$\mathbb{G}_m$ のマイナス成分の同変玉河数予想について
THE MINUS COMPONENT OF THE EQUIVARIANT TAMAGAWA NUMBER CONJECTURE FOR $\mathbb{G}_m$

慶應義塾大学　熱田　真大
MAHIRO ATSUTA
KEIO UNIVERSITY

Abstract. 本稿では, 代数体の有限次 CM-アーベル拡大における $\mathbb{G}_m$ のマイナス成分の同変玉河数予想について紹介する. §2 では, 予想の定式化の代数側に登場する加群 Ω_S^T の構成について述べる. §3 で予想の定式化をし, [2] における著者たちの主結果を述べる.

1. Introduction

整数論において, 代数的に定義されるイデアル類群やセルマー群と, 解析的に定義される L-関数の間には不思議な関係があることが知られている. この関係を記述する予想や定理は今ではたくさん知られているが, それらの中でも, Burns–Flach [5] によって定式化された同変玉河数予想 (the equivariant Tamagawa number conjecture) は両者の強力な関係を主張する予想の一つである (以降 eTNC と呼ぶことにする). eTNC は一般のモチーフに対して定式化されているが, 本稿では $\mathbb{G}_m$ に対する eTNC に焦点を当てて述べることにする.

eTNC は代数体の有限次アーベル拡大に対して, L-関数の $s=0$ におけるテイラー展開の先頭項と, 単数群やイデアル類群の情報を持ったある完全複体との非常に強い関係を述べる予想である (一般に eTNC はアーベルとは限らない有限次ガロア拡大に対しても定式化できるが, 本稿では簡単のためにアーベル拡大のみ考えることにする).

これまでの eTNC に関する多くの研究は, 岩澤理論的手法によるものであった. 具体的には, 円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大上で代数的対象と解析的対象を結び付け (岩澤主予想), 降下理論を用いて有限次レベルの情報を取り出すという方法である. 実際, この方法によって Burns–Greither [6], Flach [12] は基礎体が $\mathbb{Q}$ の時の eTNC を解決した. また, 基礎体が虚二次体の時も同様の手法で Bley [3] によって部分的に解決されている. さらには, Burns–Kurihara–Sano [8] によって, 一般の代数体上で岩澤主予想から eTNC を導く降下理論が確立された.

しかし, 一般に岩澤主予想から eTNC を導くことは容易ではなく, 実際 Burns–Kurihara–Sano [8] によって確立された降下理論を適用するためには, 岩澤理論における幾つかの未解決問題を仮定する必要があった. そのため, Wiles [17] によって証明された総実代数体上の岩澤主予想から有限次 CM-アーベル拡大のマイナス成分に対する eTNC (Conjecture 3.3, 以降 eTNC$^-$ と呼ぶ) も部分的にしか証明することができなかった.

しかし, そのような現状で突破口を開いたのが Dasgupta–Kakde による Brumer–Stark 予想を解決した論文 [10] である. 彼らは, Burns–Kurihara–Sano [7] によって定式化された予想を有限次 CM-アーベル拡大の場合に完全に証明し, その帰結として Brumer–Stark 予想を解決した. これまで, Brumer–Stark 予想に関しても多くの先行研究が岩澤理論的手法によるものであったが, この論文の一番驚くべきポイントは岩澤理論的手法を全く用いずに, 全て有限次拡大上で議論するということである. 彼らは, Ribet [15] や Wiles [17] で用いられ

た「Eisenstein congruence」の方法を群環係数の Hilbert 保型形式の理論に拡張することでこの予想を完全に解決した. Dasgupta–Kakde [10] には明記されていないが, 彼らは実際, 部分的に eTNC$^-$ に対する結果も得ている. 具体的に Dasgupta–Kakde [10] は 奇素数 p に対し, p の上の素点が全て不分岐な有限次 CM-アーベル拡大に対して, eTNC$^-$ の p-成分が成り立つことを示している. さらに, Nickel [14] は上記の仮定を p の上の素点が全て高々 tamely ramified であるという仮定に緩めることができることを示した.

そのような中で, 著者と片岡は [2] で Dasgupta–Kakde [10] の手法を最初から見直すことにより, 上記の Nickel の仮定をさらに緩くすることに成功した (see Theorem 3.7). [2] での一つのポイントは Ritter–Weiss [16] の理論を見直すことによって, eTNC$^-$ をある加群 (§2 の Ω_S^T) の Fitting ideal の言葉に言い換えたことである. 本稿では, [2] の証明は述べないが, Ω_S^T の構成法と, それを用いた eTNC$^-$ の定式化についてそれぞれ §2, §3 で紹介していく.

