CSSg method for several genericities of deformations of hypersurface singularities

鍋島克輔 *
東京理科大学理学部第一部応用数学科
NABESHIMA, Katsusuke
Department of Applied Mathematics, Tokyo University of Science

田島慎一 †
新潟大学大学院自然科学研究科
TAJIMA, Shinichi
Graduate School of Science and Technology, Niigata University

Abstract

A new framework for treating several genericities of deformations of hypersurface singularities is proposed. A computation method (CSSg) of comprehensive standard system over a field of rational functions is introduced as a key tool. As application to singularity theory, algorithms of computing parameter dependency of $\mu^{(n-1)}(f)$, local Euler obstruction and κ-invariants for parametric cases are given.

1 序

ジェネリックという条件下で定義された孤立特異点の解析的不変量が，特異点変形によりどのように変化するのかを計算する新しい方法『CSSg 法』を紹介すると共にその応用として $\mu^{(n-1)}(f)$，局所オイラー障碍，κ-不変量を考える．このとき，鍵となるのは，有理関数体上の包括的スタンダード基底系である．

計算機代数（または数式処理）が大きな威力を発揮する分野の一つがパラメータ付きシステムの解析である．近年の研究成果により，パラメータの状態により対象の性質がどのように変化するのかを計算することが可能となっている．本稿では，計算機代数のテクニックの 1 つであるパラメータ付きイデアルのスタンダード基底を活用し特異点の性質を解析する．

パラメータ付きイデアルのスタンダード基底のことを，包括的スタンダード基底系という．包括的スタンダード基底系の計算法として，著者たちにより紹介されたパラメータ付き代数的局所コホモロジーを用いた方法 [16, 17, 18] や，寺本-鍋島により包括的グレブナー基底系計算アルゴリズム [12] を拡張した方法 [25]，Hashemi-Kazemi によりスタンダード基底の安定化理論を用いた方法 [8] が知られている． これら包括的スタンダード基底系の計算法はいずれも, 係数を有理関数体まで拡張することができる．有理関数体係数を用いること自体がジェネリックという性質を考えていることと同等であるので，CSSg 法を用いることで, ジェネリックという条件下で定義された孤立特異点の変形族を扱うことが可能になる．

*nabeshima@rs.tus.ac.jp
†tajima@math.tsukuba.ac.jp

2　準備と問題

ここでは，本稿で用いる記号と定義の紹介と共に，特異点の不変量の一つである $\mu^{(n-1)}(f)$ を用いて特異点変形を計算する上での問題点について述べる．

2.1　記号

本稿を通して $\mathbb{N}$ はゼロを含む自然数の集合とし，$\mathbb{C}$ を複素数体とする．また，K を標数 0 の体として $K\{x\}$ を K 上の n 変数 $x := x_1, x_2, \ldots, x_n$ の収束冪級数環とする．変数 x における項は $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ である $(\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n)$．変数 x の項の集合を $Term(x)$ で表し，変数 x による項の全順序 $\succ$ とは，$x^\alpha \succ x^\beta \implies x^\gamma x^\alpha \succ x^\gamma x^\beta$ を満たすことである．ただし，$x^\alpha, x^\beta, x^\gamma \in Term(x)$ である．

定義 1 ([7]) $\succ$ を全順序とする．

(1) $(0, \ldots, 0)$ でない任意の $\alpha \in \mathbb{N}^n$ において，もし項順序 $\succ$ が $x^\alpha \succ 1$ を満たすとき，$\succ$ を大域項順序という．

(2) $(0, \ldots, 0)$ でない任意の $\alpha \in \mathbb{N}^n$ において，もし項順序 $\succ$ が　$1 \succ x^\alpha$ を満たすとき，$\succ$ を局所項順序という．

本稿では，主に収束冪級数 $K\{x\} = K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 上で議論を行うので，局所項順序を使用する．

局所項順序 $\succ$ を固定し，$f \in K\{x\}$ とする．このとき，f の先頭項，先頭係数，先頭単項式を $ht_\succ(f)$, $hc_\succ(f)$，$hm_\succ(f)$ で表す．ただし，$hm_\succ(f) = hc_\succ(f) \cdot ht_\succ(f)$ である．また，集合 $G \subset K\{x\}$ において，$ht_\succ(G) = \{ht_\succ(g) | g \in G\}$，$hm_\succ(G) = \{hm_\succ(g) | g \in G\}$ とし，$f_1, \ldots, f_s \in K\{x\}$ により，生成されるイデアルを $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ で表す．

局所環でのイデアルの性質を解析する際，次のスタンダード基底は強力な威力を発揮する．

定義 2 (スタンダード基底) 局所項順序を $\succ$ として，I を $K\{x\}$ のイデアルで $G = \{g_1, \ldots, g_\ell\} \subset K\{x\}$ とする．このとき，G が次を満たすとき，G は $\succ$ に関して I のスタンダード基底（*standard basis*）である．

$$\langle hm_\succ(g_1), hm_\succ(g_2), \ldots, hm_\succ(g_\ell) \rangle = \langle hm_\succ(I) \rangle$$

ただし，$hm_\succ(I) = \{hm_\succ(h) | h \in I\}$.

イデアル $I \subset K\{x\}$ のスタンダード基底を計算するアルゴリズムは T. Mora [13, 14] により紹介されており，計算機代数システム Singular に実装されている [2, 3, 7].

