On the Shafarevich conjecture for irreducible holomorphic symplectic varieties

京都大学数学教室　高松　哲平
Teppei Takamatsu
Department of Mathematics,
Kyoto University

概要

本稿では，代数的整数論とその周辺 2021 での著者の講演をもとに，Lie Fu, Zhiyuan Li, Haitao Zou 氏との共同研究による，既約シンプレクティック多様体の Shafarevich 予想の結果を説明する．

1 Introduction

本稿では，代数的整数論とその周辺 2021 での著者の講演をもとに，既約シンプレクティック多様体の Shafarevich 予想の結果を説明する．本研究は，著者による K3 曲面の Shafarevich 予想の論文 ([Tak20a]) および既約シンプレクティック多様体の twisted forms の有限性の論文 ([Tak21]) の続きとなる研究である．なお本研究は，発表時は単著論文として執筆していたが，発表後，Lie Fu, Zhiyuan Li, Haitao Zou 氏らとの共同研究となった ([FLTZ22] 参照).

Shafarevich 予想とは，簡単にいって，整数環上の多様体の同型類の有限性を主張する予想である．元々は，アーベル多様体の場合に予想され，Faltings, Zarhin により証明された．正確に主張を述べるために，良還元という用語を定義する．

定義 1.1. R を離散付値環，$\mathfrak{p}$ を R の極大イデアル，F を R の商体とする．X を F 上の smooth projective 多様体とする．R 上の smooth proper な algebraic space $\mathcal{X}$ が存在し，一般ファイバー $\mathcal{X}_F := \mathcal{X} \times_R F$ が X と F 上同型の時，X は $\mathfrak{p}$ において良還元をもつと言う．

アーベル多様体に対する Shafarevich 予想とは，以下の定理である ([Fal83], [Zar85], [FWG$^+$92, VI §1 Theorem 2]).

定理 1.2 (Faltings, Zarhin)**.** F を $\mathbb{Q}$ 上の有限生成体，R を $\mathbb{Z}$ 上有限型の整閉整域で，$\operatorname{Frac} R = F$ なるものとする．g を正の整数とする．このとき，F 上の g 次元アーベル多様体であって，R の任意の高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p}$ において良還元を持つようなものの F 上の同型類は高々有限個である．(ここで，$\mathfrak{p}$ において良還元を持つとは，離散付値環 $(R_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p})$ について定義 1.1 の意味で $\mathfrak{p}$ において良還元を持つという意味である．)

この定理は，Faltings による Mordell 予想の証明においてきわめて重要な役割を果たした．また，主張自体もモジュライ空間の整数点の有限性と関係があり，非常に興味深い．Torelli の定理から，種数 $g \geq 2$ の曲線に対しても同様の主張が成立することにも注意する．この定理の後，様々な多様体に対して Shafarevich 予想が考察されてきた．ここに代表的な結果を述べる．

1. K3 曲面の場合 ([And96], [She17], [Tak20a])
2. Enriques 曲面・超楕円曲面の場合 ([Tak20b], [Tak20c])
3. 与えられた次数の very polarized な既約シンプレクティック多様体 (すなわち，既約シンプレクティック多様体と非常に豊富な直線束との pair) の場合 ([And96])
4. del Pezzo 曲面の場合 ([Sch85])
5. Flag 多様体の場合 ([JL15])
6. 多重双曲曲線の場合 ([Jav15], [NT19])
7. アーベル多様体の超曲面の場合 ([LS20])

その他にも，[JL17], [JL18] を参照せよ．本稿では，既約シンプレクティック多様体に対して Shafarevich 予想を考察する．すなわち，上述の André の結果 ([And96]) を unpolarized な場合に一般化する．最初に，既約シンプレクティック多様体の定義を復習する．

定義 1.3. k を標数 0 の体とする．X を k 上の smooth projective な多様体とする．$\pi_1^{\text{ét}}(X_{\overline{k}}) = 1$ かつ，非退化二次形式 $\omega \in H^0(X, \Omega^2_{X/k})$ で，$H^0(X, \Omega^2_{X/k})$ を生成するものが存在するとき，X を k 上の既約シンプレクティック多様体と呼ぶ.

