射影直線上の力学系に付随するゼータ関数について

東北大学理学研究科数学専攻 竹平航平
Kohei Takehira, Mathematical Institute, Tohoku University

1 序文

本稿は 2021 年 12 月 13 日から 12 月 17 日にかけて行われた研究集会，RIMS 共同研究（公開型）「代数的整数論とその周辺 2021」における筆者の講演「射影直線上の力学系に付随するゼータ関数について」に関する報告である．

数論幾何学における合同ゼータ関数を始めとして，数学の様々な領域において数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ に対する母関数

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}a_n\right)$$

は興味深い研究対象である．本稿における研究対象は，体 K 上の一変数有理関数 $\phi \in K(z)$ が定める自己写像 $\phi\colon \mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^1_K$ による離散力学系を調べる上で基本的な不変量である multiplier $\lambda_x(\phi)$ を用いて次のように定義されるゼータ関数である．

$$Z_m(\phi;t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\sum_{\phi^n(x)=x}\lambda_x(\phi^n)^m\right).$$

これは Hatjispyros と Vivaldi が [5] において導入しているものである．本稿における主結果は，このゼータ関数 $Z_m(\phi;t)$ に対し，ϕ に対する弱い仮定の下で，コホモロジー $H^i(\mathbb{P}^1_K, \Omega_{\mathbb{P}^1_K}^{\otimes m})$ に作用する線形写像 $D^i_m(\phi)$ を用いた行列式表示を与え，それによってゼータ関数 $Z_m(\phi;t)$ の有理性を証明することである．また，行列式表示から分かるゼータ関数の明示計算等の応用について述べる．

本稿の構成を述べる．第 2 節では，射影直線上の力学系に関して基本的な概念を復習する．第 3 節では，本稿で考察するゼータ関数 $Z_m(\phi;t)$ の定義を述べ，基本的な性質を紹介する．第 4 節にて，行列式表示の主張と，その証明の概略を紹介する．第 5 節では，行列式表示を用いたゼータ関数の明示計算を実行する．第 6 節では，第 4 節で行列式表示を証明する際に ϕ に対して課す仮定が特定の場合には不要であることを示し，とくに二次有理関数に対してはゼータ関数の有理性が仮定なく成立することを見る．

2　射影直線上の離散力学系

体 K 上の一変数有理関数 $\phi \in K(z)$ が定める自己写像 $\phi\colon \mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^1_K$ による離散力学系に関して基本的な事項を復習する．ϕ の n-**th iterarion** を次で定める．

$$\phi^n = \underbrace{\phi \circ \phi \circ \cdots \circ \phi}_{n}.$$

また，$\phi^0 = \mathrm{id}$ と約束する．**離散力学系**では，$x \in \mathbb{P}^1_K$ に対する点列 $\phi^n(x)$ の挙動を研究する．基本的な概念は，軌道および固定点・周期点である．

- ϕ による $x \in \mathbb{P}^1_K$ の**前方軌道 (forward orbit)**(または，単に**軌道 (orbit)**) を，$\mathcal{O}_\phi(x) = \{\phi^n(x)\colon n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ で定める．
- 点 $x \in \mathbb{P}^1_K$ が ϕ の**固定点 (fixed point)** であるとは，$\phi(x) = x$ が成立することである．ϕ の固定点の集合を $\mathrm{Fix}(\phi)$ と書く．
- 点 $x \in \mathbb{P}^1_K$ が ϕ の周期 n の**周期点 (periodic point)** であるとは，$\phi^n(x) = x$ が成立することである．ϕ の周期 n の周期点の集合を $\mathrm{Per}_n(\phi)$ と書く．

例 2.1. K を体，$S = \mathbb{P}^1_K$ を K 上の射影直線とする．$d \in \mathbb{Z}$ を 2 以上の整数とする．このとき，$\phi(z) = z^d$ とすると，$\phi^n(z) = z^{d^n}$ であるので，$\mathrm{Per}_n(\phi) = \mathrm{Fix}(\phi^n) = \{0, \infty\} \cup \mu_{d^n - 1}(K)$ となる．ただし，$\mu_m(K) = \{\zeta \in K : \zeta^m = 1\}$ は 1 の m 乗根の集合である．

一次分数変換 $\theta(z) = \frac{az+b}{cz+d}$(ただし $a, b, c, d \in K$ は $ad - bc \neq 0$ を満たす) は $\mathbb{P}^1_K$ の自己同型を定める．これにより，$\phi \in K(z)$ が定める力学系に対する座標変換の概念が次のように定まる．

