alpha\gamma \cdot z = (-\beta\gamma + \alpha\gamma - \alpha\delta) d_1d_2a_4 \quad (33)$$

さらに $d_1 \mid \alpha$, $d_2 \mid \gamma$ を利用して, 両辺を d_1d_2 で割ると

$$f_0(a_i, d_1, d_2, z) = \left(a_4^4 - (d_1^2 - d_2^2)^2\right) \cdot z + (\beta\gamma - \alpha\gamma + \alpha\delta) a_4 \quad (34)$$

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{Z}[a_1, \dots, a_7, d_1, d_2])$

という形で, 円内接七角形に対する $z = 4SR$ の定義多項式が 1 次式 (展開すると 31 項, d_1, d_2 についてはそれぞれ 4 次) で表せる.

4.2 対角線 d_1, d_2 の関係式

$\varphi(a_i, d_1, d_2, z)$ から対角線 d_1, d_2 を消去するためには, $\mathbf{Z}[a_i, d_1, d_2]$ に属する独立な多項式が 2 つ必要である. これには, 分割でできた 2 つの四角形と三角形に半径公式 (11) を適用した式を基本とする.

$$\begin{aligned} f_1(a_1, a_2, a_3, d_1, R) &= (a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + d_1^4 + \dots) R^2 + (a_1^2 a_2^2 a_3^2 + a_1^2 a_2^2 d_1^2 + a_1^2 a_3^2 d_1^2 + a_2^2 a_3^2 d_1^2 + \dots) \\ f_2(a_4, d_1, d_2, R) &= (a_4^4 + d_1^4 + d_2^4 - 2a_4^2 d_1^2 - 2a_4^2 d_2^2 - 2d_1^2 d_2^2) R^2 + d_1^2 d_2^2 a_4^2 \\ f_3(a_5, a_6, a_7, d_2, R) &= (a_5^4 + a_6^4 + a_7^4 + d_2^4 + \dots) R^2 + (a_5^2 a_6^2 a_7^2 + a_5^2 a_6^2 d_2^2 + a_5^2 a_7^2 d_2^2 + a_6^2 a_7^2 d_2^2 + \dots) \end{aligned} \quad (35)$$

これらは外接円半径 R^2 が共通なので, 終結式または代入により消去すると (以下の組合せによれば, 終結式は余計な因子を含まず), 次の 2 式を得る.

$$h_1(a_i, d_1, d_2) := \text{Res}_{R^2}(f_1, f_3) \quad (176 \text{ 項}) \quad \deg_{d_1} h_1 = 4, \quad \deg_{d_2} h_1 = 4 \quad (36)$$

$$h_2(a_i, d_1, d_2) := \text{Res}_{R^2}(f_2, f_3) \quad (52 \text{ 項}) \quad \deg_{d_1} h_2 = 4, \quad \deg_{d_2} h_2 = 7 \quad (37)$$

4.3 消去計算の実際

Svrtan[5] の趣旨としては, 以上で求めた式 (34)(36)(37) を連立させ, グレブナー基底を計算して d_1, d_2 を消去すればよい, ということになるが, 係数に a_i を含んだままの実行は困難である. 相異なる素数を 7 個選んで $a_i := p_i$ を代入した下でグレブナー基底を計算してみると, 零点の個数は 38 であり, イdeal と

しては冗長な成分を含んでいない. しかしながら, 結果は基本対称式 $s_1, \dots, s_6, \sqrt{s_7}$ の表現 (31,590 項) を展開した多項式 $\tilde{\varphi}(z) \in \mathbf{Z}[a_1, \dots, a_7; z]$ (45,728,577 項) になるため, 記号的に求めることは難しい.

一方で, 終結式によって, d_1, d_2 を順次消去する方法も実行困難と思われる. 再び, 相異なる素数を 7 個選んで $a_i := p_i$ を代入した下で解析してみると, 式 (36)(37) より, d_1, d_2 について 4 次の項を含むため, 最終結果は z について $(38 \times 4 =) 152$ 次式であり, それを因数分解すると 4 個の 38 次式の積となる.

$$(z^{38} + \nabla z^{36} + \dots) (\Delta z^{38} + \Delta z^{37} + \dots) (\Delta z^{38} + \Delta z^{37} + \dots) (\Delta z^{38} + \Delta z^{37} + \dots) \quad (38)$$

これらのうちのひとつ (主係数が 1, かつ, z^{37} の項をもたないもの) が正しい因子となるが, 係数に a_i を含んだ記号的計算では, 終結式の計算自体が困難であり, その因数分解もなお現実的ではない.

