2 次元対数的端末特異点の局所エタール基本群

安田健彦 *

2022 年 3 月 31 日

本原稿は 2021 年 12 月 13 日から 17 日に開催された研究集会「代数的整数論とその周辺 2021」（京都大学数理解析研究所とオンラインのハイブリッド）の報告集用に執筆したものです．その主な目的は，Javier Carvajal-Rojas 氏と私の共著論文 [4] の内容を，代数的整数論やその周辺分野の研究者向けに紹介することです．証明等の詳細は，本原稿には含まれませんので，興味のある方は論文をご覧ください．

1　極小モデル理論と特異点

本原稿を通して，基礎体として代数的閉体 k を固定し，代数多様体やスキームは k 上定義されるものとする．また，k の標数を p で表す．

極小モデル理論（森理論とも呼ばれる）の発展以降，代数幾何において特異点を持つ代数多様体を積極的に扱うことが一般的な考え方となった．特異点を持つ代数多様体が登場したら，単に特異点解消により非特異代数多様体に帰着するのではなく，特異点を持つ代数多様体自体を基本的な研究対象とする姿勢だ．（ただし，特異点解消を全く使わないと言うことではない．）極小モデルプログラムでは，与えられた完備代数多様体に対し，繰り返し双有理変換を施し，最終的に極小モデル，または，森ファイバー空間という，より単純な構造の双有理モデルに到達することを期待する．しかし，最初に与えられた代数多様体が非特異だったとしても，最終的に得られる代数多様体や途中に現れる代数多様体は一般には特異点を持つのである．

* 大阪大学大学院理学研究科数学専攻

2　標準因子で測る分岐と特異点の「悪さ」

極小モデル理論では，特異点の悪さを標準因子を用いて測る．同様の考え方は，有限被覆の分岐を測るのにも用いられる．後者の方が，整数論研究者によりなじみが深いだろう．X を非特異代数多様体，Y を正規非特異代数多様体とし，両者は同じ次元を持つものとする．$f\colon Y \to X$ を準有限（quasi-finite）射で，付随する関数体の拡大 $K(Y)/K(X)$ が分離的であるものを考える．**相対標準因子**という Y 上の有効因子 $K_{Y/X}$ が定まる．この因子の台（support）は f がエタールとならない点の集合に含まれる．そして，X と Y の標準因子と相対標準因子の間の有理同値

$$K_Y \sim f^*K_X + K_{Y/X}$$

が成り立つ．f の分岐の程度を表す $K_{Y/X}$ が X と Y の標準因子の差で与えられる式だと解釈できる．

X が特異点を持つ場合はどうなるだろうか．まず，標準因子が定義できるように X は正規特異点のみを持つとする．また，K_X の引き戻し f^*K_X が定義できるように，ある正整数 r に対し rK_X が Cartier 因子になると仮定する．この条件を満たす代数多様体は $\mathbb{Q}$-Gorenstein であるという．このとき，

$$f^*K_X := \frac{1}{r}f^*(rK_X)$$

として引き戻しが $\mathbb{Q}$ 因子（係数に有理数を持つ因子）として定義される．Y も正規特異点のみを持つとすると，相対標準因子という Y 上の $\mathbb{Q}$ 因子が

$$K_{Y/X} = K_Y - f^*K_X$$

により定義され，その台は f がエタールとならない点の集合に含まれる．ここで，X が非特異の場合と異なるのは，$K_{Y/X}$ の係数が正になるとは限らないことである．そこで，$K_{Y/X}$ の係数の大小により，X の特異点の「悪さ」を測るというのが基本的な考え方である．

定義 1. 上のような正規代数多様体 X に対し，全ての正規代数多様体からの固有双有理射 $f\colon Y \to X$ に対し，相対標準因子 $K_{Y/X}$ の係数が全て<u>正</u>のとき，X は**端末特異**

