混標数完備離散付値体の遠アーベル幾何学

京都大学数理解析研究所　室谷　岳寛
Takahiro Murotani
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

1 Introduction

遠アーベル幾何学は，スキームの**エタール基本群**がそのスキーム自身の性質をどの程度反映するかを論じる分野です．（基礎体 K 上幾何的連結かつ有限型な）スキーム X の（適当な基点から定まる）エタール基本群（X の数論的基本群）を $\pi_1(X)$，K の絶対 Galois 群を G_K，K の分離閉包への X の base change のエタール基本群（X の幾何的基本群）を Δ_X とすると，完全列

$$1 \longrightarrow \Delta_X \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow G_K \longrightarrow 1$$

が存在し，この意味で，エタール基本群は数論と幾何が絡み合ってできていると言えます．本稿で論じる体の遠アーベル幾何学は，その**幾何の部分が自明**（1 点）な場合にあたりますが，それでも十分に非自明で面白い問題です．代数体については絶対 Galois 群の同型が（一意的な）体の同型から生じる（Neukirch-内田の定理，cf. [NSW, Theorem 12.2.1, Corollary 12.2.2]）ことが知られており，有限体上の一変数関数体についても内田興二氏により同様の結果が知られています（cf. [U, Theorem]）．また，より強く，絶対 Galois 群から体の構造を**単遠アーベル的**（cf. §2，[Mo4]，[H1]，[H2]）に復元できることが，代数体については星裕一郎氏により（cf. [H2, Theorem A]），一変数関数体については本質的には内田氏により（cf. [U]，さらに [Sa] でその復元のアルゴリズムが明示的に書き下されています）知られています．一方で，Neukirch-内田の定理の単純な類似は p 進局所体に対しては成り立たないことが知られています（cf. [NSW, §7.5]）が，望月新一氏により分岐フィルトレーションを保つ p 進局所体の絶対 Galois 群の同型は（一意的な）体の同型から生じることが示されており（cf. [Mo1, Theorem 4.2]），さらにこの結果は Victor Abrashkin 氏により，正標数局所体（cf. [A1, Theorem A], [A3, Theorem A]）（さらに剰余体が標数 3 以上の高次元局所体（cf. [A2, Theorems 5, 6]））にも拡張されています．

遠アーベル幾何学を提唱した Grothendieck 自身は，遠アーベル幾何学は**素体上有限生成**な体上で行うものと想定していたようです（cf., e.g., [SL]）が，上述の結果や，双曲的曲線の遠アーベル性に関する様々な結果（例えば，一般化劣 p 進体（つまり $\mathbb{Q}_p$ の最大不分岐拡大体の完備化上有限生成な体の部分体に同型な体）上の双曲的曲線に対する Grothendieck 予想（cf. [Mo2, Theorem 4.12]））は，より広いクラスの基礎体上で遠アーベル幾何学が展開できる可能性を示唆しています．そこで本稿では，一般の剰余完全な混標数完備離散付値体（以下，GMLF と呼びます（cf. Definition 2.1））の遠アーベル幾何学について論じます．まず，§2 では，GMLF の分岐フィルトレーション付き絶対 Galois 群から様々な不変量を単遠アーベル的に復元します．さらに，§3 では，GMLF の絶対 Galois 群の間の準同型のうち，ある種の構造を保つものが，どの程度その体たち自身（あるいはその部分体たち）の間の準同型に由来するかについて論じます．

本稿は，「代数的整数論とその周辺 2021」における筆者の講演の一部をまとめ，遠アーベル幾何学における基礎的な事項や最近の研究等についての内容を付け加えたものです．

2 GMLF の種々の不変量の単遠アーベル的復元

この節では，剰余完全な混標数完備離散付値体の（分岐フィルトレーション付き）絶対 Galois 群からの体の様々な不変量の単遠アーベル的復元について論じます．（分岐フィルトレーションの一般論については，[Se1]，[Mu] をご覧ください．）