5 面積 \times 半径公式 ($n = 8$) の計算への適用

5.1 面積の関係の定式化

図 2 に示すように, 面積 S の円内接八角形 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$ を 2 本の対角線 d_1, d_2 により,

$$\text{四角形 } \{a_1, a_2, a_3, d_1\} + \text{四角形 } \{a_4, d_2, a_8, d_1\} + \text{四角形 } \{a_5, a_6, a_7, d_2\} \quad (39)$$

と分割し, それぞれの面積を S_1, S_2, S_3 とおくと, $S = S_1 + S_2 + S_3$ である. また, これらの図形はひとつの外接円を共通にもつので, その半径を R とおく.

このとき, 式 (9) を用いて面積比を表し,

$$\frac{S_2}{S_1} = -\frac{g(a_4, d_2, a_8; d_1)}{g(a_1, a_2, a_3; d_1)} = -\frac{\alpha}{\beta} \quad \frac{S_2}{S_3} = -\frac{g(a_4, d_1, a_8; d_2)}{g(a_5, a_6, a_7; d_2)} = -\frac{\gamma}{\delta} \quad (40)$$

と略記する. $S^2 = (S_1 + S_2 + S_3)^2$ の右辺を展開し, S_1, S_3 の 1 乗のみを含む項に $S_1 = -\frac{\beta}{\alpha}S_2$ および $S_3 = -\frac{\delta}{\gamma}S_2$ を代入する.

$$\begin{aligned} S^2 &= S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2S_1S_2 + 2S_1S_3 + 2S_2S_3 \\ &= S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2\left(-\frac{\beta}{\alpha}S_2\right)S_2 + 2\left(-\frac{\beta}{\alpha}S_2\right)\left(-\frac{\delta}{\gamma}S_2\right) + 2S_2\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)S_2 \\ &= S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2\left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta\delta}{\alpha\gamma} - \frac{\delta}{\gamma}\right)S_2^2 \end{aligned} \quad (41)$$

両辺に $\alpha\gamma$ をかけ, 右辺を変形すると

$$\begin{aligned} \alpha\gamma S^2 &= \alpha\gamma(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) + 2(-\beta\gamma + \beta\delta - \alpha\delta)S_2^2 \\ &= \alpha\gamma S_1^2 + \alpha\gamma S_3^2 + (\alpha\gamma + 2(-\beta\gamma + \beta\delta - \alpha\delta))S_2^2 \end{aligned} \quad (42)$$

両辺に $(4R)^2$ をかけて

$$\alpha\gamma(4SR)^2 = \alpha\gamma(4S_1R)^2 + \alpha\gamma(4S_3R)^2 + (\alpha\gamma + 2(-\beta\gamma + \beta\delta - \alpha\delta))(4S_2R)^2 \quad (43)$$

ここで, 式 (3) より,

$$\begin{cases} (4S_1R)^2 &= (a_1a_2 + a_3d_1)(a_1a_3 + a_2d_1)(a_1d_1 + a_2a_3) \\ (4S_2R)^2 &= (a_4d_2 + a_8d_1)(a_4a_8 + d_2d_1)(a_4d_1 + d_2a_8) \\ (4S_3R)^2 &= (a_5a_6 + a_7d_2)(a_5a_7 + a_6d_2)(a_5d_2 + a_6a_7) \end{cases} \quad (44)$$

と表される． $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{Z}[a_1, \dots, a_8, d_1, d_2]$ とあわせて，式 (43) の右辺は a_i, d_i の多項式であることに注意する．したがって，円内接八角形において $Z = (4SR)^2$ とおいたとき，

$$\bar{f}_0 := \alpha\gamma \cdot Z - u(a_i, d_i) \quad (u(a_i, d_i) \in \mathbf{Z}[a_1, \dots, a_8, d_1, d_2]) \quad (45)$$