点（terminal singularities）のみを持つという．また，係数が非負，-1 より大きい，-1 以上のとき，それぞれ，**標準特異点**（canonical singularities），**対数的端末特異点**（log terminal singularities），**対数的標準特異点**（log canonical singularities）を持つという．

これら 4 つの特異点のクラスは，極小モデルプログラムの過程で保たれる．例えば，端末特異点のみを持つ代数多様体からスタートすると，途中で現れる代数多様体も端末特異点のみを持ち，最終的に得られる極小モデルや森ファイバー空間も端末特異点のみを持つ．

2 次元多様体に限れば，端末特異点は必ず非特異になり，標準特異点は有理二重点（Du Val 特異点，ADE 型特異点などとも呼ばれる）になる．標数 0 では，2 次元対数的端末特異点は，商特異点に他ならないことが川又 [8, Th. 9.6] により証明されている（[12, Th. 4.6.18]，[6, Th. 7.4.11] も参照のこと）．しかし，正標数では，これは正しくない [1, 11]．対数的標準特異点の代表的な例に，単純楕円特異点（最小特異点解消の例外集合が楕円曲線になる特異点）がある．

3　主結果：局所エタール基本群の有限性

定義 2. 同じ次元の整スキームの間の有限射 $f\colon Y \to X$ が**準エタール**（quasi-étale）であるとは，余次元 2 以上の閉部分集合 $W \subset Y$ が存在し，制限射 $f|_{Y \setminus W}$ がエタールとなることを言う．

論文 [4] の主結果は以下の定理である．

定理 3 ([4])**.** X を対数的端末特異点のみを持つ代数曲面とし，準エタール有限射の列

$$X = X_0 \xleftarrow{f_0} X_1 \xleftarrow{f_1} \cdots$$

を考える．各 i に対し，$K(X_i)/K(X)$ はガロア拡大であると仮定する．このとき，十分大きな i に対し，f_i はエタール射である．

この定理は，局所エタール基本群を用いて言い換えることができる．

定義 4. 代数曲面 X と閉点 $x \in X$ に対し，$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ を局所環 $\mathcal{O}_{X,x}$ の完備化とし，U を

$\mathrm{Spec}\,\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ から閉点を取り除いて得られるスキームとする．このとき，$x \in X$ の**局所エタール基本群**を

$$\pi_1^{\mathrm{loc}}(X,x) := \varprojlim_{V} \mathrm{Gal}(V/U)$$

で定義する．ここで，V は U の有限エタール・ガロア被覆全体を走るものとする．局所エタール基本群は，特異点の複雑さを測る不変量の一つとみることができる．実際，Mumford [13]（[1] も参照のこと）は，標数零の代数曲面 X について，点 $x \in X$ が非特異であることと $\pi_1^{\mathrm{loc}}(X,x) = 1$ であることが同値であると示した．また，前述の川又の結果を使うと，標数零においては，$\pi_1^{\mathrm{loc}}(X,x)$ が有限であることと，$x \in X$ が対数的端末特異点であることが同値であることも従う．しかし，これらは正標数においては正しくない．

定理 3 は，以下の定理から従う．

定理 5 ([4])**.** 2 次元対数的端末特異点 $x \in X$ の局所エタール基本群 $\pi_1^{\mathrm{loc}}(X,x)$ は有限である．

標数 7 以上では [2] により既知の結果であり，標数 5 では，川又 [9] の結果と Artin [1] の計算を合わせると示すことができる．標数 2 と 3 の場合が未解決だった．

定理 5 は，標数零の任意次元の対数的端末特異点に対して成立することが Xu [14] により示された．その後，同様の結果を正標数で得る研究がなされ，対数的端末特異点と関係の深い F 正則特異点や，3 次元の対数的端末特異点に関する研究がなされた [2, 3, 15, 5]．しかし，局所エタール基本群の野性部分（wild part）をコントロールする手法が存在せず，扱われる状況では局所エタール基本群の位数が標数と素になったり，局所エタール基本群の従順部分（tame part）に関する結果などが得られていた．