本稿では，3 種類の変数を使用する．x とは異なる新たな m 変数を $t = t_1, \ldots, t_m$ とし，$K[t]\{x\}$ を多項式環 $K[t]$ に係数を持つ収束冪級数環とする．また，x, t とは異なる ℓ 変数を $u = u_1, \ldots, u_\ell$ として表し，$(K(u)[t])\{x\}$ を有理関数体 $K(u)$ 上の多項式環 $K(u)[x]$ に係数を持つ収束冪級数環とする．

今後，これらの変数は

x: 主変数，　t: パラメータ，　u: 補助不定元

として割り当てられ, それぞれ違う意味で扱われる．

体 K の代数的閉体を $\bar{K}$ として，$f_1, \ldots, f_\ell \in K[t]$ に対して，$\bar{K}$ 上のアフィン多様体を

$$\mathbb{V}_{\bar{K}}(f_1, \ldots, f_\ell) = \{\bar{t} \in \bar{K}^m | f_1(\bar{t}) = f_2(\bar{t}) = \cdots = f_\ell(\bar{t}) = 0\}$$

とする．

2.2 $\mu(f)$ と包括的スタンダード基底系

収束冪級数 $f \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\} = \mathbb{C}\{x\}$ は原点に孤立特異点に持つとする．この特異点のミルナー数を $\mu(f)$ で表す，*i.e.*

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\mathbb{C}\{x\}/\langle \tfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n} \rangle \right)$$

である.『孤立特異点を定義する正則関数は，多項式で表すことができる (M. Artin 1969)』ことより，今後，f は多項式を考える．

局所項順序を $\succ$ として，f のヤコビイデアルを J とする（*i.e.* $J = \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$）．Macaulay の次元定理より，

$$\dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}\{x\}/J) = \dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}\{x\}/ht_{\succ}(J))$$

が成り立つので，スタンダード基底の定義より，ミルナー数の計算は f のヤコビイデアルのスタンダード基底を計算することにより求められることがわかる．

パラメータ付システムの解析に重要となる包括的スタンダード基底系を紹介する．

定義 3 局所項順序を固定する．$F \subset K[t]\{x\}$, $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_r \subset \bar{K}^m$, $G_1, \ldots, G_r \subset K[t]\{x\}$ とする．ペアの集合 $\mathcal{G} = \{(\mathbb{A}_1, G_1), (\mathbb{A}_2, G_2), \ldots, (\mathbb{A}_r, G_r)\}$ が次の *(1), (2)* を満たすとき，$\mathcal{G}$ を $\langle F \rangle$ の $\cup_{i=1}^r \mathbb{A}_i$ 上の包括的スタンダード基底系（*comprehensive standard system (CSS)*）という．

(1) $i \neq j$, $\mathbb{A}_i \cap \mathbb{A}_j = \emptyset$.

(2) 任意の $\bar{a} \in \mathbb{A}_i$, $g \in G_i$, $ht_{\succ}(g) = ht_{\succ}(\sigma_{\bar{a}}(g))$ かつ $\sigma_{\bar{a}}(G_i)$ は $\langle \sigma_{\bar{a}}(F) \rangle \subset \bar{K}\{x\}$ のスタンダード基底である．ただし，$\sigma_{\bar{a}}$ は t へ $\bar{a}$ を代入することを意味する．

t をパラメータといい，x は主変数という．

上の定義での $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_r$ は，$E_1, \ldots, E_r, N_1, \ldots, N_r \subset K[t]$ を用いて，$\mathbb{V}_{\bar{K}}(E_i) \backslash \mathbb{V}_{\bar{K}}(N_i)$ という形でよく表される（$1 \leq i \leq r$）．また，包括的スタンダード基底系を計算するアルゴリズムは [8, 18, 25] で紹介されており，現在，第一著者のホームページから Singular 上に実装されたプログラムを得ることができる．

包括的スタンダード基底系の簡単な例を紹介する．

例 4 主変数を x, y, パラメータを t とし，$f = x^3 + txy^3 + y^5$ を考える．$x \succ y$ となる局所辞書式項順序において，f のヤコビイデアル $J = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle \subset \mathbb{C}[t]\{x, y\}$ の包括的スタンダード基底系は次となる．

$$\{(\mathbb{C} \backslash \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t), \{3x^2 + ty^3, 3txy^2 + 5y^4, 5xy^4 - t^2y^5, 3s^3y^5 + 25y^6\}), (\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t), \{3x^2 + ty^3, y^4\})\}$$

これは次のように解釈される．

- もし $t \neq 0$ ならば，J のスタンダード基底は $\{3x^2 + ty^3, 3txy^2 + 5y^4, 5xy^4 - t^2y^5, 3s^3y^5 + 25y^6\}$,
- もし $t = 0$ ならば，J のスタンダード基底は $\{3x^2 + ty^3, y^4\}$ となる．

特異点の定義方程式 f にパラメータが介在する場合を考える．このとき，パラメータの値を連続的に変化させることにより，孤立特異点が消滅したり，特異点の重複度であるミルナー数が変化したりする．パラメータの値により，どのようにミルナー数が変化するのかを知りたい場合，f のヤコビイデアルの包括的スタンダード基底を計算すればよい．すなわち，

(1) f のヤコビイデアル $J = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle \subset \mathbb{C}[t]\{x, y\}$ の包括的スタンダード基底系 $\mathcal{G}$ を計算する．

(2) $\mathcal{G}$ の各ペア $(\mathbb{A}, G)$ で，$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{x\}/\langle ht_{\succ}(G)\rangle)$ を計算する．

このことより，ミルナー数のパラメータ依存性が得られる．

例 5 主変数を x, y, パラメータを t とし，$f = x^3 + tx^2y^3 + y^9 + xy^7$ を考える．ミルナー数のパラメータ依存性を包括的スタンダード基底系を用いて計算すると次のようになる．

- パラメータ t が $\mathbb{V}(t)$ に属するとき，ミルナー数は 16.
- パラメータ t が $\mathbb{V}(1331t^3 + 10584)$ に属するとき，ミルナー数は 16.
- パラメータ t が $\mathbb{V}(4t^3 + 27)$ に属するとき，ミルナー数は 17.
- パラメータ t が $\mathbb{V}(2t^3 - 63)$ に属するとき，ミルナー数は 16.
- パラメータ t が $\mathbb{C}\backslash\mathbb{V}(-10648t^{10} + 178866t^7 + 4359663t^4 + 18003384t)$ に属するとき，ミルナー数は 16.