という形で， Z の定義多項式が 1 次式 (展開すると 549 項， d_1, d_2 についてはそれぞれ 8 次) で表せる．

5.2 対角線 d_1, d_2 の関係式

$f_0(a_i, d_1, d_2, Z)$ から対角線 d_1, d_2 を消去するためには， $\mathbf{Z}[a_i, d_1, d_2]$ に属する独立な多項式が 2 つ必要である．これには，分割でできた 3 つの四角形に半径公式 (11) を適用した式を基本とする．

$$\begin{aligned} f_1(a_1, a_2, a_3, d_1, R) &= (a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + d_1^4 + \dots) R^2 + (a_1^2 a_2^2 a_3^2 + a_1^2 a_2^2 d_1^2 + a_1^2 a_3^2 d_1^2 + a_2^2 a_3^2 d_1^2 + \dots) \\ f_2(a_4, d_2, a_8, d_1, R) &= (a_4^4 + d_2^4 + a_8^4 + d_1^4 + \dots) R^2 + (a_4^2 d_2^2 a_8^2 + a_4^2 d_2^2 d_1^2 + a_4^2 a_8^2 d_1^2 + d_2^2 a_8^2 d_1^2 + \dots) \\ f_3(a_5, a_6, a_7, d_2, R) &= (a_5^4 + a_6^4 + a_7^4 + d_2^4 + \dots) R^2 + (a_5^2 a_6^2 a_7^2 + a_5^2 a_6^2 d_2^2 + a_5^2 a_7^2 d_2^2 + a_6^2 a_7^2 d_2^2 + \dots) \end{aligned} \quad (46)$$

これらは外接円半径 R^2 が共通なので，終結式または代入により消去すると (以下の組合せによれば，終結式は余計な因子を含まず)，次の 2 式を得る．

$$\bar{h}_1(a_i, d_1, d_2) := \text{Res}_{R^2}(f_1, f_3) \quad (176 \text{ 項}) \quad \deg_{d_1} \bar{h}_1 = 4, \quad \deg_{d_2} \bar{h}_1 = 4 \quad (47)$$

$$\bar{h}_2(a_i, d_1, d_2) := \text{Res}_{R^2}(f_2, f_3) \quad (150 \text{ 項}) \quad \deg_{d_1} \bar{h}_2 = 4, \quad \deg_{d_2} \bar{h}_2 = 7 \quad (48)$$

5.3 消去計算の実際

以上で求めた式 (45)(47)(48) を基本関係式とし， d_1, d_2 が消去できれば

$$\psi(Z) \in \mathbf{Z}[a_1, \dots, a_8; Z] = Z^{38} + \nabla Z^{37} + \dots \quad (49)$$

求められることになる．相異なる素数を 8 個選んで $a_i := p_i$ を代入した下でグレブナー基底を計算してみると，零点の個数は 38 であり，イデアルとしては冗長な成分を含んでいないが，終結式を計算した場合は $38 \times 4 = 152$ 次式が得られ，その因数分解の構造は， $n = 7$ の場合の式 (38) と同様である．ただし，実際の計算は $n = 7$ の場合以上に困難である．

したがって，現状では数値補間を進める以外に，適用できるアルゴリズムが存在しない．ただし，数値的な評価点を必要な個数だけ求めるためには，式 (45)(47)(48) に対して，素数の組 (p_1, \dots, p_8) を多数与えることで対処できるので，その部分では「new Brahmagupta 公式」は有用である．

6 まとめと今後の課題

本稿では，Svrtan[5] が発見した new Brahmagupta 公式 (9) を円内接多角形 ($n = 5, 6, 7, 8$) の“面積 \times 半径”公式の計算に適用した場合の基本関係式の導出過程を示した．結果として， $n = 5, 6$ の場合は，筆者自身の前論文 [3] の方法よりも計算時間が大幅に短縮され，より効率的な計算法が明らかになった．これは，終結式に含まれる余計な因子を排除するための因数分解が不要になったことによっている．

これに対し， $n = 7, 8$ の場合は，冗長性のないイデアルの生成元が式 (34)(36)(37) および式 (45)(47)(48) として得られたが，その先の消去はグレブナー基底でも終結式でも困難である．なお，これらの基本関係式

は数値補間のための評価ポイントの作成には有用であり、多数の数値例を効率よく生成することができるようになった。

今後の課題としては、New Brahmagupta's formula の拡張可能性が考えられる。四角形よりも辺の数が多様な以下の組合せに対しても、 S_2/S_1 の有理式表現が存在するかが問題である。

- 七角形の分割 五角形+四角形, 六角形+三角形
- 八角形の分割 五角形+五角形, 六角形+四角形, 七角形+三角形

五角形 (面積 S に対して $16S^2$ に関する 7 次方程式) 以上の場合は、面積 S を explicit に表すことはできないことに注意を要する。

最後に、 $n = 8$ の場合の “面積 × 半径” 公式の数値補間による計算状況を簡単に示す。

$$\psi_8^{(+)}(Z) = Z^{38} - 16s_3 Z^{37} + D_{36} Z^{36} + \dots + D_{17} Z^{17} + (D_{16} Z^{16} + \dots + D_1 Z) + D_0 \quad (50)$$