2. Ω_S^T の構成

このセクションでは, §3 で述べる同変玉河数予想の定式化の代数側に登場する加群 Ω_S^T の構成法について簡単に紹介する. 詳細は論文 [2] の §2 に述べられているが, その大部分は Ritter–Weiss [16] の仕事に基づいている.

有限アーベル群 G に対し, $\Delta G = \ker(\mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z})$ で augmentation ideal を表すことにする. また, 任意の G の部分群 H に対し, $\nu_H = \sum_{\sigma\in H}\sigma \in \mathbb{Z}[G]$ と書く.

2.1. 局所類体論の基本類. H_w/F_v を局所体の有限次アーベル拡大とし, そのガロア群を G_w とする (§2.3 で, 代数体の有限次アーベル拡大 H/F の有限素点による完備化を考えるため, 最初から記号を統一するために H_w/F_v と書くことにしている).

局所類体論の基本類 $u_{H_w/F_v} \in H^2(G_w, H_w^\times)$ を考える. 正規化された付値による写像 $\mathrm{ord}_w : H_w^\times \to \mathbb{Z}$ により誘導されるコホモロジーの間の写像

$$H^2(G_w, H_w^\times) \to H^2(G_w, \mathbb{Z})$$

を考え, この写像による u_{H_w/F_v} の像を $\bar{u}_{H_w/F_v} \in H^2(G_w, \mathbb{Z})$ と書くことにする. 任意の $\mathbb{Z}[G_w]$-加群 M に対し, 自然な同型,

$$H^2(G_w, M) \simeq \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[G_w]}(\mathbb{Z}, M) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[G_w]}(\Delta G_w, M)$$

を考える. ここで, 2 番目の同型は完全系列 $0 \to \Delta G_w \to \mathbb{Z}[G_w] \to \mathbb{Z} \to 0$ から誘導される写像である. この同型により, $u_{H_w/F_v} \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[G_w]}(\Delta G_w, H_w^\times)$, $\bar{u}_{H_w/F_v} \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[G_w]}(\Delta G_w, \mathbb{Z})$ とみなす. $u_{H_w/F_v} \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[G_w]}(\Delta G_w, H_w^\times)$ に対応する短完全系列を

$$0 \to H_w^\times \to V_w \to \Delta G_w \to 0 \tag{2.1}$$

と表す. また, $\bar{u}_{H_w/F_v} \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[G_w]}(\Delta G_w, \mathbb{Z})$ は以下のように具体的に記述することができる. $I_w \subset G_w$ を惰性群とし, $\mathbb{Z}[G_w]$-加群 W_w を

$$W_w = \{(x, y) \in \Delta G_w \times \mathbb{Z}[G_w/I_w] \mid \bar{x} = (1 - \varphi_v^{-1})y\}$$

と定義する. ここで, $\bar{x}$ は自然な写像 $\mathbb{Z}[G_w] \to \mathbb{Z}[G_w/I_w]$ による x の像, $\varphi_v \in G_w/I_w$ は数論的 Frobenius である. この時, $\mathbb{Z}[G_w]$-加群の完全系列

$$0 \to \mathbb{Z} \to W_w \to \Delta G_w \to 0 \tag{2.2}$$

が存在する. ここで最初の写像 $\mathbb{Z} \to W_w$ は, $n \mapsto (0, n\nu_{G_w/I_w})$ で定義され, 2 番目の写像 $W_w \to \Delta G_w$ は $(x, y) \mapsto x$ である.

Proposition 2.1 (cf. Lemma 5, 6, 7 and Proposition 2 in [16])**.** 以下のことが成り立つ.

(i) 上記の完全系列 (2.1) に出てくる V_w はコホモロジー的に自明な $\mathbb{Z}[G_w]$-加群である.

(ii) 短完全系列 (2.2) は $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[G_w]}(\Delta G_w, \mathbb{Z})$ の中で, $\bar{u}_{H_w/F_v}$ に対応する.

Proposition 2.1 (ii) により, 以下の自然な可換図式,

(2.3)
$$\begin{tikzcd} & U_{H_w} \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & U_{H_w} \arrow[d, hook] & & \\ 0 \arrow[r] & H_w^\times \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ord}_w"'] & V_w \arrow[r] \arrow[d] & \Delta G_w \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & W_w \arrow[r] & \Delta G_w \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

が存在することがわかる. ここで, U_{H_w} は H_w の単数群である.

$\mathbb{Z}[G_w]$-加群の準同型

(2.4)
$$f_w : W_w \to \mathbb{Z}[G_w]$$

を $f_w(x, y) = x + \nu_{I_w} y$ で定義する (任意の $y \in \mathbb{Z}[G_w/I_w]$ に対し, $\nu_{I_w} y \in \mathbb{Z}[G_w]$ は well-defined であることに注意). この時, 容易な計算で以下のことが確かめられる.