以上より，$4t^3 + 27 = 0$ のとき，特異点の構造が他と異なることがわかる．

包括的スタンダード基底系は，スタンダード基底の形によってパラメータ空間を分割している．上の *5* つのうち *4* つはミルナー数が同じであるが，スタンダード基底の形は違うことを注意しておく．

2.3 $\mu^{(n-1)}(f)$ の計算

ゼロでないベクトルを $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ とし，複素射影空間の点を $[p] \in \check{\mathbb{P}}^{n-1}$ とする．このとき，

$$H_p = \{x \in \mathbb{C}^n \mid p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = 0\},$$

$$\mu^{(n-1)}(f) = \min_{[p] \in \check{\mathbb{P}}^{n-1}} \mu(f|_{H_p})$$

とし，

$$U = \{[p] \in \check{\mathbb{P}}^{n-1} | \mu(f|_{H_p}) = \mu^{(n-1)}(f)\}$$

とすると， U は open dense な $\check{\mathbb{P}}^{n-1}$ の部分集合であることが知られている．もし，$[(p_1, \ldots, p_n)] \in U$ ならば，$[(p_1, \ldots, p_n)]$ に付随する超平面 $p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = 0$ をジェネリック *(generic)* と呼ぶ．

$n-1$ 個の不定元を $u = u_1, \ldots, u_{n-1}$ と省略形で書き，$\mathbb{C}(u)$ を u の有理関数体とする．このとき，$\mu^{(n-1)}(f)$ について以下が成り立つ．

定理 6 ([19]) $f \subset K[x]$ として，超曲面 $S = \{x \in \mathbb{C}^n | f(x) = 0\}$ は原点に孤立特異点を持つとする．$x_n = u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_{n-1}x_{n-1}$ とおき，

$$h_u(x_1, \ldots, x_{n-1}) := f(x_1, \ldots, x_{n-1}, u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_{n-1}x_{n-1})$$

とし，$Term(x)$ の局所項順序を $\succ$ とする．また，G を $\succ$ に関しての $\langle \frac{\partial h_u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h_u}{\partial x_{n-1}} \rangle \subset \mathbb{C}(u)\{x\}$ のスタンダード基底とする．このとき，

$$\mu^{(n-1)}(f) = \dim_{\mathbb{C}(u)} (\mathbb{C}(u)\{x\}/\langle ht_{\succ}(G)\rangle)$$

となる．

この結果より，$\mu^{(n-1)}(f)$ は有理関数体を係数と持つ局所環 $\mathbb{C}(u)\{x\}$ において $\langle \frac{\partial h_u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h_u}{\partial x_{n-1}} \rangle$ のスタンダード基底を計算することで得られることがわかる．

本稿では，f がパラメータ t を持つ場合を考える．これは，特異点変形を考えていることと同じである．

問題: f がパラメタ $t = \{t_1, \ldots, t_m\}$ を持つ場合，どのように $\mu^{(n-1)}(f)$ を計算するか？

定理 6 を用いてこの問題を解決するならば，性質の違う次の 3 種類のシンボル

x: 主変数，　t: パラメータ，　u: $\mathbb{C}(u)$ の変数（generic にとる）

が必要になる．この問題を解く鍵は，有理関数体上の包括的スタンダード基底系である．

3　CSSg 法

有理関数体 $\mathbb{C}(u)$ の代数的閉包を $\overline{\mathbb{C}(u)}$ で表し，$\bar{a} \in \overline{\mathbb{C}(u)}^m$ とするとき，パラメータ t に $\bar{a}$ を代入する操作を前節と同様に $\sigma_{\bar{a}}$ で表す．定義 3 の K を $\mathbb{C}(u)$ に置き換えることにより有理関数体上の包括的スタンダード基底系が定義され，これが本稿の鍵となる．改めて K を $\mathbb{C}(u)$ に書き換えたスタンダード基底系の定義を以下に述べる．

定義 7 (有理関数体上の包括的スタンダード基底系) 変数 x 上の局所項順序を $\succ$ とし，$F \subset (\mathbb{C}(u)[t])\{x\}$, $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_r \subset \overline{\mathbb{C}(u)}^m$, $G_1, \ldots, G_r \subset (\mathbb{C}(u)[t])\{x\}$ とする． このとき，ペアの集合 $\mathcal{G} = \{(\mathbb{A}_1, G_1), \ldots, (\mathbb{A}_r, G_r)\}$ が次を満たすとき，$\mathcal{G}$ を $\langle F \rangle$ の $\mathbb{A}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{A}_r$ 上の包括的スタンダード基底系という．

(1) $i \neq j$, $\mathbb{A}_i \cap \mathbb{A}_j = \emptyset$,

(2) 任意の $\bar{a} \in \mathbb{A}_i$，$g \in G_i$ において，$ht(g) = ht(\sigma_{\bar{a}}(g))$ かつ $\sigma_{\bar{a}}(G_i)$ は $\overline{\mathbb{C}(u)}\{x\}$ 上で $\langle \sigma_{\bar{a}}(F) \rangle$ のスタンダード基底である．

$\overline{\mathbb{C}(u)}^m$ 上の包括的スタンダード基底系は，論文 [8] で述べられた $\mathbb{C}^m$ 上の包括的スタンダード基底系計算アルゴリズムと同様に計算することができ，本研究において，計算機代数システム Singular に実装されている．

パラメータ付き方程式系を扱う多くの場合は，パラメータの値は実数 $\mathbb{R}$ もしくは $\mathbb{C}$ であり，有理関数をパラメータの値としてとることを考えることはほぼない．そこで，有理関数体上の包括的スタンダード基底系を応用として用いると場合，$\mathbb{A} \subset \overline{\mathbb{C}(u)}^m$ を $\mathbb{C}^m$ に制限することを考える必要がある．すなわち，

『$\mathbb{A} \cap \mathbb{C}^m$ を如何に表すか？』

が問題である．

包括的スタンダード基底系での，$\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_r \subset \overline{\mathbb{C}(u)}^m$ はアフィン多様体

$$\mathbb{V}_{\overline{\mathbb{C}(u)}}(g_1, \ldots, g_r) = \left\{ \bar{t} \in \left(\overline{\mathbb{C}(u)}\right)^m \,\middle|\, g_1(\bar{t}) = \cdots = g_r(\bar{t}) = 0 \right\} \quad (g_1, \ldots, g_r \in \mathbb{C}(u)[t])$$

を用いて，$E, N \subset \mathbb{C}(u)[t]$ としたとき，$\mathbb{V}_{\overline{\mathbb{C}(u)}}(E) \backslash \mathbb{V}_{\overline{\mathbb{C}(u)}}(N)$ で表す．すなわち，

$$\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(E) = \mathbb{V}_{\overline{\mathbb{C}(u)}}(E) \cap \mathbb{C}^m$$

