5 次 DWORK 族に付随する法 2 ガロア表現の保型性とある 5 次 3 項方程式の相互法則について

山内 卓也 (東北大学)

Abstract. 本稿では東北大の都築暢夫氏との共同研究 [37] の内容を紹介する．成果は大きく分けて 2 つある．先ず, 代数体 $K(\subset \overline{\mathbb{Q}})$ 上の 5 次 Dwork 族

$$\mathbb{P}^4 \supset X_\psi : X_0^5 + X_1^5 + X_2^5 + X_3^5 + X_4^5 - 5\psi X_0X_1X_2X_3X_4 = 0,\ \psi \in K,\ \psi^5 \neq 1$$

の重さ 3 の pure モチーフの原始的部分に付随する法 2 ガロア表現 $\overline{\rho}_{\psi,2} : G_K := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K) \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_2)$ の像を 5 次 3 項多項式

$$f_\psi(x) = 4x^5 - 5\psi x^4 + 1,\ \psi \in K$$

と関係付ける (表題の相互法則)．次に K が総実代数体のとき, $\overline{\rho}_{\psi,2}|_{G_M}$ の保型性を証明する (正確な主張は該当箇所を参照)．ただし, M/K は $\overline{\rho}_{\psi,2}$ から具体的に定まる総実かつ高々2 次の拡大.

Contents

1. 共同研究のきっかけ 2
2. 主結果 3
3. $\overline{\rho}_{\psi,2}$ の像の決定 7
3.1. 相互法則の証明 7
3.2. 群論からの補題 8
3.3. Theorem 2.1-(1) の証明 8
3.4. Theorem 2.1-(2) の証明 8
3.5. Theorem 2.1-(3) の証明 9
4. 保型性の証明 9
5. 進展と課題 10
5.1. 進展 10
5.2. 課題 11
6. 多項式の相互法則の纏め 11
6.1. 2 次方程式 11
6.2. 3 次方程式 11
6.3. 4 次方程式 11
6.4. 5 次方程式 12
6.5. n 次方程式 $(n \geq 6)$ 12
References 12

著者は JSPS KAKENHI Grant Number (B) No.19H01778 の援助を受けております.

1. 共同研究のきっかけ

代数体の p 進ガロア表現の保型性問題を解決する上で所謂セール予想と呼ばれる法 p ガロア表現の保型性は解決しなくてはならない重要な問題である．Wiles が解決した $\mathbb{Q}$ 上半安定楕円曲線の保型性 [41] や Khare-Wintenberger が解決した奇既約法 p ガロア表現 $\overline{\rho}: G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ の保型性の証明 [22] において, $\mathrm{Im}(\overline{\rho})$ が可解群である場合 (必然的に素数 p は小さくなければならない) の保型性が最初に重要なステップであった．その保型性は Langlands の底変換の議論 (base change lift と automorphic induction) より従う．例えば, 代数体 K 上の楕円曲線 E の 3 等分点から定まる法 3 ガロア表現 $\overline{\rho}_{E,3}: G_K \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ が可解群であるので, $\overline{\rho}_{E,3}$ は保型的である．他にもこのような例が多くあるがいずれにせよ, 保型性を既存の理論で証明するには法 p ガロア表現の像がある程度 “小さい” ことが要求される．しかし, 法 p ガロア表現の像が小さすぎる場合はその保型性を p 進ガロア表現にリフトする保型性持ち上げ定理の条件に適合しないため, 例えば, 像が自明な場合等小さければよいという訳でもない．

さて, 代数多様体 (またはモチーフ) から構成される p 進ガロア表現の族 (compatible system, cf. [36]) は付随する Mumford-Tate 群 [31](これは簡約代数群となる) の型をみることで, 法 p ガロア表現の型も, 自然密度 0 の例外を除いて, それを反映したものになっている [30]．また, 代数多様体がモジュライ空間の一般的な点などになっており非自明な変形をもつ場合などは p 進ガロア表現の像, そして法 p ガロア表現の像は大きくなる傾向にある．整構造をもつ簡約代数群 $\mathcal{G}$ に有限体 $\mathbb{F}$ を代入して得られる群 $\mathcal{G}(\mathbb{F})$ は多くの場合は可解群からほど遠い．以上の考察より, 像が “小さく” かつ “小さすぎない” 法 p ガロア表現を系統的に与えることはそれほど簡単ではないことが分かる．

著者は 2019 年の夏頃, 自己同型を多く持つ対称性の高い代数多様体 (のモチーフ) の族から定まる法 p ガロア表現から期待するものが系統的に構成できるのではないかと考え具体例を模索していた．そこで, 安直に 5 次 Dwork 族の 3 次のエタールコホモロジーの原始的部分から定まる法 2 表現

$$\overline{\rho}_{\psi,2}: G_K \longrightarrow \mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_2)$$

を考察することにした．ポアンカレ双対性により, $\overline{\rho}_{\psi,2} \subset \mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_2)$ が分かる．後で述べるように群 $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_2)$ は 6 次対称群 S_6 と同型であり, $\overline{\rho}_{\psi,2}$ は S_6 の部分群と同型である．群 S_6 は現在の技術では保型性が担保されない “大きい” 群である．著者は Dwork 族は自己同型を豊富に含むため, その制約により像が小さくなり 5 次対称群 S_5 程度に収まってくれるのではないか?と根拠に乏しい予想を立てていた．Dwork 族は明示的であり, その有限体上の合同ゼータ関数を具体的に計算することは可能である．具体的に与えた $\psi \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ に対して, X_ψ が良還元をもつ素数 p に対してフロベニウス固有多項式 $\overline{P}_{\psi,p}(t) = \det(I_4 - t\overline{\rho}_{\psi,2}(\mathrm{Frob}_p)) \in \mathbb{F}_2[t]$ を計算し, そのリストから何かの法則を見出そうとしたが, $\mathrm{Im}(\overline{\rho}_{2,\psi}) \neq S_6$ をどう判定すればよいかその時点ではよくわからなかった．