このように，（次元に対し）低い標数において，野性部分も含めて局所エタール基本群の有限性を示すことが課題であり，定理 5 は 2 次元において，この課題を解決する．

4　弦モチーフ

定理 1 の証明の鍵となるのが，**弦モチーフ**（stringy motive）という不変量である．ここで，モチーフと言っているのは，代数多様体の Grothendieck 環 $\mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_k)$ やそ

の変種の元のことを指している．Grothendieck が種々のコホモロジー理論を統一するために構想したモチーフ理論のトイ・モデルとみなせるものである．

定義 6. 代数多様体の *Grothendieck* **環** $\mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_k)$ は，代数多様体の同型類 $\{X\}$ で生成される自由 Abel 群

$$\bigoplus_{\{X\}} \mathbb{Z} \cdot \{X\}$$

を，

$$\{X\} - \{Y\} - \{X \setminus Y\} \quad (Y \text{ は } X \text{ の閉部分多様体})$$

という形の元全体で生成される部分群で割った商群として定義される．こうして定義されたアーベル群 $\mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_k)$ は，積を

$$\{X\}\{Y\} := \{X \times_k Y\}$$

により定めることで，可換環の構造を持つ．

代数多様体の Grothendieck 環から，より単純な構造を持つ環への様々な実現写像（realization map）とよばれる写像がある．その中で，本稿で重要なのは，*Poincaré* **多項式実現写像**

$$\mathrm{P}\colon \mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_k) \to \mathbb{Z}[T]$$

である．これは，非特異固有代数多様体 X の定める元 $\{X\}$ を X の Poincaré 多項式

$$\mathrm{P}(X) = \sum_i (-1)^i b_i(X) T^i$$

に送る環準同形として特徴付けられる．ここで，$b_i(X)$ は Betti 数 $\dim \mathrm{H}^i(X, \mathbb{Q}_l)$ を表す．$\mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_k)$ の元 α に対し，多項式 $\mathrm{P}(\alpha)$ の次数や係数などを見ることで，数値的情報を取り出すことができる．また，これらの数値を比べることで，$\mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_k)$ の元の大小を比較することも可能になる．

$\mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_k)$ の特別な元に Lefschetz モチーフ

$$\mathbb{L} := \{\mathbb{A}^1_k\}$$

がある．モチーフ積分を用いて弦モチーフを定義するためには，$\mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_k)$ に以下のような操作により環を拡大，修正していく必要がある．

1. $\mathbb{L}$ で局所化し，$\mathbb{L}$ を可逆元にする．
2. 無限和の収束を議論できるように，あるフィルトレーションを用いて完備化し位相環にする．
3. 必要に応じて，ある正整数 r に対し $\mathbb{L}$ の分数冪 $\mathbb{L}^{1/r}$ を添加する．
4. 追加の関係式による商をとる．

このようにして得られる環 $\widehat{\mathcal{M}}'_{k,r}$ に，上述の Poincaré 多項式実現写像 P は拡張し，写像

$$\mathrm{P}\colon \widehat{\mathcal{M}}'_{k,r} \to \mathbb{Z}(\!(T^{-1/r})\!) := \left\{ \sum_{i\in\frac{1}{r}\mathbb{Z}} f_i T^i \;\middle|\; f_i \in \mathbb{Z}, \text{ and } f_i = 0 \text{ for } i \gg 0 \right\}$$

を得る．$\widehat{\mathcal{M}}'_{k,r}$ の元についても，P による像の次数や係数を見ることで数値的情報を得ることができる．また，$\mathbb{Z}(\!(T^{-1/r})\!)$ に辞書式順序（大きい次数の係数から比べる）を入れることで，大小を比較することもできる．