Lemma 2.2 (cf. Lemma 5 in [16] and Lemma 3.4 in [1])**.** 以下のことが成り立つ.

(i) (2.4) の準同型 $f_w : W_w \to \mathbb{Z}[G_w]$ は単射であり,
$$\mathrm{coker}\, f_w \simeq \mathbb{Z}[G_w/I_w]/(1 - \varphi_v^{-1} + \# I_w)$$
である.

(ii) H_w/F_v が不分岐拡大の時, $\iota_w(x, y) = y$ で定義される写像
$$\iota_w : W_w \to \mathbb{Z}[G_w]$$
は $\mathbb{Z}[G_w]$-加群の同型写像である.

2.2. **大域類体論の基本類.** H/F を代数体の有限次アーベル拡大とし, そのガロア群を G と書く. C_H を H のイデール類群とする. $u_{H/F} \in H\ 2(G, C_H)$ を大域類体論の基本類とし, §2.1 と同様に自然な同型 $H^2(G, C_H) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[G]}(\Delta G, C_H)$ により, $u_{H/F} \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[G]}(\Delta G, C_H)$ とみなし, これに対応する $\mathbb{Z}[G]$-加群の短完全系列

(2.5)
$$0 \to C_H \to \mathfrak{O} \to \Delta G \to 0$$

を考える. F の有限素点 v と v の上の H の素点 w に対し, それぞれ完備化した局所体の拡大 H_w/F_v を考え, そのガロア群を G_w とする. この時, 大域類体論と局所類体論の整合性により, 以下の 2 つの可換図式,

(2.6)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_w^\times \arrow[r] \arrow[d] & V_w \arrow[r] \arrow[d] & \Delta G_w \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_H \arrow[r] & \mathfrak{O} \arrow[r] & \Delta G \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U_{H_w} \arrow[r] \arrow[d] & V_w \arrow[r] \arrow[d] & W_w \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_H \arrow[r] & \mathfrak{O} \arrow[r] & \Delta G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\tag{2.7}
$$

が存在する. ここで, (2.6) の上の短完全系列は (2.1) であり, (2.7) の上の完全系列は (2.3) の真ん中の縦の完全系列である.

Proposition 2.3 (cf. page 162 in [16]). *完全系列 (2.5) に出てくる $\mathfrak{O}$ はコホモロジー的に自明な $\mathbb{Z}[G]$-加群である.*

2.3. Ω_S^T **の定義.** このサブセクションでは, §2.1, §2.2 の結果を用いて Ω の構成をする.

H/F を有限次 CM-アーベル拡大とし, そのガロア群を $G = \mathrm{Gal}(H/F)$ と書く. S_∞ を F の無限素点の集合とし, $S_{\mathrm{ram}}(H/F)$ で H/F で分岐している F の素点の集合を表す. $c \in G$ を複素共役として, $\mathbb{Z}[G]^- = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][G]/(1+c)$ とする. 任意の $\mathbb{Z}[G]$-加群 M に対して, M のマイナス成分 M^- を $M^- = M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G]^-$ と定義する.

F の素点の有限集合 S, T を 以下の (H1), (H2), (H3) を満たすようにとる.

(H1) $S \supset S_{\mathrm{ram}}(H/F) \cup S_\infty$.
(H2) $S \cap T = \emptyset$.
(H3) $H_T^\times$ は $\mathbb{Z}$-torsion free.

ここで, $H_T^\times = \{x \in H^\times \mid \mathrm{ord}_w(x-1) > 0 \text{ for any } w \in T_H\}$, T_H は T の上の H の素点の集合である.

H の最大実部分体を H^+ とし, 任意の F の素点 v に対し, その分解群, 惰性群をそれぞれ $G_v, I_v \subset G$ と表す. さらに補助的な F の素点の有限集合 S' を以下の (H1'), (H2'), (H3'), (H4'), (H5') を満たすようにとる.

(H1') $S' \supset S$.
(H2') $S' \cap T = \emptyset$.
(H3') $\mathrm{Cl}_{S'}^T(H) = 0$.
(H4') $\cup_{v \in S' \setminus S} G_v = G$.
(H5') ある有限素点 $v_0 \in S' \setminus S$ が存在して, $G_{v_0} = \mathrm{Gal}(H/H^+)$ を満たす.

ここで, $\mathrm{Cl}_{S'}^T(H)$ は H の T_H-ray class group $\mathrm{Cl}^T(H)$ を S'_H (S' の上の H の素点の集合) に属する有限素点の類で生成される部分群で割ったものである (つまり, $\mathrm{Cl}_{S'}^T(H) = \mathrm{coker}(H_T^\times \xrightarrow{\oplus_w \mathrm{ord}_w} \bigoplus_{w \notin S'_H \cup T_H} \mathbb{Z})$ である).