しばらくして東北大の数学事務室の隣にあるお茶を飲むスペースに都築氏がくつろいでいたので上記問題を投げかけてみた．それから何度も議論を重ねていくことになった．きっかけを与えてくれた数学事務室に感謝である．当初はフロベニウス固有多項式 $\overline{P}_{\psi,p}(t)$ の決定を行うことが主眼であった．その理由は都築氏が [12] の local zeta function の計算表から考え得るフロベニウス固有多項式

$$1 + t^4,\ 1 + t + t^3 + t^4,\ 1 + t + t^2 + t^3 + t^4,\ 1 + t^2 + t^4$$

の内「$1+t^2+t^4=(1+t+t^2)^2\in\mathbb{F}_2[t]$ は現れない」のではないか?と予想を立てたからである. もしこれが正しければ, S_6 の型 $(3,3)$ の元は $\mathrm{Im}(\overline{\rho}_{\psi,2})$ の元にはなりえないため, $\mathrm{Im}(\overline{\rho}_{\psi,2})\not\subset S_6$ が分かる. そこで, 良還元をもつ p に対して, $|X_\psi(\mathbb{F}_p)|$ の mod 2 での値の計算を開始した. 著者はアフィン部分 $X_\psi(\mathbb{F}_p)\cap\{X_0=1\}$ に作用する位数 4 の自己同型に注目し, $|X_\psi(\mathbb{F}_p)|$ mod 2 の値は難なく計算できた. しかし, $X_\psi/\mathbb{F}_p$ の合同ゼータ関数と $H^3_{\text{ét}}(X_{\psi,\overline{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_2)$ の原始的部分および $\overline{P}_{\psi,p}(t)$ とを関係付けるには非原始的な部分の処理も必要となる. 当初は Goutot による非原始的な部分の記述 [19] に対応する超幾何代数曲線[1]の $\mathbb{F}_p$ 有理点の個数を調べていた. ここから定まるのは $\overline{P}_{\psi,p}(t)$ の t の係数であり, t^2 の係数を調べるには, さらに, 上記対象の $\mathbb{F}_{p^2}$ 有理点の個数を mod 4 で計算する必要があった[2]. これらの困難により, 「mod 4 の計算」を諦め, その代わり $|X_\psi(\mathbb{F}_p)|$ mod 2 と表題の多項式の間に成り立つある種の相互法則により $\overline{\rho}_{\psi,2}$ の像を決定することができた. これと S_6 の部分群の構造とを合わせることで, $\overline{\rho}_{\psi,2}$ の像は S_5 の部分群と同型であることが示された. その後, 都築氏が X_ψ のミラー多様体 W_ψ を考えたほうが計算が飛躍的に簡易化されることに気付いた. 論文 [37] ではタイトルは Dwork 族云々と言いながらも実際にはそのミラー多様体を用いた計算がなされているということになる. 多項式 $f_\psi(x)=4x^5-5\psi x^4+1$ との関係は計算の途中出てくる位数 4 の自己同型の固定点として関係してくる. 実際, Dwork 族の定義方程式に $(X_0,X_1,X_2,X_3,X_4)=(1,x,x,x,x)$ を代入したものが $f_\psi(x)$ である.

2. 主結果

以下主結果を紹介するための記号の準備をする. 整数 $n\geq 1$ に対して, S_n を n 次対称群, A_n を n 次交代群, そして, C_n を位数 n の巡回群とする. K を代数体として, 有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数閉体 $\overline{\mathbb{Q}}$ への埋め込みを固定する. また, $G_K:=\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$ を K の絶対ガロア群とする. パラメータ ψ は K の元であって, $\psi^5\neq 1$ を満たすものを動くものとする. このとき, X_ψ は K 上 smooth である. X_ψ のミラー多様体 W_ψ はアフィントーリック超曲面

$$\mathbb{G}_m^4\supset U_\psi : x_1+x_2+x_3+x_4+\frac{1}{x_1x_2x_3x_4}-5\psi=0. \tag{2.1}$$

から Batyrev [6] ([38] の 6 章に分かり易い解説がある) によって構成された滑らかなコンパクト化として与えられる. 構成から W_ψ は自然に $\mathcal{O}_K[1/5,\psi,1/(\psi^5-1)]$ 上の smooth モデルを持つことがわかる. また, W_ψ の Hodge ダイアモンドは以下で与えられる ($h^i=\dim_{\mathbb{C}}H^i_{\mathrm{dR}}(W_\psi(\mathbb{C}))$, $h^{p,q}=$

[1]代数曲線 $A_\psi: y^5=x^2(1-x)^3(x-\psi^5)^2$, $B_\psi: y^5=x^2(1-x)^4(x-\psi^5)$ などが現れる. B_ψ の方は自己同型 $(x,y)\mapsto(\psi^5/x,\psi^3/(x(1-x)(x-\psi^5)y))$ を持つ.

[2]例えば, $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ を Weil number として, $s_i=\alpha^i+\beta^i+\gamma^i+\delta^i$, $i\in\mathbb{Z}_{>0}$ とおくとき, $P(t)=(1-\alpha t)(1-\beta t)(1-\gamma t)(1-\delta t)$ の t の係数は $-s_1$ で, t^2 の係数は $\frac{1}{2}(s_1^2-s_2)$ で得られる. よって, $P(t)\in\mathbb{Z}[t]$, $s_i\in\mathbb{Z}$ のとき, $P(t)$ mod 2 の t,t^2 の係数は $-s_1$ mod 2, および, $\frac{1}{2}(s_1^2-s_2)$ mod 2, すなわち, s_2 mod 4 で決まる.

$\dim_{\mathbb{C}} H^q(W_\psi(\mathbb{C}), \Omega^p_{W_\psi(\mathbb{C})})$:

$$\begin{array}{rccccccc}
h^0 = h^{0,0} & & & & 1 & & & \\
h^1 = h^{1,0} + h^{0,1} & & & 0 & & 0 & & \\
h^2 = h^{2,0} + h^{1,1} + h^{0,2} & & 0 & & 101 & & 0 & \\
h^3 = h^{3,0} + h^{2,1} + h^{1,2} + h^{0,3} & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
h^4 = h^{4,0} + h^{2,2} + h^{0,4} & & 0 & & 101 & & 0 & \\
h^5 = h^{5,0} + h^{0,5} & & & 0 & & 0 & & \\
h^6 = h^{3,3} & & & & 1 & & & .
\end{array}$$

したがって, $V_{\psi,2} := H^3_{\text{ét}}(W_{\psi,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_2)$ は $\mathbb{Q}_2$ 階数 4 の $\mathbb{Q}_2[G_K]$ 加群となる. またポアンカレ双対性により, G_K 同変 $\mathbb{Q}_2$ 双線形写像

$$\langle *, * \rangle : V_{\psi,2} \times V_{\psi,2} \longrightarrow H^6_{\text{ét}}(W_{\psi,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_2) \simeq \mathbb{Q}_2(3)$$

であって交代的なものが存在する ($\mathbb{Q}_2(3)$ は G_K の 2 進円分指標の 3 回捻り). これより, 2 進ガロア表現

$$\rho_{\psi,2} : G_K \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{Q}_2}(V_{\psi,2}, \langle *, * \rangle) \simeq \mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_2)$$

が構成される. ただし, GSp_4 は $J = \begin{pmatrix} 0_2 & s \\ -s & 0_2 \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ から定まる一般化 symplectic group であり, 任意の可換環 R に対して,

$$\mathrm{GSp}_4(R) := \{X \in M_4(R) \mid {}^t X J X = \nu(X) J,\ {}^\exists \nu(X) \in R^\times\}$$

と定義される.