定義 2.2. 有理関数 $\phi \in K(z)$ と一次分数変換 θ に対し，ϕ の θ による**線形共役 (linear conjugate)** ϕ^θ を $\phi^\theta = \theta^{-1} \circ \phi \circ \theta$ で定める．また，$\phi, \psi \in K(z)$ に対し，ϕ と ψ が**線形共役**であるとは，ある一次分数変換 θ が存在し，$\psi = \phi^\theta$ が成立することである．線形共役は $K(z)$ の同値関係を定める．

座標変換によって，固定点集合は $\mathrm{Fix}(\phi^\theta) = \theta^{-1}(\mathrm{Fix}(\phi))$ と変換される．次に，周期点近傍の局所的な振る舞いを反映する不変量である，multiplier を定義する．

定義 2.3. $\phi \in K(z)$ を有理関数とする．$x \in \mathrm{Fix}(\phi)$ に対し，x における ϕ の **multiplier** $\lambda_x(\phi) \in K$ を次で定義する．

$$\lambda_x(\phi) = \begin{cases} \phi'(x) & (\text{ if } x \neq \infty) \\ \psi'(0) & (\text{ if } x = \infty). \end{cases}$$

ここで，$\psi(z) = 1/\phi(1/z)$ は ϕ の $\theta(z) = 1/z$ による線形共役である．

周期 n の周期点 $x \in \mathbb{P}^1_K$ に対しては，これを ϕ^n の固定点と見なして $\lambda_x(\phi^n)$ で multiplier を定義する．また，上記の定義において $x = \infty$ の場合に $\psi(z) = 1/\phi(1/z)$ を考えるのは，一次分数変換 $1/z$ によって ∞ を 0 に移すような座標変換を施していることに対応している．連鎖律を用いた簡単な計算により，一次分数変換 θ に対し，等式 $\lambda_{\theta^{-1}(x)}(\phi^\theta) = \lambda_x(\phi)$ が成立することが確かめられ，この意味で multiplier は座標変換によらない量である．

例 2.4. $d \in \mathbb{Z}$ を 2 以上の整数とし，$\phi(z) = z^d$ とする．例 2.1 で求めたように，$\mathrm{Fix}(\phi^n) = \{0, \infty\} \cup \mu_{d^n-1}$ であった．$(\phi^n)'(z) = d^n z^{d^n-1}$ であるので，$x \in \mu_{d^n-1}$ に対し，$\lambda_x(\phi^n) = d^n$ であり，$\lambda_0(\phi^n) = 0$ である．また，$1/\phi^n(1/z) = z^{d^n}$ であるので，$\lambda_\infty(\phi^n) = 0$ である．

ϕ の周期点は $\phi^n(z) = z$ の根であるが，これは重複度を持つ場合がある．$x \in \mathrm{Fix}(\phi^n)$ に対し，x の**重複度 (multiplicity)** $\mu_x(\phi^n) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を

$$\mu_x(\phi^n) = \operatorname*{ord}_{z=x}(\phi^n(z) - z)$$

によって定める．$x = \infty$ の場合は，ϕ をその線形共役で取り替えた上で上式を適用する．

周期点における形式冪級数展開を用いることにより，$\mu_x(\phi^n) > 1$ と $\lambda_x(\phi^n) = 1$ が同値であることがわかる．また，重複度は ϕ をその座標変換 ϕ^θ で取り替えることに対して不変である．

3 ゼータ関数 $Z_m(\phi; t)$ および $Z_m^\star(\phi; t)$

Hatjispyros と Vivaldi によって [5] で導入された射影直線上の力学系に対するゼータ関数の定義を述べ，簡単な具体例を見た後，その基本的な性質を紹介する．

定義 3.1. K を標数 0 の代数閉体とする． 有理関数 $\phi \in K(z)$ と非負整数 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$Z_m(\phi; t), Z_m^\star(\phi; t) \in K[\![t]\!]$ を次で定義する．

$$Z_m(\phi; t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \sum_{x \in \mathrm{Per}_n(\phi)} \lambda_x(\phi^n)^m\right),$$

$$Z_m^\star(\phi; t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \sum_{x \in \mathrm{Per}_n(\phi)} \mu_x(\phi^n)\lambda_x(\phi^n)^m\right).$$

上記は筆者独自の記号である．定義に対する注意を述べる．

注意 3.2. (1) 体 K に関する仮定として，K の標数が 0 であることを課すのは，$1/n$ および exp が $K[\![t]\!]$ の元として意味を持つようにするためである．また，K が標数 0 の代数閉体である時，ゼータ関数の議論は $K = \mathbb{C}$ の場合に帰着できる．実際，$\phi(z) = (a_0 + \cdots + a_d z^d)/(b_0 + \cdots + b_d z^d) \in K(z)$ に対し $\mathbb{Q}(a_0, \ldots, b_d)$ は $\mathbb{Q}$ 上有限生成であるから，$\mathbb{C}$ への埋め込み σ を持ち，ϕ の各係数に σ を作用させたものを $\sigma(\phi)$ と書けば，$\sigma(Z_m(\phi; t)) = Z_m(\sigma(\phi); t)$ が成立する ($Z_m^\star(\phi; t)$ でも同様).