任意の F の素点 v に対し, $H_v^\times = \prod_{w|v} H_w^\times$ とおく. ここで, w は v の上の H の素点を走り, H_w は H の w による完備化である. 同様に任意の F の有限素点 v に対し, $U_v = \prod_{w|v} U_w$, $U_v^1 = \prod_{w|v} U_w^1$, $V_v = \bigoplus_{w|v} V_w$, $W_v = \bigoplus_{w|v} W_w$ と定義する. ここで U_w, U_w^1 はそれぞれ H_w の単数群, 主単数群であり, V_w, W_w は §2.1 で定義されたものである.

$S'_f = S' \setminus S_\infty$ とおく. 以下の $\mathbb{Z}[G]$-加群を考える.

$$\begin{aligned}
J^T &= \prod_{v\in S_\infty} H_v^\times \times \prod_{v\in S'_f} U_v \times \prod_{v\in T} U_v^1 \times \prod_{v\notin S'\cup T} U_v,\\
V_{S'}^T &= \prod_{v\in S_\infty} H_v^\times \times \prod_{v\in S'_f} V_v \times \prod_{v\in T} U_v^1 \times \prod_{v\notin S'\cup T} U_v,\\
W_{S'} &= V_{S'}^T/J^T = \prod_{v\in S'_f} W_v.
\end{aligned}$$

この時, (2.7) により, 以下の可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & J^T \arrow[r] \arrow[d, "\theta_J"'] & V_{S'}^T \arrow[r] \arrow[d, "\theta_V"'] & W_{S'} \arrow[r] \arrow[d, "\theta_W"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_H \arrow[r] & \mathfrak{O} \arrow[r] & \Delta G \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{2.8}$$

が存在することがわかる. この時, S' に関する条件 (H3') , (H4') より次のことが成り立つ.

Lemma 2.4 (cf. Lemma 2.11 in [2])**.** *(2.8) に出てくる写像 θ_V は全射である.*

$\mathcal{O}_H^\times$ を H の単数群とし $\mathcal{O}_{H,T}^\times = \{x \in \mathcal{O}_H^\times \mid \mathrm{ord}_w(x-1) > 0 \text{ for any } w \in T_H\}$ とおく. (2.8) に対して蛇の補題を適応することで, Lemma 2.4 により以下の完全系列

$$0 \to \mathcal{O}_{H,T}^\times \to \ker(\theta_V) \to \ker(\theta_W) \to \mathrm{Cl}^T(H) \to 0, \tag{2.9}$$

が得られる. さらにこの完全系列のマイナス成分を考えると, 条件 (H3) から $(\mathcal{O}_{H,T}^\times)^- = 0$ となることがわかるので, 以下の短完全系列

$$0 \to \ker(\theta_V)^- \to \ker(\theta_W)^- \to \mathrm{Cl}^T(H)^- \to 0, \tag{2.10}$$

が得られる.

ここで, 条件 (H5') を満たす有限素点 $v_0 \in S' \setminus S$ を一つ固定すると, 以下のことが成り立つ.

Lemma 2.5 (Lemma 2.12 in [2])**.** *自然な射影 $W_{S'} \to \bigoplus_{v\in S'_f\setminus\{v_0\}} W_v$ は以下の同型*

$$\ker(\theta_W)^- \simeq \bigoplus_{v\in S'_f\setminus\{v_0\}} W_v^-$$

を誘導する.

ここでついに, Ω_S^T の定義をすることができる. 任意の F の有限素点 v に対し, $\mathbb{Z}[G]$-加群の準同型 $f_v : W_v \to \mathbb{Z}[G]$ を

$$f_v : W_v = \bigoplus_{w\mid v} W_w \overset{\oplus_{w\mid v} f_w}{\longrightarrow} \bigoplus_{w\mid v} \mathbb{Z}[G_w] \simeq \mathbb{Z}[G] \tag{2.11}$$

で定義する. ここで, 写像 f_w は (2.4) で定義されたものであり, 最後の同型は v の上の H の素点を一つ固定することで得られていることに注意する. 同様に, H/F で不分岐な F の有

限素点 v に対し, $\mathbb{Z}[G]$-加群の同型写像 $\iota_v : W_v \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[G]$ を

$$\iota_v : W_v = \bigoplus_{w|v} W_w \xrightarrow{\oplus_{w|v}\iota_w} \bigoplus_{w|v} \mathbb{Z}[G_w] \simeq \mathbb{Z}[G] \tag{2.12}$$

で定義する. ここで, ι_w は, Lemma 2.2 の (ii) で定義されている写像である. $S_f = S \setminus S_\infty$ とおく.