良く知られているように $V_{\psi,2}$ の G_K 不変 $\mathbb{Z}_2$ 格子 $T_{\psi,2}$ であって, $\langle *, * \rangle$ が整構造を保つものが存在する[3]. これより, 整 2 進ガロア表現

$$\rho_{\psi,2} : G_K \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}_2}(T_{\psi,2}, \langle *, * \rangle) \simeq \mathrm{GSp}_4(\mathbb{Z}_2)$$

を得る. さらに, 還元射 $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{Z}_2/2\mathbb{Z}_2) = \mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_2)$ により法 2 ガロア表現

$$\overline{\rho}_{\psi,2} : G_K \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_2)$$

を得る. 法 2 ガロア表現 $\overline{\rho}_{\psi,2}$ は $T_{\psi,2}$ の取り方に依存するが, その半単純化[4]は $T_{\psi,2}$ の取り方に依存しない. さらに, 半単純化の像は $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_2)$ に値を取るように基底を調整できる.

一方, 6 次対称群 S_6 は $V = \left\{(x_1, \ldots, x_6) \in \mathbb{F}_2^{\oplus 6} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{6} x_i = 0\right\}$ に自然に作用する. ベクトル空間 V の $(1,1,1,1,1,1)$ が生成する直線を L とすると, V 上の $\mathbb{F}_2$ 双線形写像

$$\langle *, * \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}_2, (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{6} x_i y_i$$

[3][37] の Remark 5.2 で説明されている様に, $H^3_{\text{ét}}(W_{\psi,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}_2)$ は torsion free なので, $T_{\psi,2} = H^3_{\text{ét}}(W_{\psi,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}_2)$ と取れる.

[4]$\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_2) \hookrightarrow \mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_2)$ と合成して, $\mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_2)$ に値を取る法 2 ガロア表現とみて半単純化をとる.

は $W=V/L\simeq\mathbb{F}_2^{\oplus 4}$ 上の交代形式 $\langle *,*\rangle_W$ を誘導する. ここで, 交代形式であるとは任意の $x\in W$ に対して, $\langle x,x\rangle_W=0$ が成り立つことを意味する. 以上により, S_6 の $\mathbb{F}_2$ 表現

$$S_6\longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{F}_2}(W,\langle *,*\rangle_W)\simeq \mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_2) \tag{2.2}$$

を得る (最後の同型を得るために W の symplectic basis を一つ固定する). この射は同型であることがわかる ([37] の 3.1 節参照). 以下, この同型を固定し, S_6 と $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_2)$ とを同一視する. また, $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_2)$ の元の型を同型 (2.2) を通して得られる S_6 の元としての型として定義する. 群 S_5 から S_6 への埋め込みは共役の差を除いて 2 通りあり, ひとつは $S_5(b):=\{\sigma\in S_6\mid \sigma(6)=6\}$ であり, もうひとつ $S_5(a)$ は $\{1,2,3,4,5,6\}$ に推移的に作用する ([8] の 5 節参照). 前者 $S_5(b)\subset S_6\overset{(2.2)}{\simeq}\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_2)$ の (tautological) 表現は指数 2 の部分群 (A_5) に制限しても絶対既約であるが, 後者 $S_5(a)$ の表現は数 2 の部分群に制限すると可約となる[5].

表題の 3 項 5 次多項式を

$$f_\psi(x):=4x^5-5\psi x^4+1\in K[x] \tag{2.3}$$

と定義し, K_ψ を f_ψ の K 上の分解体とする. 多項式 f_ψ の判別式は $\mathrm{disc}(f_\psi)=2^8 5^5(1-\psi^5)$ で与えられる. 以上の準備の下, 最初の主結果を述べる:

Theorem 2.1. ([37] の Theorem 6.8, Proposition 3.4, Theorem 7.1 をまとめたもの) 多項式 $f_\psi(x)$ は K 上既約であると仮定する. この時, 次が成立する:

(1) $L_\psi:=\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{Ker}(\overline{\rho}_{\psi,2})}=K_\psi$ であり, $\mathrm{Im}(\overline{\rho}_{\psi,2})$ は型 $(3,3)$ の元を含まない. 特に前半の主張から, $\mathrm{Im}(\overline{\rho}_{\psi,2})$ は S_5 の部分群と同型であり, f_ψ の既約性の仮定からその位数は 5 で割り切れる;
(2) $\overline{\rho}_{\psi,2}$ は $\mathbb{F}_2$ 上既約, つまり, $\overline{\rho}_{\psi,2}\simeq\overline{\rho}_{\psi,2}^{\mathrm{ss}}$ が成り立つ. さらに像が $F_{20}=C_4\ltimes C_5, A_5$ または S_5 のとき, $\overline{\rho}_{\psi,2}$ は絶対既約であり, そうでないときは C_5 または $D_{10}=C_2\ltimes C_5$ と同型である. さらに, $\overline{\rho}_{\psi,2}$ が絶対既約であるとき, $\mathrm{Im}(\overline{\rho}_{\psi,2})$ は同一視 (2.2) の下, 共役の差を除いて, $S_5(b)(\subset S_6)$ の部分群となる;
(3) $K=\mathbb{Q}$ のとき,

$$\mathrm{Im}(\overline{\rho}_{\psi,2})\simeq\begin{cases} S_5 & \psi\neq 0\ \text{のとき}\\ F_{20} & \psi=0\ \text{のとき.}\end{cases}$$

この定理により, $f_\psi(x)$ の多項式の mod v 分解法則を次のように理解することができる. K の有限素点 $v\nmid 2$ であって, $\mathrm{ord}_v(\psi)\geq 0$ かつ $\mathrm{ord}_v(\psi^5-1)=0$ を満たすものを考える. このとき, W_ψ は v で良還元をもつ. 素点 v の剰余体を $\mathbb{F}_v$ とし, その位数を q_v とおく ($\mathbb{F}_v=\mathbb{F}_{q_v}$ と表わすこともある). また,

$$P_{\psi,v}(t):=\det(1_4-t\rho_{\psi,2}(\mathrm{Frob}_v))=1-a_{\psi,v}t+b_{\psi,v}t^2-q_v^3a_{\psi,v}t^3+q_v^6t^4\in\mathbb{Z}_2[t]$$

を 2 進ガロア表現の v におけるフロベニウス固有多項式とする (これは $\mathbb{Z}$ 上の Weil 多項式となる). ミラー多様体 $W_\psi/\mathbb{F}_v$ の合同ゼータ関数は

$$Z_{W_\psi/\mathbb{F}_v}(t)=\frac{P_{\psi,v}(t)}{(1-t)Q_{\psi,v}(t)Q_{\psi,v}(qt)(1-q_v^3t)} \tag{2.4}$$

[5] [18] において, この群に関する法 2 ガロア表現の保型性を論じている.