(2) $Z_m(\phi; t)$ は $m = 0$ の場合が $\#\mathrm{Per}_n(\phi)$ の母関数，即ち **Artin-Mazur ゼータ関数**であるなど，より力学系の性質を反映したものであると考えられる．一方，$Z_m(\phi; t)$ は $\phi \mapsto \sum_{x \in \mathrm{Per}_n(\phi)} \mu_x(\phi^n)\lambda_x(\phi^n)^m$ が連続である (cf. [10, Theorem 4.50]) など，幾何学的にはより扱いやすいものである．

(3) multiplier および重複度は ϕ をその座標変換 ϕ^θ で取り替えることに対して不変であったので，$Z_m(\phi; t) = Z_m(\phi^\theta; t)$ および $Z_m^\star(\phi; t) = Z_m^\star(\phi^\theta; t)$ が成立する．

例 3.3. 2 以上の整数 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対し，$\phi(z) = z^d$ とする．例 2.1 および例 2.4 により，$\mathrm{Per}_n(\phi) = \{0, \infty\} \cup \mu_{d^n-1} = \{0, \infty\} \cup \{\zeta \in K \colon \zeta^{d^n-1} = 1\}$ および

$$\lambda_x(\phi^n) = \begin{cases} 0 & (x = 0, \infty) \\ d^n & (x \in \mu_{d^n-1}) \end{cases}$$

が成立していた．従って，

$$\sum_{x \in \mathrm{Per}_n(\phi)} \lambda_x(\phi^n)^m = (d^n - 1)d^{nm} = d^{n(m+1)} - d^{nm}$$

であり，また，全ての周期点は重複度 1 を持つので，

$$Z_m(\phi; t) = Z_m^\star(\phi; t) = \frac{1 - d^m t}{1 - d^{m+1} t}$$

を得る．

ゼータ関数 $Z_m(\phi; t)$ はある種の Euler 積を持つ．これを述べるために幾つかの記号を定める．周期点 $x \in \mathrm{Per}_n(\phi)$ は全ての $1 < m < n$ に対し $\phi^m(x) \neq x$ を満たすとき**最小周期 (minimal period)** n を持つという．最小周期 n を持つ周期点の集合を $\mathrm{Per}_n^{**}(\phi)$ と書く．$x, y \in \mathrm{Per}_n^{**}(\phi)$ に対し，その軌道が一致すること，即ち $x \sim y \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \mathcal{O}_\phi(x) = \mathcal{O}_\phi(y)$ によって同値関係 $\sim$ を定める．この記号の下で，Euler 積表示は次のように述べられる．

定理 3.4 (cf. Hatjispyros-Vivaldi [5]).

$$Z_m(\phi; t) = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{x \in \mathrm{Per}_n^{**}(\phi)/\sim} (1 - \lambda_x(\phi^n)^m t^n)^{-1}$$

ここで，積

$$\prod_{x \in \mathrm{Per}_n^{**}(\phi)/\sim} (1 - \lambda_x(\phi^n)^m t^n)^{-1}$$

は $\mathrm{Per}_n^{**}(\phi)/\sim$ の完全代表系をわたる積であり，代表系の取り方によらない．

上記の定理は，周期点集合の非交和への分解 $\mathrm{Per}_n(\phi) = \bigcup_{d|n} \mathrm{Per}_d^{**}(\phi)$ が成り立つこと，multiplier に対して $\lambda_x(\phi^{md}) = \lambda_x(\phi^d)^m$ および，$x \sim y \Rightarrow \lambda_x(\phi^n) = \lambda_y(\phi^n)$ が成り立つこと，これらから従う．

注意 3.5. Euler 積表示の等式を $Z_m(\phi; t)$ の定義として再定義すると，体 K の標数が 0 でない場合にも $Z_m(\phi; t)$ を定義することが出来る．しかしながら，そのような形で正標数の体 K 上で定義された $Z_m(\phi; t)$ に対する性質はまだ明らかになっておらず，今後の課題である．なお，本稿の議論は全て exp を用いた表示を経由する形で行われている為，正標数の場合に適用することは困難であるか，少なくともさらなる工夫が必要であると考えられる．