Definition 2.6. $\mathbb{Z}[G]^-$-加群 Ω_S^T を 以下の合成写像の cokernel として定義する:

$$\ker(\theta_V)^- \to \ker(\theta_W)^- \simeq \bigoplus_{v \in S'_f \setminus \{v_0\}} W_v^- \to \bigoplus_{v \in S'_f \setminus \{v_0\}} \mathbb{Z}[G].$$

ここで, 最初の写像は (2.10) に出てくるものであり, 2 番目の同型は Lemma 2.5 の同型であり, 最後の写像の各成分ごとに定義されるもので, $v \in S'_f \setminus (S_f \cup \{v_0\})$ の成分は ι_v, $v \in S_f$ の成分は f_v によって誘導される写像である.

任意の F の有限素点 v に対し, $\varphi_v \in G_v/I_v$ を数論的 Frobenius とし, $\mathbb{Z}[G]$-加群 A_v を $A_v = \mathbb{Z}[G/I_v]/(1 - \varphi_v^{-1} + \#I_v)$ と定義する.

Theorem 2.7 (cf. Proposition 1.2 and 1.3 in [2])**.** *以下のことが成り立つ.*

(i) Ω_S^T *は有限であり, 次の完全系列が存在する*

$$0 \to \mathrm{Cl}^T(H)^- \to \Omega_S^T \to \bigoplus_{v \in S_f} A_v^- \to 0.$$

(ii) Ω_S^T *の* $\mathbb{Z}[G]^-$*-加群としての射影次元は 1 以下である.*

Proof. Lemma 2.2 より, (2.11), (2.12) で定義された f_v, ι_v はどちらも単射であるので, Definition 2.6 の 3 番目の写像 $\bigoplus_{v \in S'_f \setminus \{v_0\}} W_v^- \to \bigoplus_{v \in S'_f \setminus \{v_0\}} \mathbb{Z}[G]$ は単射である. よって, Definition 2.6 の合成写像を ψ とすると, これも単射であり, さらに ψ の定義から以下の可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(\theta_V)^- \arrow[r] \arrow[d, equal] & \ker(\theta_W)^- \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Cl}^T(H)^- \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(\theta_V)^- \arrow[r, "\psi"] & \bigoplus_{v \in S'_f \setminus \{v_0\}} \mathbb{Z}[G]^- \arrow[r] & \Omega_S^T \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

が存在することがわかる. ここで, 上の短完全系列は (2.10) であり, 真ん中の縦の写像は Definition 2.6 の 2 番目と 3 番目の写像の合成である. Lemma 2.2 により, 真ん中の縦の写像の cokernel は $\bigoplus_{v \in S_f} A_v^-$ と同型であることがわかるので, この可換図式に蛇の補題を適用することで, Theorem 2.7 (i) の短完全系列が得られる. また, 任意の F の有限素点 v に対し, $1 - \varphi_v^{-1} + \#I_v$ は $\mathbb{Z}[G/I_v]$ の非零因子であることから, A_v は有限加群であることがわかる. このことから, Ω_S^T の有限性も従う.

Theorem 2.7 (ii) を証明するには, 先程の可換図式の下側の短完全系列から, $\ker(\theta_V)^-$ が $\mathbb{Z}[G]^-$-加群として射影的であることを示せばよい. このことを確かめるには, $\ker(\theta_V)$ が コホモロジー的に自明な $\mathbb{Z}[G]$-加群であることと, $\ker(\theta_V)$ が $\mathbb{Z}$-torsion free であることを示せば十分である.

可換図式 (2.8) と Lemma 2.4 より, 次の短完全系列

$$0 \to \ker(\theta_V) \to V_{S'}^T \xrightarrow{\theta_V} \mathfrak{D} \to 0$$

があることを思い出す. Proposition 2.3 より, $\mathfrak{D}$ はコホモロジー的に自明な $\mathbb{Z}[G]$-加群である. さらに, Proposition 2.1 (i) と 条件 (H1), (H2), (H1'), (H2') により, $V_{S'}^T$ もコホモロジー的に自明な $\mathbb{Z}[G]$-加群である. よって, 上の短完全系列から $\ker(\theta_V)$ もコホモロジー的に自明な $\mathbb{Z}[G]$-加群である.

次に, 完全系列 (2.9) を考える. 条件 (H3) より, $\mathcal{O}_{H,T}^\times$ は $\mathbb{Z}$-torsion free であり, W_S' が $\mathbb{Z}$-torsion free であることから, $\ker(\theta_W)$ もそうである. よって, 完全系列 (2.9) から $\ker(\theta_V)$ も $\mathbb{Z}$-torsion free であることがわかる. □

Remark 2.8. $\mathbb{Z}[G]$-加群 Ω_S^T を Definition 2.6 で定義するために, 補助的な素点の集合 S' を用いたが, Ω_S^T はこの S' の取り方によらないことが確かめられる. 実際, [2, Proposition 2.21] では Theorem 2.7 (i) の短完全系列に対応する $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[G]^-}(\bigoplus_{v\in S_f} A_v^-, \mathrm{Cl}^T(H)^-)$ の元を類体論の相互写像を用いて S' に依らない形で記述している.