となる. W_ψ の Hodge ダイアモンドより, $Q_{\psi,v}(t)$ は $Q_{\psi,v}(t)=1+\cdots+q_v^{101}t^{101}$ の形を取り, その reciprocal roots の固有値はいずれも q_v となる. 式 (2.4) の両辺の対数微分をとって, $t=0$ とすれば,

$$|W_\psi(\mathbb{F}_v)|=q_v^3+Q'_{\psi,v}(0)+q_vQ'_{\psi,v}(0)+1-a_{\psi,v}$$

がわかるので, $|W_\psi(\mathbb{F}_v)|\equiv a_{\psi,v} \bmod 2$ である (q_v は奇数であることに注意). ここで

$$n(f_\psi,q_v)=|\{x\in\mathbb{F}_v|\ f_\psi(x)=0\}|$$

とおくと, 表題の相互法則

$$a_{\psi,v}\ \equiv\ n(f_\psi,q_v)+1\,(\mathrm{mod}\,2) \tag{2.5}$$

が成立する. これは任意の有限次拡大 M/K と M の素点 w であって W_ψ が良還元を持つものに対しても成立していることに注意する (Remark 3.2 も参照). 定義より $(a_{\psi,v} \bmod 2)=\mathrm{tr}\overline{\rho}_{\psi,2}(\mathrm{Frob}_v)$ であることに注意.

この相互法則は Theorem 2.1 を証明する上で重要な役割を果たす. この相互法則と Theorem 2.1 から次がわかる (型 (3,3) に対応するフロベニウス固有多項式 $1+t^2+t^4$ が現れないことに注意):

$P_{\psi,v}(t) \bmod 2$	$n(f_\psi,q_v) \bmod 2$	$\overline{\rho}_{\psi,2}(\mathrm{Frob}_v)$ の位数	$f_\psi(x) \bmod v$ の既約分解
$1+t^4$	1	1	1+1+1+1+1
$1+t^4$	1	2	2+1+1+1
$1+t^4$	1	4	4+1
$1+t+t^3+t^4$	0	3	3+1+1
$1+t+t^3+t^4$	0	6	3+2
$1+t+t^2+t^3+t^4$	0	5	5

Table 1

ただし, 一番右の列の数字は多項式の分解に現れる既約因子の次数を意味する. この Table 1 から, フロベニウス固有多項式の情報から $f_\psi(x) \bmod v$ の分解法則が部分的に支配されることが分かる. 逆はもっと強く, 多項式の分解法則によって (Theorem 2.1 と合わせて), $\overline{\rho}_{\psi,2}$ が決定される. 特に, $P_{\psi,v}(t) \bmod 2$ が決定される. これより, Dwork 族 (またはミラー多様体) と f_ψ の関係 (相互法則) は

$|W_\psi(\mathbb{F}_{q_v})| \bmod 2$, $|W_\psi(\mathbb{F}_{q_v^2})| \bmod 4$ の情報 $\Longleftrightarrow P_{\psi,v}(t) \bmod 2 \overset{\le}{\Longleftrightarrow} \overline{\rho}_{\psi,2}(\mathrm{Frob}_v) \Longleftrightarrow f_\psi(x)$ の $\mathbb{F}_{q_v}$ 上の分解.

の様になっている. ただし, $\overset{\le}{\Longleftrightarrow}$ は右辺の方が左辺よりも強い条件であることを意味する.

次に保型性に関する主張を述べる. 以下, K を総実代数体とする. K の高々2 次の拡大体 M を合成 $G_K \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_2) \overset{(2.2)}{\simeq} S_6 \xrightarrow{\mathrm{sgn}} \{\pm\}$ の核に対応するものとする. 具体的には $M=K(\sqrt{\mathrm{disc}(f_\psi)})=K(\sqrt{5(1-\psi^5)})$ によって与えられる. Theorem 2.1 の応用として次を証明することができる:

Theorem 2.2. ([37] の Theorem 4.7, Theorem 4.8) K を総実代数体とし, f_ψ は K 上既約であるとする. 任意の K の埋め込み σ に対して, $\sigma(\psi)<1$ と仮定する (この仮定により M は総実代数体

となる). さらに, $\overline{\rho}_{\psi,2}$ は絶対既約かつ, $[K:\mathbb{Q}]$ が偶数のときは $\mathrm{Im}(\overline{\rho}_{\psi,2}) \simeq A_5$ を仮定する. このとき, $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_M)$ 上のパラレル重さ 3 の Hecke 固有, 正則 Siegel-Hilbert カスプ形式 F であって,

$$\overline{\rho}_{\psi,2}|_{G_M} \simeq \overline{\rho}_{F,2}$$

を満たすものが存在する. ただし, $\overline{\rho}_{F,2}$ は F に付随する 2 進ガロア表現 $\rho_{F,2}$ の法 2 還元である (当該保型形式に対応するガロア表現については [27] の 3 節に概要があるので参照せよ).

Remark 2.3. Theorem 2.2 で得られたカスプ形式 F のレベルは $\overline{\rho}_{\psi,2}$ の Artin 導手と関連することが期待される. 事実, [10] の Conjecture 4.7, 4.9 で説明されているような Hilbert モジュラー形式に付随する法 2 ガロア表現に対して level lowering theorem が証明されれば, その主張は正しい.

本稿では次節と 4 節で Theorem 2.1 と Theorem 2.2 の証明の概略を与える. そして 5 節ではより一般の Dwork 族のミラーに対して類似の結果が成り立つことを紹介する. この部分は都築氏との共同研究の続編の内容である. 6 節では多項式の相互法則について纏めた.

最後に, 本研究集会の講演の機会を与えてくださいました小林真一先生およびオーガナイザーとスタッフの皆様に感謝申し上げます. また講演後に貴重なご意見をくださいました大坪氏に感謝します.

3. $\overline{\rho}_{\psi,2}$ の像の決定

この節では Theorem 2.1 の証明の概略を与える.

3.1. **相互法則の証明.** 先ず相互法則 (2.5) の証明を与える. 証明には次の事実を用いる.

Lemma 3.1. ([37] の 5.2 節参照) 任意の K の素点であって, $v \nmid 2$ で W_ψ は良還元を持つとする. このとき,

$$|W_\psi(\mathbb{F}_v)| \equiv |U_\psi(\mathbb{F}_v)| + 1 \bmod 2$$

が成立する.

証明には Batyrev[6] の明示的構成を用いる ([38] の 6 章も参照). これを認めた上で, (2.5) の証明を行う. 変数を一つシフトする U_ψ の自己同型 σ が生成する群を C_4 とする. このとき, $U_\psi(\mathbb{F}_v)$ の C_4 軌道分解を考えれば,

$$|U_\psi(\mathbb{F}_v)| \equiv |\mathrm{Fix}(\sigma)| \bmod 2$$

となる. ここで,

$$|\mathrm{Fix}(\sigma)| = |\{(x,x,x,x) \in (\mathbb{F}_v^\times)^4 \mid 4x + 1/x^4 - 5\psi = 0\}|$$

より,

$$|U_\psi(\mathbb{F}_v)| \equiv n(f_\psi, \mathbb{F}_v) \bmod 2$$

となり, 上記 Lemma 3.1 と合わせて (2.5) を得る.

Remark 3.2. ミラー多様体 W_ψ は K 上定義されているが, 有限次拡大 M/K に対して, W_ψ は M 上定義された代数多様体とも思える. これより, K の素点のみならず, 任意の K の有限次拡大 M の有限素点 w であって, W_ψ が良還元をもつに対しても, 相互法則 (2.5)

$$|W_\psi(\mathbb{F}_w)| \equiv n(f_\psi, \mathbb{F}_w) + 1 \bmod 2$$

が成立する.