ゼータ関数の定義 3.1 においては，周期点における重複度を考えないもの $Z_m(\phi;t)$ と，重複度を考えるもの $Z_m^\star(\phi;t)$ の二種類があり，これらは一般には一致しないが，これらの比は t の多項式になることが知られている．下記の定理は，$K=\mathbb{C}$，$m=0$ の場合に Hinkkanen が [6] において証明し，Lee が [7] において K が一般の標数 0 の代数閉体の場合でも同じ結果が成立することを指摘したものであるが，彼らの議論は一般の非負整数 m の場合にも適用できる．

定理 3.6 (Hinkkanen [6], Theorem 1.). K を標数 0 の代数閉体，$\phi \in K(z)$ を d 次有理関数とする．このとき，ϕ にのみ依存する $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$(p_i)_{i=1}^N, (q_i)_{i=1}^N, (l_i)_{i=1}^N \in (\mathbb{Z}_{\geq 1})^N$ が存在し，全ての非負整数 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$\frac{Z_m(\phi;t)}{Z_m^\star(\phi;t)} = \prod_{i=1}^{N}(1-t^{p_i q_i})^{l_i}$$

が成立する．ただし，$N=0$ の場合には，右辺の積は 1 と解釈する．

$Z_m(\phi;t)/Z_m^\star(\phi;t)$ が $\prod(1-t^{p_i q_i})^{l_i}$ の形 (ただし無限積になる可能性を残す) となることの証明は，multiplier に対する形式的な計算によりなされる．これが有限積になることには，Fatou による複素力学系における結果 (cf. [1, Theorem 9.3.2]) を用いる．

ゼータ関数の有理性および明示計算に関しては，次のような先行研究が知られている．

- 多項式 ϕ に対する $Z_1^\star(\phi;t)$ の計算 (Erëmenko-Levin [3]), 1989 年．留数定理を用いる手法．
- 一般の有理関数 ϕ に対する $Z_0^\star(\phi;t)$ の計算 (Hinkkanen [6]), 1994 年．d 次有理関数の周期点の個数が重複度込みで (d^n+1) 個であることを用いる手法．
- 多項式 $\phi(z)=z^d+c$ に対する $Z_1^\star(\phi;t)$ の計算 (Hatjispyros-Vivaldi [5]), 1995 年．解と係数の関係および Newton の恒等式を用いる手法．
- 多項式 $\phi(z)=z^2+c$ に対する $Z_m^\star(\phi;t)$ の計算 (Cvitanović-Hansen-Rolf-Vattay [2]), 1998 年．留数定理を用いた手法．

これらの手法は巧妙なものであるが，ϕ が多項式であることや $m=1$ に限定していることが本質的に用いられるような議論になっており，ϕ が一般の有理関数の場合に拡張することは困難であると思われる．そこで，筆者は合同ゼータ関数に対する議論を参考に，コホモロジーに作用する線形作用素を用いた行列式表示を用いる手法を導入した．このことについて，次節で議論する．

4 行列式表示

ここでは，$Z_m^\star(\phi;t)$ に対する行列式表示を与える．

4.1 層のコホモロジーからの準備

X, Y を体 K 上のスキームとし，$f\colon X \to Y$ を K 上の射とする，X 上の連接層 $\mathcal{F}$ と Y 上の連接層 $\mathcal{G}$ および $\mathcal{O}_X$ 加群の射 $\varphi\colon f^*\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ が与えられているとき，三つの写像

$$H^i(Y,\mathcal{G}) \to H^i(Y, f_*f^*\mathcal{G}) \to H^i(X, f^*\mathcal{G}) \to H^i(X,\mathcal{F})$$

の合成により，$\widetilde{\varphi}^{(i)}\colon H^i(Y,\mathcal{G}) \to H^i(X,\mathcal{F})$ が誘導される．m を非負整数とし，$\mathcal{F} = \Omega_{X/K}^{\otimes m}$, $\mathcal{G} = \Omega_{Y/K}^{\otimes m}$ かつ $\varphi = (df)^{\otimes m}$ の場合の $\widetilde{\varphi}^{(i)}$ を $D_m^i(f)$ と書くことにする．このとき，X に対し $H^i(X, \Omega_X^{\otimes m})$ を，射 $f\colon X \to Y$ に対し $D_m^i(f)\colon H^i(Y, \Omega_Y^{\otimes m})$ を対応させることで，K 上のスキームの圏から K 上のベクトル空間の圏への反変関手が定まる．