まずは，**単遠アーベル的復元**について簡単に例を挙げて説明しておきましょう（詳しくは，[Mo4]，[H1]，[H2] をご覧ください）．単遠アーベル的復元と対になる概念として，**双遠アーベル的復元**があります．例えば，「混標数局所体の絶対 Galois 群から剰余標数を双遠アーベル的に復元する」とは，2 つの混標数局所体 K_1, K_2 とその剰余標数 p_1, p_2 について，「$G_{K_1} \simeq G_{K_2}$ ならば $p_1 = p_2$」（ただし G_{K_1}, G_{K_2} はそれぞれ K_1, K_2 の絶対 Galois 群）という命題を示すことにあたります（$G_{K_1} \simeq G_{K_2}$ の代わりに，両者の間に適切な条件を満たす準同型が存在することを仮定する場合もあります）．この場合，$p_1 = p_2$ がどの素数であるかについては問題にしません．一方で，「混標数局所体の絶対 Galois 群から剰余標数を単遠アーベル的に復元する」とは，混標数局所体 K の絶対 Galois 群 G_K から**群論的な手続き**により剰余標数 p_K を特徴づけることにあたります．この場合は，例えば，G_K のアーベル化 G_K^{ab} をそのねじれ部分群（の閉包）で割った群を $G_K^{\mathrm{ab/tor}}$ と定めると，局所類体論より，

$$\log_l(\sharp(G_K^{\mathrm{ab/tor}}/l \cdot G_K^{\mathrm{ab/tor}})) \geq 2$$

を満たす唯一の素数 l として剰余標数 p_K が特徴づけられます（cf. [H1, Proposition 3.6]）．当然，単遠アーベル的復元が可能であれば双遠アーベル的復元が可能ですが，双遠アーベル的に論じられた復元において，その証明を詳細に見れば実際は単遠アーベル的な復元がなされている場合も少なくありません．

以下の議論においては，剰余体が有限か否かが重要なポイントになりますので，次のような定義をしておきます：

Definition 2.1 (cf. [Mu, Definition 1.12])
K を混標数完備離散付値体とする．このとき，K が MLF（i.e., “Mixed-characteristic Local Field”）(resp. GMLF（i.e., “Generalized Mixed-characteristic Local Field”）) であるとは，剰余体が有限体（resp. 完全体）であることをいう

以下，この節では K を GMLF とし，この K に対し，p_K を剰余標数，e_K を絶対分岐指数（つまり v_K を $v_K(K^\times)=\mathbb{Z}$ なる付値としたときの $v_K(p_K)$ の値），$\overline{K}$ を K の代数閉包，G_K を絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$，$\mathfrak{G}_K=\{G_K^v\}_{v\in\mathbb{R}_{\geq -1}}$ を分岐フィルトレーション付きの絶対 Galois 群，I_K（resp. P_K）を G_K の惰性群（resp. 暴分岐群），$\chi_{p_K}:G_K\to\mathbb{Z}_{p_K}^\times$（resp. $\chi_{p_K,n}:G_K\to(\mathbb{Z}/p_K^n\mathbb{Z})^\times$ $(n\in\mathbb{Z}_{>0})$）を p_K 進円分指標（resp. $\mathrm{mod}\,p_K^n$ 円分指標），$\zeta_{p_K^n}\in\overline{K}$（$n\in\mathbb{Z}_{>0}$）を 1 の原始 p_K^n 乗根，k_K を K の剰余体，G_{k_K} を k_K の絶対 Galois 群とします．さらに，K が MLF であるときには，f_K を拡大次数 $[k_K:\mathbb{F}_{p_K}]$，d_K を拡大次数 $[K:\mathbb{Q}_{p_K}]$ とします．

以下では，GMLF の絶対 Galois 群 G_K，あるいは分岐フィルトレーション付き絶対 Galois 群 $\mathfrak{G}_K$ が与えられている状況で，K の様々な不変量を単遠アーベル的に復元することを考えます．まず，重要なポイントである K が MLF であるか否かについては，G_K から群論的に判定することができます：

Proposition 2.2 (cf. [Mu, Proposition 1.13])
K が GMLF であるとき，K が MLF であることと G_K が位相的有限生成であることは同値である．

したがって，G_K というデータが与えられている場合には，K が MLF であるか否かはわかっているものとして議論を進めてよいことになります．以下の議論では概ね，K が MLF の場合には G_K，K が必ずしも MLF でない場合には $\mathfrak{G}_K$ を復元に用いるデータとしています．

<u>p_K の復元</u>

Case 1. **K が MLF である場合**

この場合については既に単遠アーベル的復元の説明において扱いました．

Case 2. **K が必ずしも MLF でない場合**

$\mathfrak{G}_K$ が与えられているとすれば，p_K は $P_K=\overline{\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}} G_K^{0+\varepsilon}}$ が副 l 群であるような唯一の素数 l として特徴づけられます（[Mu, Proposition 3.6]）が，G_K のみが与えられている場合にも次のように特徴づけることができます（この事実は辻村昇太さんに指摘していただいた