Ω_S^T の構成から以下のことが成り立つことが簡単に証明できる.

Proposition 2.9 (Proposition 3.1 in [2])**.** 以下のことが成り立つ.

(i) 任意の F の素点 v で, $v \notin S \cup T$ を満たすものに対して,

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[G]^-}(\Omega_{S\cup\{v\}}^T) = \left(1 - \frac{\nu_{I_v}}{\# I_v}\varphi_v^{-1} + \nu_{I_v}\right)\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[G]^-}(\Omega_S^T)$$

成り立つ.

(ii) 任意の F の素点 v で, $v \notin S \cup T$ を満たすものに対して,

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[G]^-}(\Omega_S^{T\cup\{v\}}) = \left(1 - N(v)\varphi_v^{-1}\right)\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[G]^-}(\Omega_S^T)$$

成り立つ.

3. $\mathbb{G}_m$ のマイナス成分の同変玉河数予想

このセクションでは, §2 で構成した加群 Ω_S^T を用いたマイナス成分の同変玉河数予想の定式化を紹介し, それに関連する話題について述べていく. 引き続き, H/F は代数体の有限次 CM-アーベル拡大, そのガロア群を G と表し, その他の記号も §2.3 のままとする.

3.1. **Stickelberger 元.**

G の任意の指標 ψ に対し, $\mathfrak{f}_\psi$ をその導手とし, L-関数 $L(\psi, s)$ を

$$L(\psi, s) = \prod_{v\nmid \mathfrak{f}_\psi}\left(1 - \frac{\psi(v)}{N(v)^s}\right)^{-1}$$

と定義する. ここで, v は $\mathfrak{f}_\psi$ を割らない F の有限素点を走り, $N(v)$ は F の v での剰余体の位数である. 良く知られているように, この無限積は $\Re(s) > 1$ で収束し, 全複素平面上に解析接続される.

S, T を §2.3 と同様に (H1), (H2), (H3) の条件を満たす F の素点の有限集合とする. この時, T によって補正した L-関数 $L_T(\psi, s)$ を

$$L_T(\psi, s) = \prod_{v\in T}\left(1 - \psi(v)N(v)^{1-s}\right)L(\psi, s)$$

と定義する. これを用いて, 群環の元 ω_T を

$$\omega_T = \sum_{\psi \in \hat{G}} L_T(\psi^{-1}, 0) e_\psi \in \mathbb{C}[G]$$

と定義する. ここで, $e_\psi = \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \psi(\sigma)\sigma^{-1}$ は冪等元である. この時, Siegel–Klingen の結果により, $\omega_T \in \mathbb{Q}[G]$ となることが知られている. これを用いて (S,T)-Stickelberger 元 $\Theta_{S,T}(H/F)$ を

$$\Theta_{S,T,}(H/F) = \prod_{v \in S_f} \left(1 - \frac{\nu_{I_v}}{\#I_v} \varphi_v^{-1}\right) \omega_T$$

と定義する. この時, Deligne–Ribet [11] 又は Cassou–Noguès [9] の結果により, $\Theta_{S,T} \in \mathbb{Z}[G]$ となることが知られている.

次に, (S,T)-Stickelberger 元 $\Theta_{S,T}(H/F)$ を修正した元 $\theta_{S,T}$ の定義を紹介する. この $\theta_{S,T}$ こそが同変玉河数予想の定式化に出てくるものである. 任意の F の有限素点 v に対し, $h_v = 1 - \dfrac{\nu_{I_v}}{\#I_v} \varphi_v^{-1} + \nu_{I_v} \in \mathbb{Q}[G]$ と定義する. これを用いて, $\theta_{S,T} \in \mathbb{Q}[G]$ を

$$\theta_{S,T} = \prod_{v \in S_f} h_v \cdot \omega_T$$

と定義する.