この定義は，$k = \mathbb{C}$ の場合，よく知られた複素数体上の既約シンプレクティック多様体の定義と一致することに注意する ([Bin21, Lemma 3.3.1] 参照)．既約シンプレクティック多様体は，小平次元 0 の smooth projective 多様体の構成要素の一つとして，非常に重要な多様体である．実際，Beauville–Bogomolov 分解によると，$\mathbb{C}$ 上の標準因子が数値的に自明な smooth projective 多様体は，up to finite étale cover で，アーベル多様体，既約シンプレクティック多様体，Calabi–Yau 多様体の直積に分解することが知られている．

また，既約シンプレクティック多様体は K3 曲面の高次元一般化として知られていて，2 次元の場合 K3 曲面に他ならない．準備のために，既約シンプレクティックに対し，変型同

値という概念を定義する．

定義 1.4. X_1, X_2 を $\mathbb{C}$ 上の既約シンプレクティック多様体とする．連結複素解析空間の proper smooth 射 $\pi\colon \mathcal{X} \to S$ および S の 2 点 s_1, s_2 があり，$\pi^{-1}(s_i) \simeq X_i$ を満たすとき，X_1 と X_2 とは変型同値であるという．

以下に，知られている既約シンプレクティック多様体の変形同値類を紹介する．

例 1.5.
1. $\mathrm{K3}^{[n]}$-型: S を K3 曲面，n を正の整数とする．S 上の n 点 Hilbert scheme $S^{[n]}$ は既約シンプレクティック多様体となる．
2. 一般 Kummer 型: A をアーベル曲面，n を正の整数とする．A 上の $n+1$ 点の Hilbert scheme を $A^{[n+1]}$ とおく．加法の定める射 $A^{[n+1]} \to A$ の 0 上のファイバーは既約シンプレクティック多様体となる．
3. OG_6-型，OG_{10}-型: S を $K3$-曲面とする．S 上の半安定 sheaf のモジュライ空間の連結成分のシンプレクティック特異点解消は，10 次元の既約シンプレクティック多様体となる (OG_{10}-型)．類似の構成がアーベル多様体に対しても存在する (OG_6-型)．正確な定義は [O'G99], [O'G03] を参照．

現在，上記 4 種類以外の既約シンプレクティック多様体の変形同値類は知られていないことに注意する．

主結果を述べるために，既約シンプレクティック多様体に対する，良還元の一般化を定義する．

定義 1.6. R を離散付値環，$\mathfrak{p}$ を R の素イデアル，F を R の商体とし，F の標数が 0 とする．また，X を F 上の既約シンプレクティック多様体とする．以下の条件を満たすとき，X は $\mathfrak{p}$ において本質的に良還元を持つという．
(条件): ある完備離散付値環 S で完備化 $\widehat{R}$ 上有限 étale なものと，S 上 smooth proper な algebraic space $\mathcal{Y}$ が存在し，一般ファイバー $\mathcal{Y}_{\mathrm{Frac}(S)}$ は既約シンプレクティック多様体であり，底変換 $X_{\mathrm{Frac}(S)}$ と双有理同値である．

注意 1.7.
1. 既約シンプレクティック多様体は標準因子が線形的に自明になるので，既約シンプレクティック多様体間の双有理写像は余次元 1 で同型である．したがって，proper smooth 底変換定理により，$(R, \mathfrak{p})$ において本質的に良還元をもつ既約シンプレクティック多様体 X に対し，有理素数 $\ell \in R^{\times}$ についての ℓ 進コホモロジー群 $H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は不分岐表現になる．
2. 明らかに，良還元であれば本質的に良還元である．しかしながら，逆は一般に成立しない．実際， [LM18, Theorem 7.2] で，K3 曲面の場合に反例が構成されている．K3 曲面の場合，双有理写像は自動的に同型になるが，不分岐拡大が本質的に必要に