ものです）：

K が MLF でない（したがって G_K が位相的有限生成でない）場合を考えます．副有限群 G と素数 l に対し，G の最大副 l 商を $G(l)$ とします．$l = p_K$ の場合，[MT, Theorem A] より，G_K の任意の開部分群 H に対し，$H(l)$ は very elastic（副有限群 G が very elastic とは，G が位相的有限生成でなく，任意の開部分群の位相的有限生成閉正規部分群が自明群に限ることをいう）です．次に，$l \neq p_K$ の場合を考えます．K に 1 の原始 l 乗根を添加した拡大体を L とし，対応する開部分群 $G_L \subset G_K$ を考え，$G_L(l)$ が very elastic でないことを示しましょう．自然な準同型 $I_L(l) \to G_L(l)$ の像を J_L とすると，J_L は $G_L(l)$ の閉正規部分群で，明らかに位相的有限生成です（$I_L(l) \simeq \mathbb{Z}_l$ であることに注意）．ところが，L はその uniformizer の l 乗根を添加して得られる l 次（馴分岐）巡回拡大を持ちますから，J_L は非自明であり，$G_L(l)$ が very elastic でないことがわかります．以上により，p_K は G_K の任意の開部分群 H に対して $H(l)$ が very elastic となる唯一の素数 l として特徴づけられます．

e_K，$G_{K(\zeta_{p_K})} \subset G_K$（及び d_K，f_K（K が MLF の場合））の復元

Case 1. **K が MLF である場合**

剰余標数 p_K は既に復元されていますので，局所類体論より，まず，d_K と f_K が

$$d_K = \log_{p_K}(\sharp(G_K^{\mathrm{ab/tor}}/p_K \cdot G_K^{\mathrm{ab/tor}})) - 1,$$
$$f_K = \log_{p_K}(1 + \sharp((G^{\mathrm{ab/tor}})^{p'_K})),$$

（ただし $(G^{\mathrm{ab/tor}})^{p'_K}$ は $G_K^{\mathrm{ab/tor}}$ の p_K-Sylow 部分群による商）と単遠アーベル的に復元され，したがって $e_K = \dfrac{d_K}{f_K}$ として絶対分岐指数 e_K が復元されます（cf. [H1, Proposition 3.6]）．さらに，G_K のアーベル化 G_K^{ab} のねじれ部分群を $G_K^{\text{ab-tor}}$ とするとき，局所類体論より，K が 1 の原始 p_K 乗根を含むことと，$G_K^{\text{ab-tor}}$ の位数が p_K で割り切れることは同値です．したがって，開（正規）部分群 $G_{K(\zeta_{p_K})} \subset G_K$ は，G_K の開部分群であって，そのアーベル化のねじれ部分群の位数が p_K で割り切れるもののうち，ただ一つの極大なものとして特徴づけられます．

Case 2. **K が必ずしも MLF でない場合**

$\mathfrak{G}_K$ が与えられているとして，e_K を復元します．

L を K の有限次 Galois 拡大とするとき，$\mathfrak{G}_K$ から $\mathrm{Gal}(L/K)$ の下付き分岐フィルトレーション $\{\mathrm{Gal}(L/K)_u\}_{u \in \mathbb{R}_{\geq -1}}$ が定まります．$\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ に対し，

$$s_{\mathrm{Gal}(L/K)}(\sigma) = \begin{cases} 0, & (\text{任意の } u \in \mathbb{R}_{>-1} \text{ に対して } \sigma \notin \mathrm{Gal}(L/K)_u), \\ \sup\{u \in \mathbb{R}_{\geq -1} \,|\, \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)_u\}, & (\text{その他}), \end{cases}$$

と定めます（$s_{\mathrm{Gal}(L/K)}(\mathrm{id}) = \infty$ と約束します）．

次の命題は $\mathfrak{G}_K$ から e_K を復元するための鍵となります：

Proposition 2.3 ([MW, Theorems 1, 2, 3])
L/K を p_K 次巡回拡大で，暴分岐拡大であるとする．σ を $\mathrm{Gal}(L/K)$ の生成元とするとき，

$$s_{\mathrm{Gal}(L/K)}(\sigma) \leq \left\lfloor \frac{p_K e_K}{p_K - 1} \right\rfloor,$$

（ただし $\lfloor x \rfloor$ で x を超えない最大の整数を表す）が成り立つ．等号が成立することと，K が 1 の原始 p_K 乗根を含み，かつ $L = K(\alpha)$（ただし α は $X^{p_K} - \beta \in K[X]$ の根で，$\beta \in K^\times$, $v_K(\beta) \notin p_K\mathbb{Z}$）であることは同値である．

さらに，K が原始 p_K 乗根を含まないとき，$s_{\mathrm{Gal}(L/K)}(\sigma) \notin p_K\mathbb{Z}$ である．