である．このとき，次の命題が成り立つ．

命題 8 $E \subset \mathbb{C}[u][t]$ とし $T = \left\{ c_\alpha \,\middle|\, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^\ell} c_\alpha u^\alpha \in E, c_\alpha \in \mathbb{C}[t] \right\} \subset \mathbb{C}[t]$ とする *(i.e. E の各項の係数の集合)*. このとき，$\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(E) = \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(T)$ となる．

したがって，命題 8 より，包括的スタンダード基底系の計算時と同様に，

『$\mathbb{A} \cap \mathbb{C}^m \neq \emptyset$ もしくは $\mathbb{A} \cap \mathbb{C}^m = \emptyset$』

が判定可能であるので，パラメータの値が $\mathbb{C}$ である場合の応用として用いることができる．

アルゴリズム 1 は，ジェネリックという条件が付随したパラメータ付きシステムの解析に非常に有効である．

アルゴリズム 1 CSSg (CSS for genericity)

Specification: CSSg$(F, \succ)$
入力：$F \subset (\mathbb{C}(u)[t])\{x\}$. $\succ$: $Term(x)$ の局所項順序.
出力: $\mathcal{S} = \bigcup_i \{(\mathbb{A}_i, S_i)\}$: $\forall \bar{t} \in \mathbb{A}_i \subset \mathbb{C}^m$, $\sigma_{\bar{t}}(S_i)$ は $\succ$ に関して $\langle \sigma_{\bar{t}}(F) \rangle$ のスタンダード基底.
BEGIN
$\mathcal{S} \leftarrow \emptyset$;
$\mathcal{G} \leftarrow$ Compute a comprehensive standard system of $\langle F \rangle$ on $\overline{\mathbb{C}(u)}^m$;
while $\mathcal{G} \neq \emptyset$ **do**
  Select $(\mathbb{V}_{\overline{\mathbb{C}(u)}}(E) \backslash \mathbb{V}_{\overline{\mathbb{C}(u)}}(N), G)$ from $\mathcal{G}$;
  $\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G} \backslash \{(\mathbb{V}_{\overline{\mathbb{C}(u)}}(E) \backslash \mathbb{V}_{\overline{\mathbb{C}(u)}}(N), G)\}$;
  $E' \leftarrow \{hq \in \mathbb{C}[u][t] | \forall h \in E,\ q$ is the lcm of all denominators of coefficients in $\mathbb{C}(u)$ of $h\}$;
  $N' \leftarrow \{hq \in \mathbb{C}[u][t] | \forall h \in N,\ q$ is the lcm of all denominators of coefficients in $\mathbb{C}(u)$ of $h\}$;
  $T_E \leftarrow \{c_\alpha | \sum c_\alpha u^\alpha \in E', c_\alpha \in \mathbb{C}[t]\}$;
  $T_N \leftarrow \{c_\alpha | \sum c_\alpha u^\alpha \in N', c_\alpha \in \mathbb{C}[t]\}$;
  if $\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(T_E) \backslash \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(T_N) \neq \emptyset$ **then**   /* $\mathbb{V}_{\overline{\mathbb{C}(u)}}(E) \backslash \mathbb{V}_{\overline{\mathbb{C}(u)}}(N)$ is restricted by $\mathbb{C}^m$ */
    $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{(\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(T_E) \backslash \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(T_N), G)\}$;
  end-if
end-while
return $\mathcal{S}$;
END
(lcm 最小公倍元（least common multiple）を意味する.)

アルゴリズム 1 は，第一著者により計算機代数システム Singular 上に実装されており，プログラムは第一著者のホームページよりダウンロード可能である．

本稿では，アルゴリズム 1 のことを 『CSSg 法』と呼ぶようにする．

4 特異点変形にともなう $\mu^{(n-1)}(f)$ と局所 Euler 障碍の計算

第 2.3 章て提示した問題「特異点変形に伴う $\mu^{(n-1)}(f)$ の計算」は，アルゴリズム 1 を用いることにより計算可能となり，アルゴリズム 2 は，特異点変形における $\mu^{(n-1)}(f)$ をパラメータの情報と共に出力する．

アルゴリズム 2 ($\mu^{(n-1)}(f)$)

入力 ： $f \in (\mathbb{C}[t])[x]$: $f=0$ で定義された超曲面は一般的に原点に孤立特異点を持つとする．このとき，$t_1,\ldots,t_m \in \mathbb{C}$ である．$\succ$: $Term(x)$ の局所項順序．
出力: $\mathcal{M} = \bigcup_i \{(\mathbb{A}_i, \mu_i)\}$: $\forall \bar{t} \in \mathbb{A}_i \subset \mathbb{C}^m$, $\mu^{(n-1)}(\sigma_{\bar{t}}(f)) = \mu_i$.
BEGIN
$\mathcal{M} \leftarrow \emptyset$; $h_u \leftarrow f(x_1,\ldots,x_{n-1},u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_{n-1}x_{n-1})$;
$\mathcal{G} \leftarrow \mathsf{CSSg}(\{\frac{\partial h_u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial h_u}{\partial x_{n-1}}\},\succ)$;
while $\mathcal{G} \neq \emptyset$ **do**
Select $(\mathbb{A}, G)$ from $\mathcal{G}$;
$\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G} \backslash \{(\mathbb{A}, G)\}$;
$\mathcal{M} \leftarrow \mathcal{M} \cup \{(\mathbb{A}, \dim_{\mathbb{C}(u)}(\mathbb{C}(u)\{x\}/\langle ht_{\succ}(G)\rangle))\}$;
end-while
return $\mathcal{M}$;
END

第一著者によりアルゴリズム 2 は計算機代数システム Singular に実装されている．

例 9 $f = x^3+y^3z+sx^2y+tz^5+yz^4 \in (\mathbb{C}[s,t])[x,y,z]$ とする．ただし，s,t は $\mathbb{C}$ 上の値をとるパラメータである．このとき，アルゴリズム *2* は次を出力する．
- もし $s \neq 0$ ならば，$\mu^{(2)}(f)=5$ であり，
- もし $s=0$ ならば，$\mu^{(2)}(f)=6$ となる．