なる例が与えられているということである．

以下が我々の主結果である．

定理 1.8. $R \subset \mathbb{C}$ を有限生成正規部分 $\mathbb{Z}$-代数，F を R の商体とする．X_0 を $\mathbb{C}$ 上の既約シンプレクティック多様体であり，2 次の Betti 数 $b_2(X_0)$ が 5 以上であるとする．この時，F 上の既約シンプレクティック多様体 X で，

- R の任意の高さ 1 の素イデアルにおいて本質的に良還元を持ち，
- 底変換 $X_{\mathbb{C}}$ は X_0 と変形同値である

ようなものの同型類は有限個である．

次元を固定した時，既約シンプレクティック多様体の変型同値類の有限性は未解決であることに注意する．また，Betti 数の条件 $b_2 \geq 5$ は，知られている既約シンプレクティック多様体 (例 1.5 の 4 種) に対しては成立していることにも注意する．

証明の大筋は，偏極付き既約シンプレクティック多様体から偏極付きアーベル多様体を構成する Kuga–Satake 構成という手法を用いて，アーベル多様体の場合の定理 1.2 に帰着させるというものである．しかしながら，一般の既約シンプレクティック多様体の場合，K3 曲面の場合と比べて，以下の二点が困難である．

1. 一般の既約シンプレクティック多様体の場合，モジュライ空間が fine とは限らず，F 上での Kuga–Satake 構成が有限対 1 対応とは限らない．
2. 偏極付き既約シンプレクティック多様体の有限性から，既約シンプレクティック多様体の有限性を導く必要がある．

1 については，$\overline{F}$ 上の既約シンプレクティック多様体 X_0 を固定し，F 上の X_0 の form (F 上の多様体 X であって $X_{\overline{F}} \simeq X_0$ となるもののこと) であって，R の任意の高さ 1 の素イデアルにおいて本質的に良還元を持つようなものの同型類の有限性を示すことで解決できる．証明においては，algebraic space についての Matsusaka–Mumford の定理および，Hermite–Minkowski の定理が鍵となる．この証明は，[And96] の議論の一般化であり，京都大学の伊藤哲史氏にご教示いただいた議論にもとづいている．

一方 2 については，[She17] や [OS18] で導入された一般 Kuga–Satake 構成の理論に加えて，以下に述べる錐予想が重要な役割を果たした．

定理 1.9. k を標数 0 の体，X を k 上の既約シンプレクティック多様体とする．$\mathrm{Nef}_X \subset \mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ を X の Nef 錐 (すなわち，豊富直線束の生成する錐の閉包)，Nef_X^+ を $\mathrm{Nef}_X \cap \mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の convex hull とする．このとき，$\mathrm{Aut}(X)$ の Nef_X^+ への作用は，rational polyhedral fundamental domain を持つ．

この定理は，$\mathbb{C}$ 上の場合は [Mar11], [AV17], [AV18] によって証明され，一般の体の場合は著者 [Tak21] によって証明された．このほかにも，birational automorphism 版の錐予想が証明されている．詳細は [Tak21] を参照されたい．

2 コホモロジカルな一般化についての注意

この節では，主定理のコホモロジカルな一般化について考察を与える．.

定理 2.1. $R \subset \mathbb{C}$ を有限生成正規部分 $\mathbb{Z}$-代数，F を R の商体，X_0 を $\mathbb{C}$ 上の既約シンプレクティック多様体とする．ℓ を素数とし，必要ならば R を $R[1/\ell]$ で取り換えることで，ℓ は R で可逆であるとする．(この仮定は本質的ではない．実際以下の主張は，$\operatorname{Spec} R$ を affine 開集合で取り替えると，より強い主張になる．) F 上の既約シンプレクティック多様体 X について以下の条件を考える．
(a) R の任意の高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p}$ において，$H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ が不分岐である．
(a$'$) R の任意の高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p}$ において，$H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ が任意の i について不分岐である．
(b) 底変換 $X_{\mathbb{C}}$ は複素多様体として X_0 として変形同値である．