Proposition 2.3 より，G_K の開部分群 H であって，次の条件を満たすもののうち（ただ一つの）極大なものは K に 1 の原始 p_K 乗根を添加した体に対応します：

> H は指数 p_K の正規開部分群 H' で，$s_{H/H'}(\sigma) \in p_K\mathbb{Z}$（$\sigma$ は H/H' $(\simeq \mathbb{Z}/p_K\mathbb{Z})$ の生成元）となるものを持つ．

この条件を満たす G_K の開部分群のうち，ただ一つの極大なものを H_0 $(= G_{K(\zeta_{p_K})})$ とし，

$$s = \max\{s_{H_0/H'}(\sigma_{H'}) \,|\, H' \subset H_0 \text{は指数}\, p_K \,\text{の正規開部分群，}\sigma_{H'}\, \text{は}\, H_0/H' \,\text{の生成元}\, \}$$

と定めると，再び Proposition 2.3 より

$$e_{K(\zeta_p)} = \frac{s(p_K - 1)}{p_K}$$

が得られます．$e_{K(\zeta_p)} = (I_K : I_{K(\zeta_p)}) \cdot e_K$ $(= (I_K : I_K \cap H_0) \cdot e_K)$ なので，以上で e_K 及び $G_{K(\zeta_{p_K})} \subset G_K$ が $\mathfrak{G}_K$ から復元されました（cf. [Mu, Proposition 2.4]）．

<u>円分指標の復元</u>

Case 1. K が MLF である場合

p_K 進円分指標 $\chi_{p_K} : G_K \to \mathbb{Z}_{p_K}^\times$ を単遠アーベル的に復元するには，各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\mathbb{Z}/p_K^n\mathbb{Z}(1)$ の G_K 加群としての同型類を（単遠アーベル的に）復元すれば十分ですが，Tate duality より，G_K 加群 M が $\mathbb{Z}/p_K^n\mathbb{Z}(1)$ に同型であることと $H^2(G_K, M) \simeq \mathbb{Z}/p_K^n\mathbb{Z}$ であることが同値です（cf. [Mo1, §1]）．

Case 2. K が必ずしも MLF でない場合

この場合は Tate duality は使えず，現時点で $\mathfrak{G}_K$ から単遠アーベル的に復元できるのは $\mathrm{mod}\, p_K$ 円分指標 $\chi_{p_K,1} : G_K \to (\mathbb{Z}/p_K\mathbb{Z})^\times$ のみです．以下では，G_K 加群としての $\mathbb{Z}/p_K\mathbb{Z}(1) \simeq \mu_{p_K}$ の同型類を復元します．

$L = K(\zeta_{p_K})$ とします（上の議論より，部分群 $G_L \subset G_K$ およびその分岐フィルトレーション $\mathfrak{G}_L$ は $\mathfrak{G}_K$ から単遠アーベル的に復元されます）．Kummer 理論から標準的に定まる G_K 加群の同型 $\varphi : L^\times/(L^\times)^{p_K} \xrightarrow{\sim} H^1(G_L, \mu_{p_K})$ を考え，さらに G_L 加群の同型 $\theta : \mu_{p_K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p_K\mathbb{Z}$ を一つとり，それに対応する G_L 加群の同型 $\psi : H^1(G_L, \mu_{p_K}) \xrightarrow{\sim} H^1(G_L, \mathbb{Z}/p_K\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(G_L^{\mathrm{ab}}/p_K \cdot G_L^{\mathrm{ab}}, \mathbb{Z}/p_K\mathbb{Z})$ を考えます．$W_L := \mathcal{O}_L^\times/(\mathcal{O}_L^\times)^{p_K} \subset L^\times/(L^\times)^{p_K}$，$W := \psi(\varphi(W_L)) \subset \mathrm{Hom}(G_L^{\mathrm{ab}}/p_K \cdot G_L^{\mathrm{ab}}, \mathbb{Z}/p_K\mathbb{Z})$ と定めます（部分群 W は θ の取り方に依らないことに注意）．

このとき，非自明な元 $f \in \mathrm{Hom}(G_L^{\mathrm{ab}}/p_K \cdot G_L^{\mathrm{ab}}, \mathbb{Z}/p_K\mathbb{Z})$ が W に属することと，次の条件は同値です：

> f が定める L の p_K 次巡回拡大を L' とするとき，
> $$s_{\mathrm{Gal}(L'/L)}(\sigma) < \frac{p_K e_L}{p_K - 1},$$
> （ただし σ は $\mathrm{Gal}(L'/L)$ の生成元）が成り立つ．