3.2. **群論からの補題.** 次の補題は S_6 の部分群の構造から従う．著者はこれを GAP[17] で確認した．

Lemma 3.3. 群 S_6 の部分群 H であってその位数が 5 で割り切れるものを考える．このとき, H の正規部分群であって, 位数が 5 で割り切れないものは自明な群に限る．

3.3. **Theorem 2.1-(1) の証明.** まず次を示す:

Lemma 3.4. 有限ガロア群 $\mathrm{Gal}(L_\psi K_\psi/K_\psi)$, $\mathrm{Gal}(L_\psi K_\psi/L_\psi)$ の位数はともに 5 で割り切れない．

Proof. K の素点 v で W_ψ が良還元であるとき, v の上の K_ψ の素点を w とする．このとき, 明らかに $n(f_\psi, \mathbb{F}_w) = 5 \equiv 1 \bmod 2$ である．相互法則 (2.5) より, $a_{\psi,w} \equiv 0 \bmod 2$. これより, フロベニウス多項式の形をみれば, $\overline{\rho}_{\psi,2}(\mathrm{Frob}_w)$ の位数は 5 になりえないことがわかる (位数 5 の元の固有多項式は $1 + t + t^2 + t^3 + t^4$ であった). Chebotarev 密度定理より, $\mathrm{Gal}(L_\psi K_\psi/K_\psi)$ の任意の元はそのような素点 w を用いて, $\overline{\rho}_{\psi,2}(\mathrm{Frob}_w)$ と表わせるので前者の群に対する主張を得る．

後者の群に対して, 同様に K の素点 v を考えるが, $v \nmid 10, \mathrm{ord}_v(\psi) \geq 0$ かつ $\mathrm{ord}(\psi^5 - 1) = 0$ を満たすとする．このとき, v は f_ψ の判別式を割らない．そのような素点 v の上にある L_ψ の素点 w をとる．このとき, L_ψ の定義より, $\overline{\rho}_{\psi,2}(\mathrm{Frob}_w)$ は自明である．従って, 固有多項式は $1+t^4$ である．再び相互法則 (2.5) により, $n(f_\psi, \mathbb{F}_w)$ は 4 以下の偶数であることがわかる．これより, $\mathrm{Gal}(L_\psi K_\psi/L_\psi)$ の v での分解群 (v は f_ψ の判別式をわらないので惰性群は自明であることに注意) は位数は 2 冪である．再び Chebotarev 密度定理を用いた議論から, 結論を得る． □

Proof. (Theorem 2.1-(1) の証明.) 以下で $L_\psi = K_\psi$ を示す．まず次の図式を考える (square 部分は可換).

(3.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}(K_\psi L_\psi/K) \arrow[r, "\mathrm{rest}"] & \mathrm{Gal}(K_\psi/K) \arrow[r, hook] & S_5 \\
\mathrm{Gal}(K_\psi L_\psi/L_\psi) \arrow[u, "\triangledown"] \arrow[r, "\mathrm{rest}"] & \mathrm{Gal}(K_\psi/K_\psi \cap L_\psi) \arrow[u, "\triangledown"] &
\end{tikzcd}$$

縦の射は包含写像であり, それぞれ source は target の正規部分群となっている．また, 記号 rest は K_ψ への制限写像を意味する．制限写像は全射なので Lemma 3.4 より $\mathrm{Gal}(K_\psi/K_\psi \cap L_\psi)$ の位数は 5 で割り切れない．さらに Lemma 3.3 よりこの群は自明となる, 特に, $K_\psi \subset L_\psi$ である．これより

$$\mathrm{Gal}(L_\psi/K_\psi) \xrightarrow{\triangleleft} \mathrm{Gal}(L_\psi/K) \overset{\overline{\rho}_{\psi,2}}{\hookrightarrow} \mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_2) \overset{(2.2)}{\simeq} S_6$$

に再び Lemma 3.4 と Lemma 3.3 を適用すると, $\mathrm{Gal}(L_\psi/K_\psi)$ は自明となり, $L_\psi = K_\psi$ を得る．

$\mathrm{Im}(\overline{\rho}_{\psi,2})$ が型 (3,3) の元を含まないことは次のようにしてわかる．含んだと仮定すると, ある K の素点 v で W_ψ が良還元を持つものであって, $P_{\psi,v}(t) \equiv 1+t^2+t^4 \bmod 2$ なるものが存在する．これより, $\overline{\rho}_{\psi,2}(\mathrm{Frob}_v)$ の位数は 3 または 6 であることが分かる．一方, 相互法則 (2.5) より, $n(f_\psi, \mathbb{F}_v)$ は奇数なので, $\mathrm{Gal}(K_\psi/K)$ の v での分解の位数は 2 冪となる．ところが, $\mathrm{Gal}(K_\psi/K) = \mathrm{Gal}(L_\psi/K)$ なので, 先の考察に矛盾． □

3.4. **Theorem 2.1-(2) の証明.** S_6 の部分群であって, 位数が 5 で割り切れるものは

$$C_5, D_{10} := C_2 \ltimes C_5,\ F_{20} := C_4 \ltimes C_5,\ A_5,\ S_5,\ A_6,\ S_6$$

のいずれかである．主張はこれらの群の $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_2)$ 内での実現と, Theorem 2.1-(1) の後半の性質である, 像が型 (3,3) の元を持たないことを利用することで証明される．

3.5. **Theorem 2.1-(3) の証明.** 以下, $\psi \neq 0, 1$ とする. Theorem 2.1-(2) より, 像は

$$C_5, D_{10},\ F_{20},\ A_5,\ S_5$$

のいずれかである. まず, f_ψ の既約性の仮定より, 具体的に実根の個数 (高々3 個) を調べることで, f_ψ は実数でない根を持つことが直接計算で確認できる. よって, 像は複素共役に対応する元 (位数 2) を含むことになるので, C_5 は除外される. 次に, A_5 の場合は f_ψ の判別式が平方数になるため, f_ψ の判別式 $2^8 \cdot 5^4 \cdot 5(1-\psi^5)$ に注目すれば, $\psi \neq 1$ と仮定しているので, アフィン超楕円曲線

$$C_1 : Y^2 = 5(1-X^5)$$

に $(X,Y) = (1,0)$ 以外の有理数解が存在することになる. D_{10}, F_{20} の場合は Roland-Yui-Zagier [32] と Dummit[16] の結果を用いると, アフィン超楕円曲線

$$C_2 : Y^2 = X^{10} + 11X^5 - 1$$

に有理数解が存在することになる. 各 $i = 1, 2$ に対して, $C_i(\mathbb{Q})$ を $\widetilde{C}_i \longrightarrow \mathbb{P}^1,\ (X,Y) \mapsto X$ の分岐点に注目することで ($\widetilde{C}_i$ は C_i の smooth コンパクト化), Coleman-Chabauty 法などの高級な道具を使うことなく初等的に決定できる. そして, $C_1(\mathbb{Q}) = \{(1,0)\},\ C_2(\mathbb{Q}) = \emptyset$ が示されることになり矛盾を得る. 従って, $\psi \neq 0$ のときは, 像は S_5 と同型. 最後に, $\psi = 0$ の場合は $f_0(x) = 4x^5 + 1$ となり, この $\mathbb{Q}$ 上の分解群のガロア群は明らかに, F_{20} となる.