対数的端末特異点を持つ代数多様体 X に対し，**弦モチーフ** $\mathrm{M}_{\mathrm{st}}(X)$ が定まる．弦モチーフは２つの異なる表示を持つ．１つはモチーフ積分を用いて，

$$\mathrm{M}_{\mathrm{st}}(X) = \int_{\mathrm{J}_\infty X} \mathbb{L}^{F_X}\, \mu_X \tag{1}$$

と書ける．$\mathrm{J}_\infty X$ は弧空間，つまり，弧 $\operatorname{Spec} k[\![t]\!] \to X$ のモジュライ空間であり，μ_X は $\widehat{\mathcal{M}}'_{k,r}$ に値を取る測度である．$F_X\colon \mathrm{J}_\infty X \to \frac{1}{r}\mathbb{Z}$ は X の特異点から標準的に定まる関数である．

もう一つは特異点解消を用いた表示である（従って，特異点解消が存在する場合にしか使えない）．$f\colon Y \to X$ を特異点解消とし，相対標準因子を $K_{Y/X} = \sum_{i=1}^n a_i D_i$ と書く．D_i は素因子，a_i は有理数である．さらに，$\bigcup D_i$ は単純正規交差因子であるとする．各部分集合 $I \subset \{1,\dots,n\}$ に対し，$D_I^\circ := \bigcap_{i\in I} D_i \setminus \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}\setminus I} D_i$ とする．ただし，$I=\emptyset$ のときは，$D_\emptyset^\circ := Y \setminus \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} D_i$ とする．このとき，

$$\mathrm{M}_{\mathrm{st}}(X) = \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} \{D_I^\circ\} \prod_{i\in I} \frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{a_i+1}-1} \tag{2}$$

と書ける．

また，X が有限群 G の作用を持つとき，弦モチーフの商 $\mathrm{M}_{\mathrm{st}}(X)/G$ が定まる．

5　証明の概略

主結果（定理 3 と 5）の証明の概略を説明する．定理 3 の状況で，$K(X_i)/K(X)$ のガロア群を G_i とする．このとき，不変量 $\mathrm{M_{st}}(X_i)/G_i$ $(i = 0, 1, 2, \dots)$ に関して，以下の 2 つの補題が成り立つことを示すのが鍵となる．

補題 7. f_i がエタールでなければ,

$$\mathrm{M_{st}}(X_i)/G_i > \mathrm{M_{st}}(X_{i+1})/G_{i+1}.$$

補題 8. 無限降鎖列

$$\mathrm{M_{st}}(X_{i_1})/G_{i_1} > \mathrm{M_{st}}(X_{i_2})/G_{i_2} > \cdots$$

は存在しない．

上の不等式「>」は，前述の通り Poincaré 多項式実現をとり，環 $\mathbb{Z}(\!(T^{-1/r})\!)$ の中で辞書式順序で大小を比較している．補題 7 の証明の鍵は「X_i の弧で X_{i+1} に持ち上がらない，ノンリフタブル（non-liftable）弧が多くある」ということを示すことである．もう少し正確に言うと，まず自然な写像

$$\phi_i \colon (\mathrm{J}_\infty X_{i+1})/G_{i+1} \to (\mathrm{J}_\infty X_i)/G_i$$

が存在し，ほとんど単射（almost injective）となっている．つまり，測度零の部分集合の外では単射となる．ノンリフタブル（non-liftable）弧が多くあるというのは，ϕ_i がほとんど全射ではないということだ．つまり，

$$((\mathrm{J}_\infty X_i)/G_i) \setminus \mathrm{Im}(\phi_i)$$

が正の測度を持つことである．これを示す過程で，我々は Kerz-Schmidt，加藤の結果 [7, 10] を改良し，以下の主張を示すことができた．

定理 9. $Y \to X$ を正規代数多様体の有限ガロア被覆とし，そのガロア群を G とする．Y は非特異だとし，G 作用で固定される閉点 $y \in Y$ が存在するとする．また，$E \to D$ を任意の G 被覆とする．このとき，弧 $D = \operatorname{Spec} k[\![t]\!] \to X$ で $D \times_X Y$ の正規化が E となるものが存在する．さらに，そのようなアークの集合の測度は 0 ではない．