1. X_0 が一般 Kummer 型および OG_6-型の場合，条件 (a) と (b) とを満たす F 上の既約シンプレクティック多様体 X の同型類は一般には無限個である．
2. X_0 が $K3^{[n]}$-型および OG_{10}-型の場合，条件 (a) と (b) とを満たす F 上の既約シンプレクティック多様体 X の同型類は有限個である．
3. X_0 が一般 Kummer 型および OG_6-型の場合，条件 (a$'$) と (b) とを満たす F 上の既約シンプレクティック多様体 X の同型類は有限個である．

定理 1.8 および定理 2.1 から，
(主張)：$(R, \mathfrak{p})$ を離散付値環，F をその商体，ℓ を R において可逆な素数，X を F 上の既約シンプレクティック多様体とする．このとき，ℓ 進コホモロジー $H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ が $\mathfrak{p}$ において不分岐のとき，X は $\mathfrak{p}$ において本質的に良還元をもつ．
という主張に対する，一般 Kummer 型および OG_6-型の場合における反例を得ることに注意する．この主張は，K3 曲面については，Liedtke–Matsumoto によって，潜在的半安定還元を仮定した場合に，混標数強半安定還元 3 次元多様体に対する極小モデル理論を用いることで証明されていた ([Mat15], [LM18])．必要な混標数極小モデル理論については，Liedtke–Matsumoto の時点では [Kaw94], [Kaw99] において剰余標数 > 3 の場合に証明されていて，後に著者と吉川翔氏との共同研究 [TY20] で一般の場合に証明されたことに注意する．

最後に，定理 2.1 の証明の概略を述べる．主張 1 については，一般 Kummer 型及び OG_6-

型の場合に自己同型群の H^2 への作用が忠実でないことを利用すると，twisted form を用いることで無限個の同型類を構成できる．主張 2 (resp. 主張 3) は，それぞれの場合に自己同型群の H^2 への作用 (resp. $\bigoplus_i H^i$ への作用) が忠実になることを用いて，モジュライ空間に fine モジュライの構造を入れることができ，Kuga–Satake 構成を用いることで証明ができる．ここで，作用の忠実性には，[Ogu20] および [MW17] の結果を用いている．

謝辞. 代数的整数論とその周辺 2021 の世話人の方々に感謝申し上げます．また，本稿にコメントをくださったことについて，小林真一先生に感謝申し上げます．

参考文献

[And96] Y. André, *On the Shafarevich and Tate conjectures for hyper-Kähler varieties*, Math. Ann. **305** (1996), no. 2, 205–248.

[AV17] E. Amerik and M. Verbitsky, *Morrison-Kawamata cone conjecture for hyperkähler manifolds*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **50** (2017), no. 4, 973–993.

[AV18] ———, *Collections of orbits of hyperplane Type in homogeneous spaces, homogeneous dynamics, and hyperkähler geometry*, International Mathematics Research Notices **2020** (2018), no. 1, 25–38.

[Bin21] W. Bindt, *Hyperkähler varieties and their relation to Shimura stacks*, Thesis, University of Amsterdam (2021).

[Fal83] G. Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), no. 3, 349–366.

[FLTZ22] L. Fu, Z. Li, T. Takamatsu, and H. Zou, *Unpolarized Shafarevich conjectures for hyper-Kähler varieties*, preprint (2022), arXiv:2203.10391.

[FWG+92] G. Faltings, G. Wüstholz, F. Grunewald, N. Schappacher, and U. Stuhler, *Rational points*, third ed., Aspects of Mathematics, E6, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992, Papers from the seminar held at the Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn/Wuppertal, 1983/1984, With an appendix by Wüstholz.

[Jav15] A. Javanpeykar, *Néron models and the arithmetic Shafarevich conjecture for certain canonically polarized surfaces*, Bull. Lond. Math. Soc. **47** (2015), no. 1, 55–64.