計算の途中で $\widetilde{C}_i$ のヤコビアン $J(\widetilde{C}_i)$ の Mordell-Weil 群 $J(\widetilde{C}_i)(\mathbb{Q})$ の階数を計算するために Magma[9] を用いたことを付記しておく. 証明の詳細は [37] の 7 節にある. これらの手法を一般化することは面白い問題であると思われる.

4. 保型性の証明

この節では Theorem 2.2 の証明の概略を説明する (証明は技術的なので細部に関しては [37] の 4 節を参照). 法 2 ガロア表現 $\overline{\rho}_{\psi,2}$ の像が A_5 または S_5 と同型である場合を考える. 仮定より, $\overline{\rho}_{\psi,2}|_{G_M}$ の像は A_5 と同型である. 群 A_5 の $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_2)$ への絶対既約な埋め込みはただ一つ存在し, $\overline{\rho}_{\psi,2}|_{G_M}$ の像がまさにそうなっていることが Theorem 2.1 の結果を使って証明される. 指標を比較することによって, ある totally odd な表現 $\tau : G_M \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_4)$ であって

$$\overline{\rho}_{\psi,2}|_{G_M} \simeq \mathrm{Sym}^3\tau$$

を満たすものが存在することが分かる (具体的に構成する). ここで totally odd であるとは任意の複素共役 $c \in G_M$ に対して, $\tau(c)$ は位数 2 であることを意味する. この事実は ψ に課した条件から従う. 表現 τ の像は A_5 と同型であるので, Sasaki [33] の保型性持ち上げ定理を用いて, τ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_M)$ 上の重さ 1 の Hilbert モジュラーカスプ形式 (古典形式) からくることが分かる. これを法 2 還元して, Hasse 不変量 H の冪 $H^{k-1},\ k \gg 0$ をかけることで法 2 幾何的形式で重さ k が十分大きいものであって τ に対応するものが存在する. この法 2 幾何的 Hilbert モジュラーカスプ形式は Serre の連接層の vanishing 定理を用いて, 重さ k の Hilbert モジュラーカスプ形式 (古典形式) にリフトできる (以下, 幾何的リフトと呼ぶ). ここで, 仮定より M は偶数次数であったことを思い出す (ここが一つのポイント). これより, 得られた形式を Jacquet-Langlands 対応 (JL 対応と以下略記) により代数的モジュラー形式と対応させることができる. さらに法 2 還元を行い, 合同により重さ 0 の法 2 代数的形式を得る. ここで JL 対応を用いる利点を述べる. 一般に, 重さが小さい

場合法2幾何的形式が古典形式にリフトできるかどうかは難しい問題である (実際にリフトしない場合がある). ところが代数的形式はレベル構造をうまく増加させることでこの問題を解消できる. よって, 重さ 0 の法 2 代数的形式は重さ 0 の古典代数的形式にリフトし, これを再び JL 対応で戻すことで重さ 2 の Hilbert モジュラーカスプ形式 F であってその法 2 表現が τ と同型なものを見つけることができる:

$$\begin{tikzcd}
f_1 : \text{重さ } 1 \text{ の古典形式} \arrow[d, "\text{法 } 2 \text{ 還元}"] & f_k : \text{重さ } k \gg 0 \text{ の古典形式} \arrow[r, "\text{JL 対応}"] \arrow[d, "\text{法 } 2 \text{ 還元}"] & g : \text{代数的形式} \arrow[d, "\text{法 } 2 \text{ 還元}"] & g_0 : \text{重さ } 0 \text{ の代数的形式} \arrow[d, "\text{JL 対応}"] \\
\widetilde{f}_1 : \text{重さ } 1 \text{ の法 } 2 \text{ 形式} \arrow[r, "\times H^{k-1}", "k \gg 0"'] & \widetilde{f}_k : \text{重さ } k \gg 0 \text{ の法 } 2 \text{ 形式} \arrow[u, bend left, "\text{幾何的リフト}"] & \widetilde{g} \equiv \widetilde{g}_0 : \text{法 } 2 \text{ 重さ } 0 \text{ へ調整} \arrow[ur, "\text{代数的リフト}"'] & F : \text{重さ } 2 \text{ の古典形式}
\end{tikzcd}$$

ただし, 古典形式とは $\mathbb{C}$ 上の Hilbert モジュラー形式を指し, 代数的形式とは JL 対応で対応する, 代数的モジュラー形式のことを指す. 重さ 2 の古典的 Hilbert モジュラー形式は JL 対応によって, 重さ 0 の代数的モジュラー形式に対応することに注意. 最後は Kim-Shahidi の symmetric cubic lift [24] と Weissauer による generic packet 予想の解決 ([39],[40]) を用いて所望の結果を得る.

Remark 4.1. 我々の法 2 ガロア表現 $\overline{\rho}_{\psi,2}$ は 2 進ガロア表現 $\rho_{\psi,2}$ の法 2 還元である. 従って, $\overline{\rho}_{\psi,2}$ に対する保型形式として, $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_K)$ 上の保型形式が候補である. これは 2 進ガロア表現 $\rho_{\psi,2}$ の保型性を念頭においた設定である. それとは別に $\overline{\rho}_{\psi,2}$ は直交群 $\mathrm{SO}(4)(\mathbb{F}_2)$ にも値を取る法 2 ガロア表現とみなすことができる. この場合, $\overline{\rho}_{\psi,2}$ に対応する, $\mathrm{GO}(4)(\mathbb{A}_K)$ 上の保型形式を構成することができる ([37] の 4.4.2 節参照). 構成には non-paritious Hilbert モジュラー形式に付随するガロア表現 [14] を用いる. これは, 最早, 2 進ガロア表現 $\rho_{\psi,2}$ とは関係ない設定になっているが, $\overline{\rho}_{2,\psi}$ の $\mathrm{GO}(4)(\mathbb{A}_K)$ に関する保型性はそれ自身興味深い事実であると思われる.