これは $\mathfrak{G}_K$ から判定できる条件ですので，W は $\mathfrak{G}_K$ から単遠アーベル的に復元されます．したがって，

$$M := \{\tau \in G_L^{\mathrm{ab}}/p_K \cdot G_L^{\mathrm{ab}} \mid \text{任意の } f \in W \text{ に対して } f(\tau) = 0\} \subset G_L^{\mathrm{ab}}/p_K \cdot G_L^{\mathrm{ab}}$$

も $\mathfrak{G}_K$ から復元されます．

一方で，G_K 加群の完全列

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_L^\times/(\mathcal{O}_L^\times)^{p_K} \longrightarrow L^\times/(L^\times)^{p_K} \longrightarrow \mathbb{Z}/p_K\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

は（アーベル群の完全列として）分裂するので，次のような G_K 加群の完全列が得られます：

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p_K\mathbb{Z}, \mu_{p_K}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(L^\times/(L^\times)^{p_K}, \mu_{p_K}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(W_L, \mu_{p_K}) \longrightarrow 0.$$

さらに，Pontryagin duality を用いて φ から定まる標準的な G_K 加群の同型 $\mathrm{Hom}(L^\times/(L^\times)^{p_K}, \mu_{p_K}) \xrightarrow{\sim} G_L^{\mathrm{ab}}/p_K \cdot G_L^{\mathrm{ab}}$ があり，この同型により部分群 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p_K\mathbb{Z}, \mu_{p_K}) \subset \mathrm{Hom}(L^\times/(L^\times)^{p_K}, \mu_{p_K})$ は $M \subset G_L^{\mathrm{ab}}/p_K \cdot G_L^{\mathrm{ab}}$ に対応します．つまり，G_K 加群としての同型 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p_K\mathbb{Z}, \mu_{p_K})\ (= \mu_{p_K}) \xrightarrow{\sim} M$ があり，M は $\mathfrak{G}_K$ から単遠アーベル的に復元されるので，μ_{p_K} の同型類が復元されました（cf. [Mu, Proposition 2.8]）．

GMLF の絶対分岐指数 e_K 及び $\mathrm{mod}\, p_K$ 円分指標（特に K が 1 の原始 p_K 乗根を含むか否かという情報）の単遠アーベル的復元により，ある種の特殊な GMLF に対しては K の同型類が $\mathfrak{G}_K$ 及び k_K の同型類から完全に決定されますが，これについては [Mu, Theorems 3.9, 3.10] をご覧ください．

3 GMLF の絶対 Galois 群と種々の構造を保つ準同型

冒頭にも述べた通り，代数体においてはその絶対 Galois 群から体の同型類が単遠アーベル的に復元される（cf. [H2, Theorem A]）ので，その類似を MLF や GMLF で考えるのは自然なことです．しかし，位相群として同型な絶対 Galois 群を持ち，かつ体としては同型でない MLF の組の存在が知られていますので，適切な問題設定を考える必要があります．MLF の分岐フィルトレーション付き絶対 Galois 群に対する Neukirch-内田の定理の類似が成り立つ（cf. [Mo1, Theorem 4.2]）ことから，MLF または GMLF の分岐フィルトレーション付き絶対 Galois 群からの体の単遠アーベル的復元はありうる問題設定の 1 つですが，現時点では極めて限定的なこと（cf. [Mu, Theorems 3.9, 3.10]）しか言えておらず，（適切な設定の下でも）実現可能であるかどうかは筆者にはわかりません．

一方で，双遠アーベル的な設定では，肯定的な結果はいくつか知られています．この設定においても Neukirch-内田の定理の類似はそのままでは成立せず，2 つの MLF または GMLF の絶対 Galois 群の間の準同型に，**何らかの構造を保つ**ことを要請する必要があります．上にも書いた MLF の分岐フィルトレーション付き絶対 Galois 群に対する Neukirch-内田の定理の類似は代表例ですが，他にも様々な設定が考えられます．この節では，既存の双遠アーベル的結果（いずれも MLF に対するもの）をいくつか紹介した上で，それらの GMLF への（適切な）拡張の可能性を論じます．

以下では，$i = 1, 2$ に対し，K_i を GMLF，$\hat{\overline{K_i}}$ を K_i の代数閉包 $\overline{K_i}$ の完備化，G_{K_i} を K_i の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{K_i}/K_i)$，$I_{K_i}$ を K_i の惰性群，p_i を K_i の剰余標数，$\chi_{K_i} : G_{K_i} \to \mathbb{Z}_{p_i}^{\times}$ を p_i 進円分指標とします．