[JL15] A. Javanpeykar and D. Loughran, *Good reduction of algebraic groups and flag varieties*, Arch. Math. (Basel) **104** (2015), no. 2, 133–143.

[JL17] ———, *Complete intersections: moduli, Torelli, and good reduction*, Math. Ann. **368** (2017), no. 3-4, 1191–1225.

[JL18] A. Javanpeykar and D. Loughran, *Good reduction of Fano threefolds and sextic surfaces*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **18** (2018), no. 2, 509–535.

[Kaw94] Y. Kawamata, *Semistable minimal models of threefolds in positive or mixed characteristic*, J. Algebraic Geom. **3** (1994), no. 3, 463–491.

[Kaw99] ———, *Index 1 covers of log terminal surface singularities*, J. Algebraic Geom. **8** (1999), no. 3, 519–527.

[LM18] C. Liedtke and Y. Matsumoto, *Good reduction of K3 surfaces*, Compos. Math. **154** (2018), no. 1, 1–35.

[LS20] B. Lawrence and W. Sawin, *The Shafarevich conjecture for hypersurfaces in abelian varieties*, preprint (2020), arXiv:2004.09046.

[Mar11] E. Markman, *A survey of Torelli and monodromy results for holomorphic-symplectic varieties*, Complex and differential geometry, Springer Proc. Math., vol. 8, Springer, Heidelberg, 2011, pp. 257–322.

[Mat15] Y. Matsumoto, *Good reduction criterion for K3 surfaces*, Math. Z. **279** (2015), no. 1-2, 241–266.

[MW17] G. Mongardi and M. Wandel, *Automorphisms of O'Grady's manifolds acting trivially on cohomology*, Algebr. Geom. **4** (2017), no. 1, 104–119.

[NT19] I. Nagamachi and T. Takamatsu, *The Shafarevich conjecture and some extension theorems for proper hyperbolic polycurves*, arXiv:1911.01022, to appear in Mathematical Research Letters.

[O'G99] K. G. O'Grady, *Desingularized moduli spaces of sheaves on a* $K3$, J. Reine Angew. Math. **512** (1999), 49–117.

[O'G03] ———, *A new six-dimensional irreducible symplectic variety*, J. Algebraic Geom. **12** (2003), no. 3, 435–505.

[Ogu20] K. Oguiso, *No cohomologically trivial nontrivial automorphism of generalized Kummer manifolds*, Nagoya Math. J. **239** (2020), 110–122.

[OS18] M. Orr and A. N. Skorobogatov, *Finiteness theorems for K3 surfaces and abelian varieties of CM type*, Compos. Math. **154** (2018), no. 8, 1571–1592.

[Sch85] A. J. Scholl, *A finiteness theorem for del Pezzo surfaces over algebraic number fields*, J. London Math. Soc. (2) **32** (1985), no. 1, 31–40.

[She17] Y. She, *The unpolarized Shafarevich Conjecture for K3 Surfaces*, preprint (2017), arXiv:1705.09038.

[Tak20a] T. Takamatsu, *On a cohomological generalization of the Shafarevich conjecture for K3 surfaces*, Algebra Number Theory **14** (2020), no. 9, 2505–2531.

[Tak20b] ———, *On the Shafarevich conjecture for Enriques surfaces*, Math. Z. (2020).

[Tak20c] ———, *Reduction of bielliptic surfaces*, preprint (2020), arXiv:2001.06855.

[Tak21] ———, *On the finiteness of twists of irreducible symplectic varieties*, preprint (2021), arXiv:2106.11651.

[TY20] T. Takamatsu and S. Yoshikawa, *Minimal model program for semi-stable threefolds in mixed characteristic*, preprint (2020), arXiv:2012.07324.

[Zar85] Y. G. Zarhin, *A finiteness theorem for unpolarized abelian varieties over number fields with prescribed places of bad reduction*, Invent. Math. **79** (1985), no. 2, 309–321.