例 10 岡睦雄により論文 *[21]* で紹介されたミルナー数一定の変形を考える．$f_0 = x^8+y^{16}+z^{16}+x^3yz^3$ とすると，$f_0=0$ の原点でのミルナー数は *807* であり，ミルナー数一定の変形は $f=f_0+tx^5z^2$ で与えられる．ただし，t は $\mathbb{C}$ 上の値をとるパラメータであり，$t^{24}+186624 \neq 0$ とする．このとき，アルゴリズム *2* は次を出力する．
- もし $t \neq 0$ であれば，$\mu^{(2)}(f)=55$ であり，
- もし $t=0$ であれば，$\mu^{(2)}(f)=56$ である．

解析的不変量である $\mu^{(n-1)}(f)$ は，CSSg 法を用いることにより，パラメータ依存性を完璧に計算することができることがわかった．

1973 年，柏原により局所オイラー障碍について次の定理が発表された．

定理 11 ([10]) f を原点の開近傍で定義されたホロノミック関数で，$\mathbb{C}^n$ の原点に孤立特異点を定義するとする．超曲面 $\{x \in X \mid f(x)=0\}$ の原点での局所オイラー障碍を $Eu_O(f)$ と表すとすると，このとき

$$Eu_O(f) = 1+(-1)^{(n-1)}\mu^{(n-1)}(f)$$

となる．

特異点変形における $\mu^{(n-1)}(f)$ は計算可能であるので，この定理と組み合わせることにより，特異点変形における局所オイラー障碍も計算である．

例 12 $f = x^3 + y^3 z + sx^2 y + tz^5 + yz^4 \in (\mathbb{C}[s,t])[x,y,z]$ とする．ただし，s,t は $\mathbb{C}$ 上の値をとるパラメータである．このとき，例 9 より，

- もし $s \neq 0$ ならば, $\mu^{(2)}(f) = 5$.
- もし $s = 0$ ならば, $\mu^{(2)}(f) = 6$.

であることがわかっているので，原点での局所オイラー障碍は

- もし $s \neq 0$ ならば, $Eu_O(f) = 1 + (-1)^2 \cdot 5 = 6$.
- もし $s = 0$ ならば, $Eu_O(f) = 1 + (-1)^2 \cdot 6 = 7$

となる．

5 κ-不変量

解析的不変量の一つとして κ-不変量があり，今まで多くの研究者により研究されている [1, 4, 5, 9, 22]．論文 [9] において，B. Iverson と Lê Dũng Tráng は平面曲線の κ-不変量を研究し，論文 [5] では，G.-M. Greuel は B. Iverson と Lê Dũng Tráng の結果を任意次元に拡張している．また，論文 [24, Chapter 3] では， B. Teissier により κ-不変量の幾何学的性質が研究されている．[23] では, 有理関数係数の局所コホモロジーを用いた κ-不変量の計算法について論じている．

ここでは，まず，G.-M. Greuel [5] の κ-不変量の結果を復習し，次に，κ-不変量の新たな計算法について述べる．

$f(x_1,\ldots,x_n)$ を原点の開近傍で定義されたホロノミック関数で，$\mathbb{C}^n$ の原点に孤立特異点を定義するとし，$z = (z_1,\ldots,z_n)$ を次で定義された座標系とする．ただし，$p = (p_2,\ldots,p_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ である．

$$z_1 := x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3 - \cdots - p_n x_n,\quad z_2 := x_2,\quad z_3 := x_3,\quad \ldots,\quad z_n := x_n$$

このとき，

$$h_p := f(z_1 + p_2 z_2 + \cdots + p_n z_n, z_2, \ldots, z_n),$$

$$\delta_p := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h_p}{\partial z_1 \partial z_1} & \frac{\partial^2 h_p}{\partial z_1 \partial z_2} & \cdots & \frac{\partial^2 h_p}{\partial z_1 \partial z_n} \\ \frac{\partial^2 h_p}{\partial z_2 \partial z_1} & \frac{\partial^2 h_p}{\partial z_2 \partial z_2} & \cdots & \frac{\partial^2 h_p}{\partial z_2 \partial z_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 h_p}{\partial z_n \partial z_1} & \frac{\partial^2 h_p}{\partial z_n \partial z_2} & \cdots & \frac{\partial^2 h_p}{\partial z_n \partial z_n} \end{pmatrix},$$

$$I_p = \left\langle \frac{\partial h_p}{\partial z_2}, \frac{\partial h_p}{\partial z_3}, \ldots, \frac{\partial h_p}{\partial z_n}, \delta_p \right\rangle \subset \mathbb{C}\{z\}$$

とする． （注意：I_p の生成元として $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ が含まれていない.）

f の原点における κ-不変量とは

$$\kappa(f) = \min_{p \in \mathbb{C}^{n-1}} (\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{z\}/I_p)).$$

であり，$\kappa(f)$ で表わす．また，$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{z\}/I_p) = \kappa(f)$ を満たすとき，座標系 $(z_1,\ldots,z_n)$ を**ジェネリック**と呼ぶ [5].

もしジェネリックな座標系が与えられているならば，I_p のスタンダード基底を計算することにより $\kappa(f)$ を得ることができる．問題は

である．このジェネリックな座標系を得ることが κ-不変量を研究する上での難しさである．

この問題を解消するため，ジェネリックという性質と有理関数体 $\mathbb{C}(u)$ の関係に着目することでジェネリックな座標系を得ること無しに κ-不変量を計算する方法を本研究で得た．ポイントは，局所環 $\mathbb{C}(u)\{x\}$ でスタンダード基底計算アルゴリズムを用いることである．

$n-1$ 個の補助不定元を $u = u_2, \ldots, u_n$ とし，$z' = (z'_1, \ldots, z'_n)$ を次で定義された座標系とする

$$z'_1 := x_1 - u_2x_2 - u_3x_3 - \cdots - u_nx_n, \quad z'_2 := x_2, \quad z'_3 := x_3, \quad \ldots, \quad z'_n := x_n.$$