"構造を保つ" 絶対 Galois 群の間の準同型として，次のようなものを考えます（cf. [Mu, Definition 1.8]，[Mo3, Definitions 3.1, (iv) and 3.6, (iii)]，[H3, Definition 1.3, (i)]）：

Definition 3.1
$\alpha : G_{K_1} \to G_{K_2}$ を（連続な）準同型とする．

(i) α が RF-preserving（i.e., "Ramification Filtration preserving"）であるとは，α が（[Mu, Definition 1.8] の意味で）分岐フィルトレーションを保つことをいう．

(ii) α が of HT-type（i.e., "Hodge-Tate type"）であるとは，$p_1 = p_2$ で，かつ $\hat{\overline{K_2}}$ を（α を通して）位相 G_{K_1} 加群とみなしたものが，（位相 G_{K_1} 加群として）$\hat{\overline{K_1}}$ に同型であることをいう．

(iii) α が of CHT-type（i.e., "Cyclotomic Hodge-Tate type"）であるとは，α が of HT-type で，かつ $\chi_{K_1} = \chi_{K_2} \circ \alpha$ が成り立つことをいう．

(iv) α が HT-preserving（i.e., "Hodge-Tate preserving"）であるとは，任意の Hodge-

Tate 表現 $\phi : G_{K_2} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ に対し，$\phi \circ \alpha : G_{K_1} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ が Hodge-Tate であることをいう．

(v) α が幾何的であるとは，α が埋め込み $\overline{K_2} \hookrightarrow \overline{K_1}$ であって，K_2 を K_1 にうつすものから誘導されることをいう．

(vi) α が inertially open であるとは，$\alpha(I_{K_1})$ が I_{K_2} の開部分群であることをいう．

明らかに，準同型 α が幾何的ならば RF-preserving かつ of CHT-type であり，of CHT-type ならば of HT-type かつ HT-preserving です．さらに，MLF に関しては，次が知られています：

Theorem 3.2

K_1, K_2 は MLF であるとし，$\alpha : G_{K_1} \to G_{K_2}$ を準同型とする．

(1) α が同型かつ RF-preserving ならば幾何的である（cf. [Mo1, Theorem 4.2]）．

(2) α が開準同型でかつ of CHT-type ならば幾何的である（cf. [Mo3, Theorem 3.5, (i)]）．

(3) α が開準同型でかつ HT-preserving ならば幾何的である（cf. [H3, Theorem]）．

（なお，Theorem 3.2 の (1) に関しては，単射開準同型版も同型版から直ちに従います（cf. [A1, Theorem A]，[A3, Theorem A]）．）

Theorem 3.2 のいずれの結果においても，Hodge-Tate 表現に関するある事実が重要となるのですが，それを述べるために準備をします（cf. [Se2, III, §A.3～§A.5], [Mo3, Definition 3.1]）：

Definition 3.3

K を GMLF とし，p_K, G_K, I_K を前節と同様に定める．

(i) A を位相アーベル群，$\rho, \rho' : G_K \to A$ を連続準同型とする．ある開部分群 $H \subset I_K$ が存在して $\rho|_H$ と $\rho'|_H$ が一致するとき，ρ と ρ' は inertially equivalent であるといい，$\rho \equiv \rho'$ と書く．

(ii) E を p_K 進局所体で，全ての $\mathbb{Q}_{p_K}$ 上の共役が K に含まれるものとする．埋め込み $\sigma : E \hookrightarrow K$ を固定し，π_E を E の uniformizer とする．このとき，準同型 χ_{σ,π_E} を

$$\chi_{\sigma,\pi_E} : G_K \to G_E^{\mathrm{ab}} \to \mathcal{O}_E \times \pi_E^{\hat{\mathbb{Z}}} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_E^{\times} \to \mathcal{O}_E^{\times}$$

（ただし，最初の準同型は σ が誘導するもの，2 つ目の準同型は局所類体論と π_E によって定まる同型，3 つ目の準同型は射影，4 つ目の準同型は逆数をとることで与えられるもの）で定める．χ_{σ,π_E} の inertial equivalence class は π_E の取り方に依らないので，χ_{σ,π_E} を単に χ_σ と書くこともある．

次が Theorem 3.2 の各主張を証明する上で鍵となる命題で，GMLF への拡張を考える上でも重要です：

Proposition 3.4 (cf. [Se2, III, §A.5, Corollary], [Mo3, Proposition 3.2])
K, E を Definition 3.3 と同様にとり，$\hat{\overline{K}}$ を K の代数閉包 $\overline{K}$ の完備化，$\rho : G_K \to E^\times$ を指標とする．V_ρ を G_K を（ρ を通して）E に作用させて得られる G_K 加群とする．このとき，ρ が Hodge-Tate であることと，以下が成り立つことは同値である：

$$\rho \equiv \prod_{\sigma \in \mathrm{Emb}(E,\, K)} \chi_\sigma^{n_\sigma},\ (n_\sigma \in \mathbb{Z}).$$