式 (50) において、現在得られている係数は、項数の少ない方 (D_{36}) から D_{17} までである。他に定数項 D_0 (554,173 項) は「根と係数の関係」から理論的に求められるが、項数のより多い D_{16}, \dots, D_1 は計算できる見込みがない。具体的な項数を表 1 にまとめて示した。現在までに計算できている中で項数最大の D_{17} は、候補となる単項式の個数から、125,054 元の連立一次方程式を解いて、102,247 個の非零要素を含む解ベクトルが得られる。

その次の係数 D_{16} を求めるには 165,235 元の連立一次方程式を解く必要があり、現在の計算環境 (256GB RAM) では実行不可能である。その先では、行列サイズは単調増加して、 D_1 のためには 4,116,544 元となるため、 D_{16} 以降は計算困難と見積もられる。

$n = 7$ の “面積 × 半径” 公式は数値補間で計算済 [2] であるが、最大の行列サイズが 26,226 元であったことと比べると、 $n = 8$ は巨大な結果になることが見てくる。

謝 辞

本研究は科研費 (21K03335) の助成を受けている。また、国際共同利用・共同研究拠点である京都大学数理解析研究所の助成を受けている。

参 考 文 献

- [1] Maley, F. M., Robbins, D. P., and Roskies, J.: On the Areas of Cyclic and Semicyclic Polygons, *Advances in Applied Mathematics*, **34**(4), 2005, 669–689.
- [2] 森継修一: 円内接七・八角形の「面積 × 半径」公式の計算について, 京都大学数理解析研究所講究録, **2185**, 2021, 94–103.
- [3] Moritsugu, S.: Integrated Circumradius and Area Formulae for Cyclic Pentagons and Hexagons, *ADG 2014* (Botana, F. and Quaresma, P., eds.), *LNAI*, **9201**, Springer, 2015, 94–107.
- [4] Robbins, D. P.: Areas of Polygons Inscribed in a Circle, *Discrete & Computational Geometry*, **12**(1), 1994, 223–236.
- [5] Svrtan, D.: Intrinsic Geometry of Cyclic Heptagons / Octagons via new Brahmagupta's Formula, <https://bib.irb.hr/datoteka/553883.main.pdf>, 2010.

deg in Z	t-deg	#terms of ψ_7	#candidates	deg in $\sqrt{s_8}$	#pp	#terms of ψ_8
0	114	5,120	4,877,338	28	549,053	554,173
1	111	9,577	4,116,544	27	—	—
2	108	15,564	3,460,093	27	—	—
3	105	23,239	2,895,100	26	—	—
4	102	32,597	2,411,333	25	—	—
5	99	43,316	1,998,245	24	—	—
6	96	54,102	1,647,556	24	—	—
7	93	64,045	1,350,718	23	—	—
8	90	72,291	1,101,116	22	—	—
9	87	78,269	891,903	21	—	—
10	84	81,969	717,874	21	—	—
11	81	77,990	573,604	20	—	—
12	78	71,316	455,045	19	—	—
13	75	63,500	357,987	18	—	—
14	72	55,553	279,332	18	—	—
15	69	47,257	215,854	17	—	—
16	66	39,733	165,234	16	(> 256 GB)	—
17	63	32,591	125,054	15	102,247	134,838
18	60	26,301	93,612	15	77,131	103,432
19	57	20,757	69,128	14	57,069	77,826
20	54	16,064	50,393	13	41,666	57,730
21	51	12,152	36,134	12	29,848	42,000
22	48	9,063	25,514	12	21,059	30,122
23	45	6,636	17,648	11	14,556	21,192
24	42	4,776	11,981	10	9,867	14,643
25	39	3,366	7,923	9	6,520	9,886
26	36	2,328	5,120	9	4,210	6,538
27	33	1,561	3,194	8	2,623	4,184
28	30	1,025	1,935	7	1,587	2,612
29	27	645	1,116	6	918	1,563
30	24	393	620	6	509	902
31	21	227	319	5	264	491
32	18	124	156	4	130	254
33	15	63	67	3	56	119
34	12	30	27	3	22	52
35	9	12	8	2	8	20
36	6	4	2	1	2	6
37	3	1	3	0	1	1
38	0	1	1	0	1	1

表 1: 八角形公式 $\psi_8^{(+)}(s_i; Z)$ における各係数 (— は未完)