ここで，

$$h_u := f(z'_1 + u_2z'_2 + \cdots + u_nz'_n, z'_2, \ldots, z'_n),$$

$$\delta_u := \det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h_u}{\partial z'_1 \partial z'_1} & \frac{\partial^2 h_u}{\partial z'_1 \partial z'_2} & \cdots & \frac{\partial^2 h_u}{\partial z'_1 \partial z'_n} \\ \frac{\partial^2 h_u}{\partial z'_2 \partial z'_1} & \frac{\partial^2 h_u}{\partial z'_2 \partial z'_2} & \cdots & \frac{\partial^2 h_u}{\partial z'_2 \partial z'_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 h_u}{\partial z'_n \partial z'_1} & \frac{\partial^2 h_u}{\partial z'_n \partial z'_2} & \cdots & \frac{\partial^2 h_u}{\partial z'_n \partial z'_n} \end{pmatrix}$$

$$J_u = \left\langle \frac{\partial h}{\partial z'_2}, \frac{\partial h}{\partial z'_3}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial z'_n}, \delta_u \right\rangle \subset \mathbb{C}(u)\{z'\}$$

とする．このとき，次が成り立つ．

定理 13 *Term*(z') での局所項順序を $\succ$ とする． 局所環 $\mathbb{C}(u)\{z'\}$ での J_u のスタンダード基底を G とする．このとき，

$$\kappa(f) = \dim_{\mathbb{C}(u)}(\mathbb{C}(u)\{z'\}/\langle ht_{\succ}(G)\rangle)$$

となる．

$\mathbb{C}(u)$ は体であるので，$\mathbb{C}(u)\{z'\}$ でのスタンダード基底 G は，標準的なスタンダード基底計算アルゴリズムを用いることにより計算することができる．したがって，$\kappa(f)$ は具体的なジェネリックな座標系無しで得ることができる．また，$ht_{\succ}(G)$ が不定元 u を含まないので，$\dim_{\mathbb{C}(u)}(\mathbb{C}(u)\{z'\}/\langle ht_{\succ}(S')\rangle) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{z'\}/\langle ht_{\succ}(S')\rangle)$ が成り立つ．

次は κ-不変量を計算するアルゴリズムである．

アルゴリズム 3 ($\kappa(f)$)

入力: $f \in \mathbb{C}[x]$: 原点に孤立特異点を定義する． $\succ$: *Term*(x) の局所項順序.
出力: $\kappa(f)$.
BEGIN
$h_u \leftarrow f(x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n, x_2, \ldots, x_n)$ where $u_2, \ldots, u_n$ are indeterminates;
$\delta_u \leftarrow \det(\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j=1,2,\ldots,n}$;
$G \leftarrow$ Compute a standard basis of $\langle \frac{\partial h_u}{\partial x_2}, \frac{\partial h_u}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial h_u}{\partial x_n}, \delta_u \rangle$ w.r.t. $\succ$ in $\mathbb{C}(u)\{x\}$;
return $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{z\}/\langle ht_{\succ}(G)\rangle)$;
END

例 14 $f = x^3 + yz^2 + y^8 + xz^2 \in \mathbb{C}[x, y, z]$ で定義される Q_{18} 特異点を考える．

$$h_u(x, y, z) := f(x + u_1 y + u_2 z, y, z)$$

とし

$$\delta_u := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h_u}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 h_u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h_u}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 h_u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 h_u}{\partial y \partial y} & \frac{\partial^2 h_u}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 h_u}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 h_u}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 h_u}{\partial z \partial z} \end{pmatrix}$$

とする．このとき，u_1, u_2 は補助不定元である．$Term(\{x, y, z\})$ での局所辞書式項順序イデアル $\succ$ でのイデアル $\langle \frac{\partial h_u}{\partial y}, \frac{\partial h_u}{\partial z}, \delta_u \rangle$ の極小スタンダード基底を G とする．このとき，G の先頭項の集合は

$$ht_{\succ}(S) = \{z^2, yz, xy^2, x^3 z, x^8 y, x^{15}\}$$

である．したがって，

$$\kappa(f) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{x, y, z\}/\langle ht_{\succ}(S) \rangle) = 27$$

となる．

κ-不変量が計算できるので，具体的なジェネリックな座標系も得ることができる．アルゴリズム 3 により，まず，κ-不変量が計算し，その後，その κ-不変量になるようなジェネリックな座標系を探すことで具体的なジェネリックな座標系を得られる．

次に，f にパラメータ t が含まれる場合を考える．この場合，$f = 0$ は一般的に原点に孤立特異点を持つとする．定理 13 と CSSg 法を用いることにより κ-不変量が如何にパラメータの値により変化するかのかを完璧に計算することができる．

アルゴリズム 4 ($\kappa(f)$ with parameters)

入力：$f \in (\mathbb{C}[t])[x]$: 上記で説明したパラメータ t を持つ多項式.
$\succ$: $Term(x)$ の局所項順序.
出力: $\mathcal{K} = \bigcup_i \{(\mathbb{A}_i, \kappa_i)\}$: $\forall \bar{t} \in \mathbb{A}_i \subset \mathbb{C}^m$, $\kappa(\sigma_{\bar{t}}(f)) = \kappa_i$.
BEGIN
$\mathcal{K} \leftarrow \emptyset$;
$h_u \leftarrow f(x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n, x_2, \ldots, x_n)$;
$\delta_u \leftarrow \det(\frac{\partial^2 h_u}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j=1,2,\ldots,n}$;
$\mathcal{G} \leftarrow \mathsf{CSSg}(\{\frac{\partial h_u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial h_u}{\partial x_n}, \delta_u\}, \succ)$;
while $\mathcal{G} \neq \emptyset$ **do**
  Select $(\mathbb{A}, G)$ from $\mathcal{G}$; $\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{S} \backslash \{(\mathbb{A}, G)\}$;
  $\mathcal{K} \leftarrow \mathcal{K} \cup \{(\mathbb{A}, \dim_{\mathbb{C}(u)} (\mathbb{C}(u)\{x\}/\langle ht_{\succ}(G) \rangle))\}$;
end-while
return $\mathcal{K}$;
END

パラメータ $t_1, \ldots, t_m$ は複素数の値であり，有理関数体の元ではないので CSSg 法が必要であることを注意しておく．

例 15 $x^3y+xy^4=0$ はミルナー数 *12* の特異点を持ち，その特異点の μ-*constant* な変形（ミルナー数が一定となる変形）$f(x,y)=x^3y+xy^4+tx^2y^3$ を考える．このとき，t は変形パラメータで $\mathbb{C}$ の値をとる．また，$\succ$ は (x,y) の局所辞書式項順序とする．

$$h_u := f(x+uy,y) = x^3y+3ux^2y^2+3u^2xy^3+tx^2y^3+u^3y^4+2utxy^4+xy^4+u^2ty^5+uy^5$$