以上の記号の下，$\phi \in K(z)$ に対し，$L_m(\phi;t) \in K(t)$ を次で定義する．

定義 4.1. K を体，$\phi \in K(z)$ とする．このとき，

$$L_m(\phi;t) \in K(t) = \prod_{i=0}^{1} \det(1 - tD_m^i(\phi)\colon H^i(\mathbb{P}_K^1, \Omega_{\mathbb{P}_K^1}^{\otimes m}))^{(-1)^{i+1}}$$

と定める．

$L_m(\phi;t)$ は定義からアプリオリに t の有理関数である．

D_m^i の関手性を用いることにより，K の標数が 0 の場合には，次が成立する．

命題 4.2.

$$L_m(\phi;t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \mathrm{tr}(D_m^i(\phi^n)\colon H^i(\mathbb{P}_K^1, \Omega_{\mathbb{P}_K^1}^{\otimes m}))\right)$$

注意 4.3. $m > 0$ のとき

$$\dim_K H^i(\mathbb{P}_K^1, \Omega_{\mathbb{P}_K^1}^{\otimes m}) = \begin{cases} 2m-1 & (\text{ if } i = 1) \\ 0 & (\text{ if } i \neq 1) \end{cases}$$

であるから，$L_m(\phi;t) = \det(1 - tD_m^1(\phi))$ かつ，これは高々$2m-1$ 次の多項式である．

4.2 行列式表示の主張

行列式表示の主張を述べる．そのために，有理関数の完全横断性を定義する．

定義 4.4. K を代数閉体，$\phi \in K(z)$ を有理関数とする．ϕ が完全横断的 **(completely transversal)** であるとは，任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ および $x \in \mathrm{Fix}(\phi^n)$ に対し，$\lambda_x(\phi^n) \neq 1$ が成立することである．

この用語は本稿 (および論文 [12]) のみのものである．この条件を幾何学的に言い換えれば，全ての正の整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し，ϕ^n のグラフ $\Gamma_{\phi^n} \subset \mathbb{P}_K^1 \times \mathbb{P}_K^1$ と $\mathbb{P}_K^1$ の対角集合 $\Delta \subset \mathbb{P}_K^1 \times \mathbb{P}_K^1$ が横断的に交わるということになる．また，$\mu_x(\phi^n) > 1$ と $\lambda_x(\phi^n) = 1$ が同値であったことから，完全横断的な ϕ に対し，$Z_m(\phi;t) = Z_m^\star(\phi;t)$ が成立する．

本稿の主定理は，ϕ に関する完全横断性の仮定の下で，$Z_m^\star(\phi;t)$ を $L_m(\phi;t)$ で表示する次の等式である．

定理 4.5 (T. [12]). K を標数 0 の代数閉体とする．非負整数 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と完全横断的な $\phi \in K(z)$ に対し，次の等式が成り立つ．

$$Z_m(\phi;t) = Z_m^{\star}(\phi;t) = \frac{L_m(\phi;t)}{L_{m+1}(\phi;t)}.$$

特に，完全横断的な $\phi \in K(z)$ に対し $Z_m(\phi;t), Z_m^{\star}(\phi;t) \in K(t)$ が成立する．

定理 4.5 の仮定，ϕ が完全横断的であることは，十分一般の ϕ において成立する条件である．このことについて，$K = \mathbb{C}$ の場合に説明する．

$$\mathrm{Rat}_d(\mathbb{C}) = \left\{ \phi(z) = \frac{F(z)}{G(z)} : \begin{array}{l} \mathrm{Res}(F,G) \neq 0 \text{ かつ} \\ \max\{\deg F, \deg G\} = d \end{array} \right\} \subset \mathbb{P}^{2d+1}(\mathbb{C})$$

を d 次有理関数の空間とする．ここで，Res は終結式である．複素力学系における双曲性の議論 (cf. [8, Section 3.4]) から，$\{\phi \in \mathrm{Rat}_d(\mathbb{C}) :\ \phi$ は完全横断的 $\}$ は Euclid 位相の意味での空でない開集合を含み，特に，$\mathrm{Rat}_d(\mathbb{C})$ の Zariski 稠密部分集合をなすことが証明できる．また，複素力学系における双曲稠密性予想 (cf. [8, Conjecture 1.1.]) を仮定すると，完全横断的有理関数は $\mathrm{Rat}_d(\mathbb{C})$ の中で Euclid 位相の意味でも稠密な部分集合をなすことが分かる．このような意味で，十分一般の ϕ は完全横断的である．

4.3 Woods Hole 固定点定理

定理 4.5 の証明の鍵となるのは **Woods Hole 固定点定理**である．この定理は微分幾何学における対応物が Atiyah と Bott によって示されており，Atiyah-Bott の固定点定理と呼ばれることもある．代数幾何学における証明については SGA5 [4, Exposé III, Corollaire 6.12] および Taelman[11, Theorem A.4.] において述べられている．