X から Y に持ち上がる弧は，$D \times_X Y$ の正規化が D の自明な G 被覆になる．非自明な $E \to D$ を誘導する弧 $D \to X$ は Y には持ち上がらない．Kerz-Schmidt，加藤は非自明な G 被覆を誘導する弧の存在を示したが，今回，我々は任意の G 被覆に対し，それを誘導する弧が存在することを示した．実は，Kerz-Schmidt，加藤の結果でも我々の目的には十分だったのだが，結果自体が面白いと思い論文に掲載した．将来，局所エタール基本群の位数の評価をしたり，高次元化する際に役立つことを期待している．

補題 8 を示すには，弦モチーフの特異点解消による表示 (2) と 2 次元対数的端末特異点の最小特異点解消の構造に関する結果を用いる．

注意 10.（高次元への一般化に関するコメント）3 次元の場合は，補題 7 はガロア群が p 群の場合には正しい．tame part については，研究が進んでいるため，この場合だけで十分であると思われる．しかし，特異点解消を用いるので，4 次元以上への一般化については，新しいアイデアが必要となるだろう．一方，補題 8 の証明では，2 次元特有の計算を用いたので，3 次元以上で同様のことをするには，新しいアイデアが必要となりそうである．

参考文献

[1] M. Artin. Coverings of the Rational Double Points in Characteristic p. In T. Shioda and W. L. Jr Baily, editors, *Complex Analysis and Algebraic Geometry: A Collection of Papers Dedicated to K. Kodaira*, pages 11–22. Cambridge University Press, Cambridge, 1977.

[2] Javier Carvajal-Rojas, Karl Schwede, and Kevin Tucker. Fundamental groups of F-regular singularities via F-signature. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 51(4):993–1016, 2018.

[3] Javier Carvajal-Rojas, Axel Stäbler, and János Kollár. On the local étale fundamental group of KLT threefold singularities. arXiv:2004.07628, 2020.

[4] Javier Carvajal-Rojas and Takehiko Yasuda. On the behavior of stringy motives under Galois quasi-étale covers. arXiv:2105.05214, 2021.

[5] Christopher Hacon and Jakub Witaszek. On the relative Minimal Model

Program for threefolds in low characteristics. arXiv:1909.12872, 2019.

[6] Shihoko Ishii. *Introduction to singularities.* Springer, Tokyo, 2018.

[7] Hiroki Kato. Wild ramification and restrictions to curves. *International Journal of Mathematics*, 29(08):1850052, 2018.

[8] Yujiro Kawamata. Crepant Blowing-Up of 3-Dimensional Canonical Singularities and Its Application to Degenerations of Surfaces. *Annals of Mathematics*, 127(1):93–163, 1988.

[9] Yujiro Kawamata. Index 1 covers of log terminal surface sigularities. *J. Algebraic Geom.*, 8(3):519–527, 1999.

[10] Moritz Kerz and Alexander Schmidt. On different notions of tameness in arithmetic geometry. *Mathematische Annalen*, 346(3):641, 2009.

[11] Christian Liedtke, Gebhard Martin, and Yuya Matsumoto. Torsors over the Rational Double Points in Characteristic p. arXiv:2110.03650, 2021.

[12] Kenji Matsuki. *Introduction to the Mori program.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002.

[13] David Mumford. The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, (9):5–22, 1961.

[14] Chenyang Xu. Finiteness of algebraic fundamental groups. *Compositio Mathematica*, 150(3):409–414, 2014.

[15] Chenyang Xu and Lei Zhang. Nonvanishing for 3-folds in characteristic $p > 5$. *Duke Mathematical Journal*, 168(7):1269–1301, 2019.