（ただし $\mathrm{Emb}(E,\, K)$ は $\mathbb{Q}_{p_K}$ 上の埋め込み $E \hookrightarrow K$ がなす集合である．）さらにこのとき，$\hat{\overline{K}}[G_K]$ 加群の同型

$$V_\rho \otimes_{\mathbb{Q}_{p_K}} \hat{\overline{K}} \simeq \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Emb}(E,\, K)} \hat{\overline{K}}(n_\sigma),$$

（ただし “(n_σ)” は第 n_σ-Tate 捻り）が存在する．

以下では，Theorem 3.2 の (1)〜(3) が K_1, K_2 が GMLF である場合に（適切な意味で）拡張できるかどうかを検討します．

<u>Theorem 3.2 (1) の拡張について</u>

[Mo1] における Theorem 3.2 (1) の証明においては，Proposition 3.4 を使える状況に持ち込むために円分指標及び $\hat{\overline{K}}$ の（G_K 加群としての）同型類を分岐フィルトレーション付き絶対 Galois 群から復元しています．一方で，前節にあるように，GMLF に対しては $\mathrm{mod}\, p_K$ 円分指標しか復元できておらず，$\hat{\overline{K}}$ の同型類も復元できていないので，まずはこれらの復元を目指す必要がありそうです．

一方で，RF-preserving な準同型について，次が示されています：

Proposition 3.5 (cf. [Mu, Proposition 2.15, Remark 2.19])
K_1 を MLF，K_2 を GMLF とし，RF-preserving な準同型 $\alpha : G_{K_1} \to G_{K_2}$ が存在すると仮定する．このとき，K_2 は MLF であり，α は単射開準同型となる．

これと Theorem 3.2 (1) の単射開準同型版（cf. [A1, Theorem A]，[A3, Theorem A]）により，Theorem 3.2 (1)（及び [A1, Theorem A]，[A3, Theorem A]）の 1 つの拡張として，次が得られます：

Theorem 3.6
K_1 を MLF，K_2 を GMLF とし，$\alpha : G_{K_1} \to G_{K_2}$ を準同型とする．α が RF-preserving ならば幾何的である．

Theorem 3.2 (2) の拡張について

Proposition 3.4 が GMLF の絶対 Galois 群の Hodge-Tate 表現と，MLF の GMLF への埋め込みの関係を記述するものである以上，K_1, K_2 を GMLF としたときに of CHT-type な準同型 $\alpha : G_{K_1} \to G_{K_2}$ それ自体の幾何性をこの Proposition を用いて示すことは難しそう（せいぜい局所体上代数的な部分の情報しか得られなさそう）です．現状で得られている結果を述べるために，記号を導入します．K_i（$i = 1, 2$）に対し，F_i^{alg} を K_i での $\mathbb{Q}_{p_i}$ の代数閉包，F_i を F_i^{alg} の K_i での（位相）閉包，G_{F_i} を F_i の絶対 Galois 群とします．このとき，F_i は剰余体が $\mathbb{F}_{p_i}$ 上代数的であるような GMLF です．

次の定理は，現在，論文を準備中です：

Theorem 3.7

K_1, K_2 を GMLF とし，$\alpha : G_{K_1} \to G_{K_2}$ を inertially open かつ of CHT-type な準同型とする．このとき，次の可換図式が存在する：

$$\begin{array}{ccc} G_{K_1} & \xrightarrow{\alpha} & G_{K_2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_{F_1} & \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} & G_{F_2} \end{array}$$

ここで，縦向きの全射は自然な包含写像 $F_i \hookrightarrow K_i$（$i = 1, 2$）が誘導するものである．さらに，$\tilde{\alpha}$ は単射かつ幾何的である．

（「代数的整数論とその周辺 2021」における筆者の講演では，さらに α が単射であるという仮定を置いていましたが，この仮定は外すことができます．）

これから直ちに，次のような Theorem 3.2 (2) の拡張が得られます：

Corollary 3.8

K_1, K_2 は GMLF で，その剰余体が素体上代数的であるとする．このとき，準同型 $\alpha : G_{K_1} \to G_{K_2}$ が inertially open かつ of CHT-type であるならば幾何的である．