定理 4.6. (Woods Hole Fixed Point Formula, [11, Theorem A.4.]) X を代数閉体 K 上の smooth，proper スキームとし， $f : X \to X$ を K 上の射とする． $\mathcal{F}$ は局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群の層とし，$\varphi : f^*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_X$ 加群の準同型とする．f のグラフ $\Gamma_f \subset X \times X$ と対角集合 $\Delta \subset X \times X$ が $X \times X$ で横断的に交わるとき，. 次の等式が成立する．

$$\sum_i (-1)^i \mathrm{tr}(\widetilde{\varphi}^{(i)} \colon H^i(X, \mathcal{F})) = \sum_{x \in \mathrm{Fix}(f)} \frac{\mathrm{tr}(\varphi(x) \colon \mathcal{F}(x))}{\det(1 - df(x) \colon \Omega_{X/K}(x))}$$

ここで，$\mathcal{F}(x)$ は x における茎の剰余体への係数変換 $\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} (\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x)$ である．

4.4 証明の概略

定理 4.5 の証明は次のようになされる．

証明． Woods Hole 固定点定理を $X=\mathbb{P}^1_K$，$\mathcal{F}=\Omega^{\otimes m}_{\mathbb{P}^1_K}$，$f=\phi$，$\varphi=(d\phi)^{\otimes m}$ の場合に適用する．

$$\sum_{x\in\mathrm{Fix}(\phi)}\frac{\mathrm{tr}(d\phi^{\otimes m}(x)\colon \Omega^{\otimes m}_{\mathbb{P}^1_K}(x))}{\det(1-d\phi(x)\colon \Omega_{\mathbb{P}^1_K}(x))}=\sum_{i=0}^{1}(-1)^i\mathrm{tr}(D^i_m(\phi)\colon H^i(\mathbb{P}^1_K,\Omega^{\otimes m}_{\mathbb{P}^1_K}))$$

ここで，固定点 x に対し，$d\phi(x)$ が $\lambda_x(\phi)=\phi'(x)$ 倍写像であることが計算により分かり，これによって，

$$\sum_{\phi(x)=x}\frac{\lambda_x(\phi)^m}{1-\lambda_x(\phi)}=\sum_{i=0}^{1}(-1)^i\mathrm{tr}D^i_m(\phi)$$

が分かる．$\lambda\neq 1$ に対する自明な等式 $\lambda^m=\lambda^m/(1-\lambda)-\lambda^{m+1}/(1-\lambda)$ を踏まえると，

$$\sum_{\phi(x)=x}\lambda_x(\phi)^m=\sum_{i=0}^{1}(-1)^i\mathrm{tr}D^i_m(\phi)-\sum_{i=0}^{1}(-1)^i\mathrm{tr}D^i_{m+1}(\phi)$$

を得る．従って，$Z_m(\phi;t)$ および $L_m(\phi;t)$ の定義により

$$Z_m(\phi;t)=Z^\star_m(\phi;t)=\frac{L_m(\phi;t)}{L_{m+1}(\phi;t)}$$

を得る． □

5 ゼータ関数の明示計算

ここでは，いくつかの ϕ の族に対する $L_m(\phi;t)$ の明示計算を行う．即ち，有理関数 $\phi\in K(z)$ が誘導する K 線形写像 $D^i_m(\phi)$ の表現行列を具体的に計算する．

具体的な計算は，次のように実行される．

1. $H^1(\mathbb{P}^1_K,\Omega^{\otimes m}_{\mathbb{P}^1_K})$ の基底として，$\left\{z^i\left(\frac{dz}{z}\right)^{\otimes m}:|i|<m\right\}$ をとる．
2. Čech コホモロジーを用いて $S(z)=1/z$，$T_c(z)=z+c$，$U_\lambda(z)=\lambda z$，$M_d(z)=z^d$ に対して表現行列を計算する．
3. 反変関手性 $D^i_m(f\circ g)=D^i_m(g)\circ D^i_m(f)$ により，S,T_c,U_λ,M_d の合成からなる ϕ に対しても $D^1_m(\phi)$ の表現行列を計算する．

この手法により，次の二つの ϕ の族に対し，$L_m(\phi;t)$ の明示計算を行う．

$$z^d+c,\qquad \frac{Az^d+B}{Cz^d+D}.$$

ここで，$d\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ は 2 以上の整数であり，$c,A,B,C,D\in K$ は $AD-BC,C\neq 0$ を満たす．まず，z^d+c に対する結果を述べる．次の定理は，$d=2$ の場合には Cvitanović らによって [2] によって留数定理を用いて計算されていた定理である．