Lemma 3.1. *$\theta_{S,T} \in \mathbb{Z}[G]$ となる.*

Proof. 任意の S_f の部分集合 J に対し, H^J を J に含まれる素点は全て H^J/F で不分岐となる H/F の中間体で最大のものを考える (つまり, $\mathrm{Gal}(H/H^J) = \sum_{v \in J} I_v$ である). この時, 任意の $x \in \mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(H^J/F)]$ に対し, $\prod_{v \in J} \nu_{I_v} x \in \mathbb{Z}[G]$ が well-defined であることに注意すると,

$$\begin{aligned}
\theta_{S,T} = \prod_{v \in S_f} h_v \cdot \omega_T &= \prod_{v \in S_f} \left(1 - \frac{\nu_{I_v}}{\#I_v} \varphi_v^{-1} + \nu_{I_v}\right) \cdot \omega_T \\
&= \sum_{J \subset S_f} \prod_{v \in J} \nu_{I_v} \cdot \prod_{v \in S_f \setminus J} \left(1 - \frac{\nu_{I_v}}{\#I_v} \varphi_v^{-1}\right) \cdot \omega_T \\
&= \sum_{J \subset S_f} \prod_{v \in J} \nu_{I_v} \cdot \Theta_{S \setminus J, T}(H^J/F),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

となる. 前述の Deligne–Ribet [11] 又は Cassou–Noguès [9] の結果から, 任意の $J \subset S_f$ に対し, $\prod_{v \in J} \nu_{I_v} \cdot \Theta_{S \setminus J, T}(H^J/F) \in \mathbb{Z}[G]$ となるので, $\theta_{S,T} \in \mathbb{Z}[G]$ がわかる. □

Remark 3.2. (3.1) で $\theta_{S,T}$ を中間体の Stickelberger 元 $\Theta_{S \setminus J, T}(H^J/F)$ の線型和で記述したが, この式は [2] の主定理 (Theorem 3.7) の証明においても重要な役割を果たす. Dasgupta–Kakde は Brumer–Stark 予想の証明の際に, $\Theta_{S,T}(H/F)$ がフーリエ展開の定数項に現れるような群環係数の保型形式を Eisenstein 級数を用いて構成した (Proposition 8.12 in [10]). 我々は Dasgupta–Kakde が構成した保型形式をさらに (3.1) と同じ形で線型和をとることによって, $\theta_{S,T}$ が定数項に現れる保型形式を構成している (Definition 5.12 in [2]).

3.2. **同変玉河数予想.** 解析的対象の準備も整ったので, ここでついに $\mathbb{G}_m$ のマイナス成分の同変玉河数予想の定式化を述べる.

$c \in G$ を複素共役, $\mathbb{Z}[G]^- = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][G]/(1+c)$ と表していたことを思い出す. 任意の $x \in \mathbb{Z}[G]$ に対し, 自然な環の準同型 $\mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]^-$ における x の像を x^- と書くことにする.

Conjecture 3.3 (マイナス成分の同変玉河数予想 (eTNC$^-$))**.** $\mathbb{Z}[G]^-$ のイデアルとしての等式,

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[G]^-}(\Omega_S^T) = (\theta_{S,T}^-)$$

が成り立つ.

Remark 3.4. 任意の F の素点 $v \notin S \cup T$ に対し, 定義から

$$\theta_{S\cup\{v\},T} = h_v \theta_{S,T}, \ \ \theta_{S,T\cup\{v\}} = (1 - N(v)\varphi_v^{-1})\theta_{S,T},$$

が成り立つことがすぐにわかる. 一方で, Ω_S^T の Fitting ideal も素点の集合 S, T を取り替えた際に, 同じ振る舞いをすることが Proposition 2.9 からわかる. これらのことから, Conjecture 3.3 の正当性は素点の集合, S, T の取り方によらないことがわかる.

Remark 3.5. $\mathbb{G}_m$ のマイナス成分の同変玉河数予想は, [8, Conjecture 2.3 and Remark 2.4] のように determinant 加群を用いて定式化されるのが一般的であるが, Conjecture 3.3 はそれと同値であることが証明できる (Theorem 4.13 in [2]). 実際, Conjecture 3.3 の形の定式化に至ったアイデアは Kurihara の論文 [13] である. [13, Conjecture 3.4] は同変玉河数予想のマイナス成分と同値の予想であり, これをさらに少し修正することで, 著者たちは Conjecture 3.3 の形の定式化に至った.

しかし, 一般の代数体のアーベル拡大に対する $\mathbb{G}_m$ の同変玉河数予想を Conjecture 3.3 のようにある加群の Fitting ideal の言葉で言い換えることは難しいと思われる. CM アーベル拡大のマイナス成分の場合にこれが可能であった最大のポイントは, 完全系列 (2.9) のマイナス成分をとると, 単数群 $\mathcal{O}_{H,T}^\times$ が消えることである. しかし, 一般にはこの単数群もきちんと考慮しないといけないため, Fitting ideal による予想の言い換えは難しいと著者は考えている.