5. 進展と課題

5.1. **進展.** 講演の最後にも触れたが, 一般の Dwork 族に対しても以下のことが証明できている (都築氏との共同研究). 整数 $n \geq 1$ に対して, 次元 n の Dwork 族

$$\mathbb{P}^{n+1} \supset X_\psi^n : X_0^{n+2} + \cdots + X_{n+1}^{n+2} - (n+2)\psi X_0 \cdots X_{n+1} = 0,\ \psi \in K$$

を考える. そのミラー W_ψ^n は次のアフィントーリック超曲面

$$\mathbb{G}_m^{n+1} \supset U_\psi : x_1 + \cdots + x_{n+1} + \frac{1}{x_1 \cdots x_{n+1}} - (n+2)\psi = 0.$$

から, $n = 3$ の場合とまったく同様に, Batyrev の手法 [6] ([38] の 6 章も参照) によって構成される. このとき, 次を証明することができる: $n = p$ が奇素数のとき, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[G_K]$ 加群として

$$H^n_{\text{ét}}(W^n_{\psi,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\mathrm{ss}} \simeq H^1_{\text{ét}}(C^n_{\psi,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\mathrm{ss}}$$

ただし, C_ψ^n はアフィン超楕円曲線 $y^2 - \{(n+2)\psi x - n\}y + x^{n+2} = 0$ の smooth コンパクト化である. ここで, $H^n_{\text{ét}}(W^n_{\psi,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 階数は $n+1$ であり, C_ψ^n の種数は $\dfrac{n+1}{2}$ である.

さらに, ある特殊な条件を満たす奇素数 n に対しては $H^n_{\text{ét}}(W^n_{\psi,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ に付随する法 2 ガロア表現の像と多項式 $f_{n,\psi}(x) = (n+1)x^{n+2} - (n+2)\psi x^{n+1} + 1$ が $n = 3$ の場合と同様に関係することが分かっている.

5.2. **課題.** Goutet の論文 [19] は比較的最近の (そう古くはない) 論文である. Dwork 族が Sato-Tate 予想の証明 ([5]) に援用されてから注目度は上がったとはいえそれ自身の幾何的数論的性質を調べることは興味深い問題であると思われる. 例えば, [4] において Barnet-Lamb は, 任意の素数 ℓ に対して $H^3_{\text{ét}}(X_{\psi,\overline{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_\ell)$ に現れる非原始的成分の潜在的保型性を証明し, $H^3_{\text{ét}}(X_{\psi,\overline{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_\ell)$($\mathbb{Q}_\ell$ 階数 204) の潜在的保型性を証明している[6]. 隈部氏の論文 [26] では Dwork 族の合同ゼータの有限超幾何関数を用いた分解が論じられており, モチーフレベルでもこの分解が期待される (中川氏の論文 [29] も参照).

また, 代数多様体 (またはモチーフ)X の捻じれ係数のコホモロジーにはもはや重さの概念はないので, 別の (次元が異なるかもしれない) 代数多様体のコホモロジーとの間に (捻じれガロア加群としての) 同型が起こり得る. 例えば, 正則楕円保型形式は常に重さ 2 の保型形式と合同である. 正則楕円保型形式に対しては, このような合同の存在は群コホモロジーを用いたり保型性持ち上げ定理を用いるなど幾つかの方法で証明される. いずれにせよ保型形式に即した議論である. しかし, 我々のように自己同型の作用の固定点に着目した議論で新たにそのような合同が証明できれば, 様々な場合に今回の結果が拡張できると期待する.

6. 多項式の相互法則の纏め

代数体 $K(\subset\overline{\mathbb{Q}})$ 上の n 次既約多項式を $f(x)$ とし, $f(x)$ の K 上の分解体を K_f, ガロア群を $G_f=\mathrm{Gal}(K_f/K)$ とする. 以下, (f,K) の相互法則といえば, K_f/K の不分岐素点 v に対して, G_f に属する Frob_v(の表現に対応する何らかの対象[7]) と f の mod v 分解法則の間に成立する関係のことを意味する (例えば [20] の 3 章および 4 章を参照). また, $n\geq 3$ のとき, G_f がアーベルな場合は, $n=2$ の場合と同様に類体論で分解法則が記述できるため, この場合については触れない.

6.1. **2 次方程式.** この場合は $G\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ はアーベル群なので, 相互法則は類体論によって完全に統制される. これらは, G の非自明な指標 (ルジャンドル記号やヒルベルト記号等で) 記述される. 歴史については [35] の p.419 を参照[8].

6.2. **3 次方程式.** G_f が非可換な場合は S_3 と同型である. この場合, 小池氏による楕円曲線の 2 等分点や重さ 1 の保型形式による相互法則が知られている [25],[2].

6.3. **4 次方程式.** $G_f\simeq D_4$ かつ $K=\mathbb{Q}$ の場合は 3 次のときと同様な研究が [21],[1],[2],[28] にある. A_4,S_4 の場合は, 3 次既約 Artin 表現およびそれに対応する保型形式[9]を用いて, 相互法則を記述することは可能である. 2 次元 Artin 表現として実現するにはこれらの中心拡大を求める必要がある (embedding problem). これらに関しては [7] やそこで紹介される文献を参照.

---

[6]脚注 1 の曲線 A_ψ,B_ψ は $\psi\neq 0$ のときは種数 4 であり, $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ の作用を持つので, GL_2 型のガロア表現を誘導する. ここから潜在的保型性を証明することは現在の技術では難しくない問題である. 実際, [4] では「$H^3_{\text{ét}}(X_{\psi,\overline{\mathbb{Q}}_\ell},\mathbb{Q}_\ell)$ は Hodge-Tate 重さが multiplicity free ではないが, ある有限群による商をとれば multiplicity free になること」を証明することで, (既存の潜在的保型性定理を援用し) 主張を得ている.

[7]例えば, ルジャンドル記号や保型形式のこと.

[8]文献は広島国際大学の西来路氏からご教示頂きました.

[9]2 次元 Artin 表現の symmetric square としても実現できる.

6.4. **5 次方程式.** $G_f \simeq A_5$ の場合, K が総実代数体で対応する Artin 表現が odd 既約な 2 次元表現からくる場合は相互法則は重さ 1 の保型形式の symmetric square で記述可能 (保型側の記述に関しては論文 [23] があるが, 相互法則を論じた文献は著者は知らない). 同様に $G_f \simeq S_5$ の関して, Calegari の仕事 [11] がある. この場合, S_5 は A_5 を指数 2 の部分群として持ち, 先に述べた A_5 の記述を用いる. 2 次拡大 M/K を $S_5 \supset A_5$ に対応するものとすると, 保型形式は Asai-transfer で GL_2/M から直交群 $\mathrm{GO}(4)/K$ へ移送されるもので実現される. いずれの場合も相互法則を明示した文献を著者は知らない. 本稿の結果はある 3 項 5 次方程式の相互法則を与えている.

6.5. **n 次方程式 ($n \geq 6$).** G_f は generic な f に対して "大きな" 群になり, 対応する保型形式を見出して, 相互法則を論じることは現在の技術では難しい. 一方で, 都築氏との共同研究の続編で紹介した $n-2$ 次元 Dwork 族の法 2 表現はある n 次方程式との相互法則を与える (n が素数でありかつある条件を満たす場合).

また逆にアーベル多様体の等分点や保型形式に付随する法 p ガロア表現を与えてそれの像を決定し (cf. [3], [15]), 法 p ガロア表現が切り取る代数体を実現する多項式が明示的に与えられるのであれば, その多項式に関する相互法則を法 p ガロア表現のフロベニウス元の固有多項式で記述することができる (cf. [13]).