命題 5.1. K を体とする．2 以上の整数 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ と $c \in K$ に対し，$\phi_{c,d}(z) = z^d + c \in K(z)$ と定める．また，正の整数 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し，$l = \left\lfloor \frac{m-1}{d} \right\rfloor$ とし，$l \times l$ 行列 $L = L(m,d,c) = (l_{i,j})_{1 \leq i,j \leq l} \in M_l(K)$ を次で定める．

$$L = (l_{ij})_{1 \leq i,j \leq l}, \quad l_{ij} = \binom{m-1-i}{m-1-dj}(-c)^{dj-i}$$

このとき，次が成立する．

$$L_m(\phi_{c,d}; t) = (1 - d^m t) \det(1 - d^m tL)$$

$(Az^d + B)/(Cz^d + D)$ に対する計算結果は次の通りである．

命題 5.2. K を体とし，$A, B, C, D \in K$ は $AD - BC \neq 0$ かつ $C \neq 0$ を満たすとする．2 以上の整数 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ および正の整数 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し，$l = \left\lfloor \dfrac{m-1}{d} \right\rfloor$ とする．また，$M = M(m,d,A,B,C,D) = (m_{i,j})_{|i|,|j| \leq l} \in M_{2l+1}(K)$ を

$$m_{i,j} = (-1)^m \sum_{|k|<m} \binom{m-1-i}{m-1-k}\binom{m-1+k}{m-1-dj}\left(-\frac{A}{C}\right)^{k+dj}\left(-\frac{D}{C}\right)^{k-i}\left(-\frac{AD-BC}{C^2}\right)^{-k}$$

によって定める．このとき，$\phi(z) = \dfrac{Az^d + B}{Cz^d + D}$ とすると，

$$L_m(\phi; t) = \det(1 - d^m tM)$$

が成立する．

注意 5.3. 上記の計算結果から分かることとして特筆すべきことは，$D_m^1(\phi)$ の固有値として，0 が高い重複度で存在することであり，その重複度 ν は $\phi(z) = z^d + c$ の場合には

$$\nu = \begin{cases} 2m-2 & (\text{ if } c = 0 \text{ }) \\ 2m-2-\left\lfloor \frac{m-1}{d} \right\rfloor & (\text{ if } c \neq 0 \text{ }) \end{cases}$$

であり，$\phi(z) = (Az^d + B)/(Cz^d + D)$ の場合には $\nu \geq 2m - 2 - 2\lfloor (m-1)/d \rfloor$ を満たすことが証明できる．これにより特に $Z_m(\phi; t)$ に対し，Riemann 予想の類似は存在しないことが分かる．$D_m^1(\phi)$ の固有値に 0 が多く存在することが偶然によるものか，もしくはより深い背景によるものであるのかを明らかにするのは，今後の課題である．

6 有理性に関する考察

主定理 4.5 においては，完全横断的な有理関数 ϕ に対してゼータ関数 $Z_m^\star(\phi; t)$ の行列式表示が与えられ，それによってゼータ関数の有理性が従うのであったが，前節で考察した二つの ϕ の族に対しては，等式 $Z_m^\star(\phi; t) = L_m(\phi; t)/L_{m+1}(\phi; t)$ が成立することが分かる．

命題 6.1. K を標数 0 の代数閉体，d を 2 以上の整数，$c, A, B, C, D \in K$ は $C, AD-BC \neq 0$ を満たすとする．このとき，ϕ は次のいずれかであると仮定する．

$$z^d + c, \quad \frac{Az^d + B}{Cz^d + D}.$$

このとき，次の等式が成立する．

$$Z_m^\star(\phi; t) = \frac{L_m(\phi; t)}{L_{m+1}(\phi; t)}.$$

証明. $K = \mathbb{C}$，$\phi(z) = z^d + c$ の場合を述べる．$X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$，$X_{\mathrm{ct}} = \{c \in X : z^d + c \text{ は完全横断的 }\}$ と定める．4.2 節で述べたことから，X_{ct} は X の中で Zariski 稠密であり，定理 4.5 により，$c \in X_{\mathrm{ct}}$ に対し，

$$Z_m^\star(\phi; t) = \frac{L_m(\phi; t)}{L_{m+1}(\phi; t)}$$

が成立する．上式の左辺について，注意 3.2(2) で述べたように $c \mapsto \sum_{\phi^n(x)=x} \mu_x(\phi^n)\lambda_x(\phi^n)^m$ は X 上の正則関数であり (cf. Silverman[10, Theorem 4.50])，X から $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ への Zariski 連続関数である．従って，$Z_m^\star(\phi; t)$ は，X 上の Zariski 連続関数を係数に持つ t に関する形式冪級数である．一方，$L_m(\phi; t)/L_{m+1}(\phi; t)$ も，$L_m(\phi; t)$ の明示計算 (命題 5.1) により，X 上の Zariski 連続関数を係数に持つ t に関する形式冪級数であることがわかる．X 上の連続関数を係数に持つ冪級数が X の稠密部分集合で一致するので，これらは全体でも一致し，等式 $Z_m^\star(\phi; t) = L_m(\phi; t)/L_{m+1}(\phi; t)$ は ϕ が完全横断的であるか否かによらず成立する． □