最後に著者と片岡の共同研究によって得られた結果について紹介する. 奇素数 p に対し, $\mathbb{Z}_p[G]^- = \mathbb{Z}_p[G]/(1+c)$ とする. 自然な環の準同型 $\mathbb{Z}[G]^- \to \mathbb{Z}_p[G]^-$ により, $\theta_S^T \in \mathbb{Z}_p[G]^-$ とみなす. この時, Conjecture 3.3 の p-成分を考える.

Conjecture 3.6 (eTNC$^-$ の p-成分)**.** $\mathbb{Z}_p[G]^-$ のイデアルとしての等式,

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]^-}(\Omega_S^T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p) = (\theta_{S,T}^-)$$

が成り立つ.

任意の奇素数 p に対して Conjecture 3.6 が成り立つことと, Conjecture 3.3 が成り立つことは同値であることに注意しておく. 次の定理が [2] の主定理である.

Theorem 3.7 (Theorem 1.1 in [2])**.** *p を奇素数とする. この時, 以下の 3 つの条件のうち 1 つでも満たされていれば, Conjecture 3.6 は成り立つ.*

(i) *p の上の F の素点が少なくとも 1 つは H/F で高々 tamely ramified である（不分岐でもよい）.*

(ii) *$c \in \sum_{v|p} G_v$ が成り立つ. ここで, $\sum_{v|p} G_v$ は p の上の素点の分解群で生成される G の部分群である.*

(iii) $H^{\mathrm{cl},+}(\mu_p) \not\supset H^{\mathrm{cl}}$ が成り立つ．ここで，H^{cl} は H の $\mathbb{Q}$ 上のガロア閉包であり，$H^{\mathrm{cl},+}$ は その最大実部分体であり，μ_p は 1 の p 乗根のなす群である．

Remark 3.8. 最近 Bullach–Burns–Daund–Seo [4] によって, Conjecture 3.3 を完全に解決したという論文が発表された. 彼らは Euler 系の理論を進展させて, さらに Dasgupta–Kakde によって証明された Brumer–Stark 予想と組み合わせることで Conjecture 3.3 を証明している.

References

[1] M. Atsuta and T. Kataoka. Fitting ideals of class groups for CM abelian extensions. *preprint, arXiv:2104.14765*, 2021.
[2] M. Atsuta and T. Kataoka. On the minus component of the equivariant Tamagawa number conjecture for $\mathbb{G}_m$. *preprint, arXiv:2112.04783*, 2021.
[3] W. Bley. Equivariant Tamagawa number conjecture for abelian extensions of a quadratic imaginary field. *Doc. Math.*, 11:73–118, 2006.
[4] D. Bullach, D. Burns, A. Daoud, and S. Seo. Dirichlet L-series at $s = 0$ and the scarcity of euler systems. *preprint, arXiv:2111.14689*, 2021.
[5] D. Burns and M. Flach. Tamagawa numbers for motives with (non-commutative) coefficients. *Doc. Math.*, 6:501–570, 2001.
[6] D. Burns and C. Greither. On the equivariant Tamagawa number conjecture for Tate motives. *Invent. Math.*, 153(2):303–359, 2003.
[7] D. Burns, M. Kurihara, and T. Sano. On zeta elements for $\mathbb{G}_m$. *Doc. Math.*, 21:555–626, 2016.
[8] D. Burns, M. Kurihara, and T. Sano. On Iwasawa theory, zeta elements for $\mathbb{G}_m$, and the equivariant Tamagawa number conjecture. *Algebra Number Theory*, 11(7):1527–1571, 2017.
[9] P. Cassou-Noguès. Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p-adiques. *Invent. Math.*, 51(1):29–59, 1979.
[10] S. Dasgupta and M. Kakde. On the Brumer-Stark conjecture. *preprint, arXiv:2010.00657*, 2020.
[11] P. Deligne and K. A. Ribet. Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields. *Invent. Math.*, 59(3):227–286, 1980.
[12] M. Flach. On the cyclotomic main conjecture for the prime 2. *J. Reine Angew. Math.*, 661:1–36, 2011.
[13] M. Kurihara. Notes on the dual of the ideal class groups of CM-fields. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 33(3):971–996, 2021.
[14] A. Nickel. The strong Stark conjecture for totally odd characters. *preprint, arXiv:2106.05619*, 2021.
[15] K. A. Ribet. A modular construction of unramified p-extensions of $Q(\mu_p)$. *Invent. Math.*, 34(3):151–162, 1976.
[16] J. Ritter and A. Weiss. A Tate sequence for global units. *Compositio Math.*, 102(2):147–178, 1996.
[17] A. Wiles. The Iwasawa conjecture for totally real fields. *Ann. of Math. (2)*, 131(3):493–540, 1990.

Faculty of Science and Technology, Keio University. 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, Kanagawa 223-8522, Japan
Email address: atsuta0128@keio.jp