References

[1] J-A. Antoniadis, Höhere Reziprozitätsgesetze und Modulformen vom Gewicht Eins. J. Reine Angew. Math. 361 (1985), 11–22.

[2] J-A. Antoniadis, Diedergruppe und Reziprozitätsgesetz. J. Reine Angew. Math. 377 (1987), 197–209.

[3] S. Arias-de-Reyna, L. Dieulefait, and G. Wiese, Compatible systems of symplectic Galois representations and the inverse Galois problem I. Images of projective representations. Trans. Amer. Math. Soc. 369 (2017), no. 2, 887–908.

[4] T. Barnet-Lamb, Meromorphic continuation for the zeta function of a Dwork hypersurface, Algebra Number Theory 4 (2010), no. 7, 839-854.

[5] T. Barnet-Lamb, D. Geraghty, M. Harris, and R. Taylor, A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy II. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 47 (2011), no. 1, 29-98.

[6] V.-V. Batyrev, Dual polyhedral and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties. J. Algebraic Geom. 3 (1994), no. 3, 493-535.

[7] P. Bayer, Computational aspects of Artin L-functions. Zeta functions in algebra and geometry, 3–20, Contemp. Math., 566, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

[8] A. Brumer, A. Pacetti, C. Poor, G. Tornaria, J. Voight, and D. Yuen, On the paramodularity of typical abelian surfaces. Algebra Number Theory 13 (2019), no. 5, 1145-1195.

[9] W. Bosma, J. Cannon, and C. Playoust, The Magma algebra system. I. The user language. J. Symbolic Comput., 24(3-4):235-265, 1997. Computational algebra and number theory (London, 1993).

[10] K. Buzzard, F. Diamond, and F. Jarvis, On Serre's conjecture for mod ℓ Galois representations over totally real fields. Duke Math. J. 155 (2010), no. 1, 105-161.

[11] F. Calegari, The Artin conjecture for some S_5-extensions. Math. Ann. 356 (2013), no. 1, 191–207.

[12] P. Candelas, X. de la Ossa, and F. Rodriguez-Villegas, Calabi-Yau manifolds over finite fields. II. Calabi-Yau varieties and mirror symmetry (Toronto, ON, 2001), 121-157, Fields Inst. Commun., 38, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[13] J-E. Couveignes and B. Edixhoven, Computational aspects of modular forms and Galois representations. Howonecancompute in polynomial time the value of Ramanujan ' s tau at a prime. Annals of Mathematics Studies, 176. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011. xii+425 pp.

[14] L. Dembele, D. Loeffler, and A. Pacetti, Non-paritious Hilbert modular forms. Math. Z. 292 (2019), no. 1-2, 361-385.

[15] L. Dieulefait and G. Wiese, On modular forms and the inverse Galois problem. Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), no. 9, 4569–4584.

[16] D. S. Dummit, Solving solvable quintics. Math. Comp. 57 (1991), no. 195, 387-401.

[17] GAP - Groups, Algorithms, Programming - a System for Computational Discrete Algebra.

[18] A. Ghitza and T. Yamauchi, Automorphy of mod 2 Galois representations associated to certain genus 2 curves over totally real fields, available at arXiv:2010.10021 .

[19] P. Goutet, On the zeta function of a family of quintics. J. Number Theory 130 (2010), no. 3, 478-492.

[20] 平松 豊一, 数論を学ぶ人のための相互法則入門 (数理情報科学シリーズ), 牧野書店 (1998/5/1).

[21] N. Ishii, Cusp forms of weight one, quartic reciprocity and elliptic curves. Nagoya Math. J. 98 (1985), 117–137.

[22] C. Khare and J-P. Wintenberger, Serre's modularity conjecture. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II, 280–293, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.

[23] H-H. Kim, An example of non-normal quintic automorphic induction and modularity of symmetric powers of cusp forms of icosahedral type. Invent. Math. 156 (2004), no. 3, 495–502.

[24] H.-H. Kim and F. Shahidi, Symmetric cube L-functions for GL_2 are entire. Ann. of Math. (2) 150 (1999), no. 2, 645-662.

[25] M. Koike, Higher reciprocity law, modular forms of weight 1 and elliptic curves. Nagoya Math. J. 98 (1985), 109–115.

[26] S. Kumabe, Dwork hypersurfaces of degree six and Greene's hypergeometric function, a preprint available on arXiv:2010.13079, to appear in Hiroshima Math. J.

[27] C.-P. Mok, Galois representations attached to automorphic forms on GL_2 over CM fields. Compos. Math. 150 (2014), no. 4, 523-567.

[28] C-J. Moreno, The higher reciprocity laws: an example. J. Number Theory 12 (1980), no. 1, 57–70.

[29] A. Nakagawa, Artin L-functions of diagonal hypersurfaces and generalized hypergeometric functions over finite fields, a preprint available on arXiv:2111.15054.

[30] S. Patrikis, A. Snowden, and A. Wiles, Residual irreducibility of compatible systems. Int. Math. Res. Not. IMRN 2018, no. 2, 571–587.

[31] R. Pink, l-adic algebraic monodromy groups, cocharacters, and the Mumford-Tate conjecture. J. Reine Angew. Math. 495 (1998), 187–237.

[32] G. Roland, N. Yui, and D. Zagier, A parametric family of quintic polynomials with Galois group D_5. J. Number Theory 15 (1982), no. 1, 137-142.

[33] S. Sasaki, Integral models of Hilbert modular varieties in the ramified case, deformations of modular Galois representations, and weight one forms. Invent. Math. 215 (2019), no. 1, 171-264.

[34] J.-P. Serre, Modular forms of weight one and Galois representations. Algebraic number fields: L-functions and Galois properties (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975), pp. 193-268. Academic Press, London, 1977.

[35] 高瀬 正仁, 数の理論 海鳴社 2008.

[36] R. Taylor, Galois representations. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 13 (2004), no. 1, 73–119.

[37] N. Tsuzuki and T. Yamauchi, Automorphy of mod 2 Galois representations associated to the quintic Dwork family and reciprocity of some quintic trinomials, a preprint available at arXiv:2008.09852.

[38] D. Wan, Mirror symmetry for zeta functions. With an appendix by C. Douglas Haessig. AMS/IP Stud. Adv. Math., 38, Mirror symmetry. V, 159-184, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[39] ______, *Endoscopy for* GSp(4) *and the cohomology of Siegel modular threefolds.* Lecture Notes in Mathematics 1968. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[40] ______, Existence of Whittaker models related to four dimensional symplectic Galois representations, Modular forms on Schiermonnikoog, 285-310, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.

[41] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 3, 443–551.

Takuya Yamauchi, Mathematical Inst. Tohoku Univ., 6-3,Aoba, Aramaki, Aoba-Ku, Sendai 980-8578, JAPAN

Email address: `takuya.yamauchi.c3@tohoku.ac.jp`