とし，

$$\delta := \det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h_u}{\partial x\partial x} & \frac{\partial^2 h_u}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 h_u}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 h_u}{\partial y\partial y}\end{pmatrix} = -9x^4-36ux^3y-54u^2x^2y^2-36u^3xy^3+48x^2y^3-9u^4y^4+96uxy^4$$
$$-24t^2x^2y^4+48u^2y^5-48ut^2xy^5-24txy^5-24u^2t^2y^6-24uty^6-16y^6$$

とする．ただし，u は不定元である．このとき，アルゴリズム *1* は $\overline{\mathbb{C}(u)}$ 上の $\langle \frac{\partial h}{\partial y}, \delta\rangle$ の包括的スタンダード基底系として次を出力する．

$$\{(\overline{\mathbb{C}(u)}\backslash\mathbb{V}_{\overline{\mathbb{C}(u)}}(60ut+77), G_1), (\mathbb{V}_{\overline{\mathbb{C}(u)}}(60ut+77), G_2)\}$$

ただし，$G_1, G_2 \subset (\mathbb{C}(u)[t])\{x,y\}$ であり $ht_{\succ}(G_1)=\{x^3,x^2y^2,xy^6,y^8\}$, $ht_{\succ}(G_2)=\{x^3,x^2y^2,y^7\}$ である．（もし G_1 と G_2 をすべて表示すると，*20* 行が必要となるので，ここでは先頭項のみを表示した.）

- $\left(\overline{\mathbb{C}(u)}\backslash\mathbb{V}_{\overline{\mathbb{C}(u)}}(60ut+77)\right)\cap\mathbb{C}=\mathbb{C}$ であるので（なぜなら $t=-\frac{77}{60u}\notin\mathbb{C}$），任意の $t\in\mathbb{C}$ において，

  $$\kappa(f) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{x\}/\langle ht_{\succ}(\sigma_t(S_1))\rangle) = 16$$

  となる．

- $\mathbb{V}_{\overline{\mathbb{C}(u)}}(60ut+77)\cap\mathbb{C}=\emptyset$ となるので, この場合は考える必要がない．.

例 16 $x^3+y^{10}=0$ の μ-*constant* な変形として $f=x^3+y^{10}+t_1xy^7+t_2xy^8$ を考える．ただし，t_1,t_2 は変形パラメータで $\mathbb{C}$ の値をとる．このとき，アルゴリズム *4* は次を出力する．

- もし $t_1\neq 0$ ならば，$\kappa(f)=23$.
- もし $t_1=0$ かつ $t_2\neq 0$ ならば，$\kappa(f)=24$.
- もし $t_1=t_2=0$ ならば，$\kappa(f)=25$.

次に，アルゴリズム 4 を用いることにより得た特異点変形の具体例をいくつか紹介する．

論文 [5, 6] において G.-M. Greuel は 0-modal と 1-modal 特異点の κ-不変量の計算をしている．我々が知る限り，論文 [5, 6] で紹介されている具体的な κ-不変量以外はどの文献にも記されていない．ここでは，2-modal と 3-modal 特異点の κ-不変量が μ-constant な変形にどのようになるのかを具体例でみる．

以下で扱われる特異点は，吉永-鈴木により論文 [26] で与えられた特異点の一部である．

2-modal 特異点

ここでは，t_1,t_2 は変形パラメータを意味する．

- E_{18}: $f=x^3+y^{10}+t_1xy^7+t_2xy^8$

stratum	$\kappa(f)$
$\mathbb{C}^2\backslash\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1)$	23
$\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1)\backslash\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1,t_2)$	24
$\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1,t_2)$	25

この表の意味は次となる．

- もし (t_1, t_2) が $\mathbb{C}^2 \backslash \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1)$ に属したならば，$\kappa(f) = 23$.
- もし (t_1, t_2) が $\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1) \backslash \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1, t_2)$ に属したならば，$\kappa(f) = 24$.
- もし (t_1, t_2) が $\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1, t_2)$ に属したならば，$\kappa(f) = 25$.

- E_{19}: $f = x^3 + xy^7 + t_1 y^{11} + t_2 xy^{12}$

stratum	$\kappa(f)$
$\mathbb{C}^2$	24

- E_{20}: $f = x^3 + y^{11} + t_1 xy^8 + t_2 xy^9$

stratum	$\kappa(f)$
$\mathbb{C}^2 \backslash \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1)$	26
$\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1) \backslash \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1, t_2)$	27
$\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1, t_2)$	28

- J_{16}: $f = x^3 + y^9 + t_1 x^2 y^3 + t_2 y^{10}$ $(4t_1^3 + 27 \neq 0)$

stratum	$\kappa(f)$
$\mathbb{C}^2 \backslash \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1(4t_1^3 + 27))$	20
$\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1)$	22

Term ordering: negative lex. with (y, x).
CPU time: 0.01

- W_{15}: $f = x^4 + y^6 + t_1 x^2 y^3 + t_2 y^7$ $(t_1^2 - 4 \neq 0)$

stratum	$\kappa(f)$
$\mathbb{C}^2 \backslash \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1(t_1^2 - 4))$	21
$\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1)$	22

ここに紹介したもの以外にも具体例は得られているがその中から 5 つを選び上に示した．これらの中で興味深いのは J_{16} であり，κ-不変量は 20 から 22 にジャンプしている．

3-modal 特異点

ここでは，t_1, t_2, t_3 は変形パラメータを意味する．

- E_{24}: $f = x^3 + y^{13} + t_1 xy^9 + t_2 xy^{10} + t_3 xy^{11}$

stratum	$\kappa(f)$
$\mathbb{C}^3 \backslash \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1)$	31
$\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1) \backslash \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1, t_2)$	32
$\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1, t_2) \backslash \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1, t_2, t_3)$	33
$\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1, t_2, t_3)$	34