Theorem 3.2 (3) の拡張について

Theorem 3.2 (3) により，MLF の絶対 Galois 群の間の開準同型が HT-preserving であることと幾何的であることは同値で，特に HT-preserving であれば of CHT-type（したがってこれらの 2 条件も同値）です．一方で，上の Theorem 3.2 (2) の拡張で論じたのと同様に，Proposition 3.4 を使う方針では，一般の GMLF の絶対 Galois 群の間の準同型の HT-preserving 性から準同型それ自体の幾何性を導くことは困難であると思われます．また，HT-preserving と of CHT-type の同値性も現状では示せていません（当然，成り立

たない可能性もあります）．ただし，単射かつ inertially open で HT-preserving な準同型 $\alpha : G_{K_1} \to G_{K_2}$ については，Theorem 3.7 と類似の結果が成り立つことを示唆する知見が得られており，現在，検討と論文の準備を行っているところです．

謝辞

「代数的整数論とその周辺 2021」において講演の機会をくださったオーガナイザーの先生方に心より感謝申し上げます．また，原稿を読んでコメントをくださった玉川安騎男先生，「代数的整数論とその周辺 2021」における筆者の講演において §3 の Theorem 3.2 (3) の拡張を考えるきっかけとなる質問をくださった志甫淳先生，§3 の Theorem 3.2 (3) の拡張に関してコメントをくださった星裕一郎先生，山下剛先生，GMLF の絶対 Galois 群から分岐フィルトレーションを用いずに剰余標数を復元できることを指摘してくださった辻村昇太さんに心より感謝申し上げます．

参考文献

[A1] Victor A. Abrashkin, On a local analogue of the Grothendieck conjecture, *Internat. J. Math.* **11** (2000), no. 2, 133–175.

[A2] Victor A. Abrashkin, An analogue of the field-of-norms functor and of the Grothendieck conjecture, *J. Algebraic Geom.* **16** (2007), no. 4, 671–730.

[A3] Victor A. Abrashkin, Modified proof of a local analogue of the Grothendieck conjecture, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **22** (2010), no. 1, 1–50.

[H1] Yuichiro Hoshi, *Introduction to mono-anabelian geometry,* RIMS Preprint **1868** (January 2017).

[H2] Yuichiro Hoshi, Mono-anabelian reconstruction of number fields, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B76** (2019), 1–77.

[H3] Yuichiro Hoshi, *A note on the geometricity of open homomorphisms between the absolute Galois groups of p-adic local fields, Kodai Math. J.* **36** (2013), no. 2, 284–298.

[MW] Robert E. MacKenzie, George Whaples, Artin-Schreier equations in characteristic zero, *Amer. J. Math.* **78** (1956), 473–485.

[MT] Arata Minamide, Shota Tsujimura, *Anabelian Group-theoretic Properties of the Pro-p Absolute Galois Groups of Henselian Discrete Valuation Fields,* RIMS Preprint **1952** (August 2021).

[Mo1] Shinichi Mochizuki, A version of the Grothendieck conjecture for p-adic local fields, *Internat. J. Math.* **8** (1997), no. 4, 499–506.

[Mo2] Shinichi Mochizuki, Topics surrounding the anabelian geometry of hyperbolic curves, *Galois groups and fundamental groups, Math. Sci. Res. Inst. Publ.* **41**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003, 119–165.

[Mo3] Shinichi Mochizuki, Topics in absolute anabelian geometry I: generalities, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **19** (2012), no. 2, 139–242.

[Mo4] Shinichi Mochizuki, Topics in absolute anabelian geometry III: global reconstruction algorithms, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **22** (2015), no. 4, 939–1156.

[Mu] Takahiro Murotani, *Anabelian geometry of complete discrete valuation fields and ramification filtration,* RIMS Preprint **1945** (March 2021).

[NSW] Jürgen Neukirch, Alexander Shmidt, Kay Wingberg, *Cohomology of number fields; Second edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* **323**, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[Sa] Koichiro Sawada, Algorithmic approach to Uchida's theorem for one-dimensional function fields over finite fields, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B84** (2021), 1–21.

[SL] Leila Schneps, Pierre Lochak (eds.), *Geometric Galois actions; 1. Around Grothendieck's "Esquisse d'un Programme", London Mathematical Society Lecture Note Series* **242**, Cambridge university Press, Cambridge, 1997.

[Se1] Jean-Pierre Serre, *Local fields, Graduate Texts in Mathematics* **67**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979.

[Se2] Jean-Pierre Serre, *Abelian l-adic representations and elliptic curves,* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1968.

[U] Kôji Uchida, *Isomorphisms of Galois groups of algebraic function fields, Ann. of Math.* (2) **106** (1977), no. 3, 589–598.