この結果を用い，二次有理関数 ϕ に対するゼータ関数 $Z_m(\phi; t)$ の有理性について論じる．まず，二次有理関数に対して成立する特殊な性質として，次がある．

命題 6.2 (cf. [9])**.** K を標数が 2 でない代数閉体とし，$\phi \in K(z)$ を二次有理関数とする．このとき，$A, B, C, D \in K$ であって，$AD - BC \neq 0$ なるものが存在し，二次有理関数 $\dfrac{Az^2 + B}{Cz^2 + D}$ と ϕ は線形共役である．

ゼータ関数は線形共役で不変であったので，命題 6.1 および命題 6.2 を組み合わせることにより，次が分かる．

系 6.3. K を標数 0 の代数閉体，$\phi \in K(z)$ を 2 次有理関数とする．このとき，非負整数 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，次が成立する．

$$Z_m^\star(\phi; t) = \frac{L_m(\phi; t)}{L_{m+1}(\phi; t)}.$$

が成立する．特に，$Z_m^\star(\phi; t)$ および $Z_m(\phi; t)$ は $K(t)$ の元である．

上記の結果は，ϕ の次数 d によらず常に成立することが期待される．

予想 6.4. K を標数 0 の代数閉体，$\phi \in K(z)$ を有理関数とする．このとき，非負整数 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，次が成立する．

$$Z_m^\star(\phi; t) = \frac{L_m(\phi; t)}{L_{m+1}(\phi; t)}.$$

が成立する．特に，$Z_m^\star(\phi; t)$ および $Z_m(\phi; t)$ は $K(t)$ の元である．

謝辞

本研究集会において講演の機会を下さった小林真一先生および集会の運営に携われた皆様に深い感謝を申し上げます．指導教員である都築暢夫先生には研究における様々な点において丁寧なご指導をしていただきました．また，筆者は東北大学人工知能エレクトロニクス卓越大学院プログラムにおける助成を受けております．

参考文献

[1] A-F. Beardon, *Iteration of rational functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 132, Springer-Verlag, New York, 1991. Complex analytic dynamical systems. MR1128089

[2] P. Cvitanović, K. Hansen, J. Rolf, and G. Vattay, *Beyond the periodic orbit theory*, Nonlinearity **11** (1998), no. 5, 1209–1232. MR1644377

[3] A. È. Erëmenko and G. M. Levin, *Periodic points of polynomials*, Ukrain. Mat. Zh. **41** (1989), no. 11, 1467–1471, 1581. MR1036486

[4] A. Grothendieck, *Séminaire de géométrie algébrique du bois-marie 1965-66, cohomologie l-adique et fonctions l, sga5*, Springer Lecture Notes, vol. 589, Springer-Verlag, 1977.

[5] S. Hatjispyros and F. Vivaldi, *A family of rational zeta functions for the quadratic map*, Nonlinearity **8** (1995), no. 3, 321–332. MR1331815

[6] A. Hinkkanen, *Zeta functions of rational functions are rational*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **19** (1994), no. 1, 3–10. MR1246882

[7] J. Lee, *The artin-mazur zeta functions of certain non-archimedean dynamical systems*, 2015. `arXiv:1505.04249`.

[8] C. T. McMullen, *Complex dynamics and renormalization*, Annals of Mathematics Studies, vol. 135, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994. MR1312365

[9] J. Milnor, *Geometry and dynamics of quadratic rational maps, with an appendix by the author and Lei Tan*, Experimental Mathematics **2** (1993), no. 1, 37 –83.

[10] J-H. Silverman, *The arithmetic of dynamical systems*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 241, Springer, New York, 2007. MR2316407

[11] L. Taelman, *Sheaves and functions modulo p*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 429, Cambridge University Press, Cambridge, 2016. Lectures on the Woods Hole trace formula. MR3496579

[12] K. Takehira, *The rationality of dynamical zeta functions and woods hole fixed point formula*, 2021. `arXiv:2107.05358`.