- E_{25}: $f = x^3 + xy^9 + t_1y^{14} + t_2y^{15} + t_3y^{16}$

stratum	$\kappa(f)$
$\mathbb{C}^3$	32

- E_{26}: $f = x^3 + y^{14} + t_1xy^{10} + t_2xy^{11} + t_3xy^{12}$

stratum	$\kappa(f)$
$\mathbb{C}^3\backslash\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1)$	34
$\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1)\backslash\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1,t_2)$	35
$\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1,t_2)\backslash\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1,t_2,t_3)$	36
$\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1,t_2,t_3)$	37

- Z_{23}: $f = x^3y + y^{11} + t_1xy^8 + t_2xy^9 + t_3xy^{10}$

stratum	$\kappa(f)$
$\mathbb{C}^3\backslash\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1)$	31
$\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1)\backslash\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1,t_2)$	32
$\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1,t_2)$	33

- J_{22}: $f = x^3 + t_1x^2y^4 + y^{12} + t_2y^{13} + t_3y^{14}$ $(4t_1^3 + 27 \neq 0)$

stratum	$\kappa(f)$
$\mathbb{C}^3\backslash\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1(4t_1^3+27))$	28
$\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(t_1)$	31

ここに紹介したもの以外にも具体例は得られているがその中から 5 つを選び上に示した．興味深いのは J_{22} であり，κ-不変量は 28 から 31 にジャンプしている．

ジェネリックという性質により定義された不変量が特異点変形により如何に変化するかを考える場合には，CSSg 法が有効である．

謝辞

この研究は日本学術振興会科学研究補助金 基盤研究 (C) 課題番号 18K03214，18K03320，19K03484 の助成を受けております．

参 考 文 献

[1] E. Brieskorn : Vue d'ensemble sur les problèmes de monodromie. Astérisque **7** et **8** (1973), 393–413.

[2] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister and H. Schönemann : Singular 4-1-0 — A computer algebra system for polynomial computations, (2016) `http://www.singular.uni-kl.de`

[3] H. Grassmann, G.-M. Greuel, B. Martin, W. Neumann, G. Pfister, W. Pohl, H. Schönemann and T. Siebert : Standard bases, syzygies and their implementation in SINGULAR. Reports on Computer Algebra, **1** (1996) Zentrum für Computer algebra, Univ. Kaiserslautern.

[4] G. -M. Greuel und Lê Dũng Tráng : Spitzen, Doppelpunkte und vertikale Tangenten in der Diskriminante verseller Deformationen von vollständigen Durchshnitten. Math. Ann. **222** (1976), 71–88.

[5] G.-M. Greuel : Die Zahl der Spitzen und die Jacobi-Algebra einer isolierten Hyperflächensingularität. Manuscripta Math. **21** (1977), 227–241.

[6] G.-M. Greuel : Ergänzung und Berichtigung zu : Die Zahl der Spitzen und die Jacobi-Algebra einer isolierten Hyperflächensingularität. Manuscripta Math. **25** (1978), 205–208.

[7] G.-M. Greuel and G. Pfister : A Singular Introduction to Commutative Algebra. Second edition. Springer-Verlag. 2007.

[8] A. Hashemi and M. Kazemi : Parametric standard bases and their applications. Proc. CASC 2019, Lect. Notes Comp. Sci. , **11661**, Springer, (2019), 179–196.

[9] B. Iversen et Lê Dũng Tráng : Calcul du nombre de cusps dans la déformation semi-universelle d'une singularité isolée d'hypersurface complexe. Bull. S. M. France **102** (1974), 99–107.

[10] M. Kashiwara : Index theorem for maximally overdetermined systems of linear differential equations. Proc. Japan Acad. **49** (1973) 803–804.

[11] Lê Dũng Tráng and C. P. Ramanujam : The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type, *Amer. J. Math.* **98** (1976), 67–78.

[12] A. Montes : A new algorithm for discussing Gröbner bases with parameters. J. Symb. Comp., Vol. **33** (2002) 183–208.

[13] T. Mora : An algorithm to compute the equations of tangent cones. Proc. EUROCAM 82, LNCS, **144**, Springer, (1982), 158–165. .

[14] T. Mora, G. Phister and T. Traverso : An introduction to the tangent cone algorithm. Adv. in Computing Research, issued in Robotics and Nonlinear Geometry, **6** (1992), 199–270.

[15] T. Mora and M. E. Rossi : An algorithm for the Hilbert-Samuel function of a primary ideal. Commun. in Algebra **23** (1995), 1899–1911.

[16] K. Nabeshima and S. Tajima : On efficient algorithms for computing parametric local cohomology classes associated with semi-quasihomogeneous singularities and standard bases, Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC'2014), (2014), 351–358.

[17] K. Nabeshima and S. Tajima: Computing μ^*-sequences of hypersurface isolated singularities via parametric local cohomology systems. Acta Mathematica Vietnamica, **42**, No.2, (2017), 279-288.

[18] K. Nabeshima and S. Tajima : Algebraic local cohomology with parameters and parametric standard bases for zero-dimensional ideals. J. Symb. Comp., Vol. **82** (2017) 91–122.

[19] K. Nabeshima and S. Tajima : Alternative algorithms for computing generic μ^*-sequences and local Euler obstructions of isolated hypersurface singularities. Journal of Algebra and its Applications, **18**, No.08, (2019).

[20] D. G. Northcott : Lectures on Rings, Modules, and Multiplicities (1968), Cambridge.

[21] M. Oka, On the weak simultaneous resolution of a negligible truncation of the Newton boundary, Contemp. Math. **90** (1989), 199–210

[22] F. Pham : Courbes discriminantes des singularités planes d'ordre 3. Astérisque **7**et **8** (1973), 363–392.

[23] 田島慎一, 複素解析的不変量 κ の計算アルゴリズムについて, 京都大学数理解析研究所講究録 **2140** (2019), 128–132.

[24] B. Teissier : Cycles évanescentes, sections planes, et conditions de Whitney. Astérisque **7** et **8** (1973), 285–362.

[25] H. Teramoto and K. Nabeshima : Parametric standard system for mixed module and its application to singularity theory. Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC' 2020), (2020), 426–433.

[26] E. Yoshinaga and M. Suzuki : Normal forms of non-degenerate quasihomogeneous functions with inner modality ≤ 4. Inventiones Math., **55** (1979), 185–206.