# 平面内の直線族が創造する包絡線について

横浜国立大学・大学院環境情報研究院　西村 尚史
Takashi Nishimura
(nishimura-takashi-yx@ynu.ac.jp)
Research Institute of Environment
and Information Sciences,
Yokohama National University

## 目次

1 はじめに 2

2 【定義問題】 4
2.1 包絡線の定義いろいろ . . . . . . . . 4
2.2 いろいろな定義はすべて同値？ . . . . . . . . 6

3 【存在問題】 9
3.1 本稿における包絡線の定義 . . . . . . . . 9
3.2 創造的条件 . . . . . . . . 10
3.3 ガウス写像が特異点を持つ場合も接触多様体は有用？ . . . . . . . . 14

4 【表示問題】 19
4.1 表示公式 . . . . . . . . 19
4.2 例 . . . . . . . . 19

5 【一意性問題】 22

6 関連する話題 23
6.1 フロンタル . . . . . . . . 23

6.2　凸性を仮定しないルジャンドル変換の逆 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25

7　**おわりに** 26
7.1　ガウス写像が非特異の場合 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
7.2　ガウス写像が特異点を持つ場合 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28

**参考文献** 30

# 1　はじめに

本稿においては，特に断らない限り，関数や写像はすべて $C^\infty$ 級である．$S^1$ を 2 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ における単位円とする．関数 $\widetilde{\gamma}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と写像 $\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ から，次のように，平面 $\mathbb{R}^2$ 内の**直線族** $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ を自然に定義することができる．ここに，$(X,Y)\cdot\widetilde{\nu}(t)$ は二つの 2 次元ベクトル $(X,Y)$, $\widetilde{\nu}(t)$ の内積を表す．写像 $\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ を直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ の**ガウス写像**と呼ぶ．

$$
\begin{aligned}
L_t &:= \left\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2 \mid (X,Y)\cdot\widetilde{\nu}(t)-\widetilde{\gamma}(t)=0\right\},\\
\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})} &:= \left\{L_t\right\}_{t\in\mathbb{R}}.
\end{aligned}
$$

また，**配位空間** $\mathbb{R}^2$ と**パラメータ空間** $\mathbb{R}$ の直積を定義域とし，次式で定義される関数 $F:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ の**母関数族**と呼ばれる．

$$
F(X,Y,t)=(X,Y)\cdot\widetilde{\nu}(t)-\widetilde{\gamma}(t).
$$

直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ は**包絡線**と呼ばれる曲線を創造することが往々にしてあり，古来より多くの優れた先達が興味を持ち研究の対象にしていたようである．実際，[8] によれば，ヨハン・ベルヌーイの 1692 年の論文や 1691/1692 年の講義録，そしてライプニッツの 1694 年の論文において既に，（光線族のコースティックと呼ばれる）ある特定の直線族が創造する包絡線の方程式を求める問題に対して解答が与えられているとのことである．

筆者は，本稿執筆時点に出版された [17] において，超平面族が創造する包絡超曲面に関する以下の四つの基本的問題すべてに解答を与えることができた．本稿の目的は，わかりやすいように平面 $\mathbb{R}^2$ 内の直線族が創造する包絡線に限定し，[17] の出版に纏わる舞台裏の秘話なども交えて，以下の四つの基本的問題とその解答を概説することである．

**【定義問題】**　包絡線とはそもそも何なのであろうか？どのように定義されるものなのであろうか？

**【存在問題】** 与えられた直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ が包絡線を創造するための必要十分条件はなんであろうか？

**【表示問題】** 与えられた直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ が包絡線を創造する場合，その包絡線はどのように表示されるのであろうか？

**【一意性問題】** 与えられた直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ が包絡線を創造する場合，包絡線がただ一つであるための必要十分条件はなんであろうか？

ひょっとすると，「『直線族が与えられれば，その直線族はただ一つの包絡線を創造する』ということを示すのは，それほど難しいことではないような気がする．だから，【存在問題】や【一意性問題】を基本的問題というのは大袈裟なのでは？」と思われる読者がおられるかもしれない．ガウス写像が非特異な場合に限ればその思いは正しいことを後ほどご説明する．他方，ガウス写像が特異点を持つ場合まで含めて考えることにすると，残念ながらその思いは正しくなく，【存在問題】や【一意性問題】も基本的な問題になり得るのである．これについても後ほどご説明する．筆者が調べられる範囲は限られてしまうが，【定義問題】は文献 [3] で議論されているものの，【存在問題】や【表示問題】あるいは【一意性問題】を（限定された仮定の元での特別な舞台設定においてではなく，一般的な形で）扱っている文献は，文献 [17] 以前には存在していないように思える．その一方で，[5] によると，文献 [3, 4] の執筆時の頃に著者たちは，【定義問題】はもちろんのこと残りの三つの基本的問題も，とりわけ【存在問題】を気にして研究していたとのことである．

本稿の構成を述べる．第 2 節では【定義問題】の解答の概説が，第 3 節では【存在問題】の解答の概説が，第 4 節では【表示問題】の解答の概説が，第 5 節では【一意性問題】の解答の概説が与えられている．さらに，第 6 節においては，第 5 節までには述べられていない関連する話題について説明されている．そして，最終節である第 7 節において，ガウス写像が非特異や否やで場合分けをしてこれらの解答及び例からわかることをまとめておいて，読者の便宜を図ることとする．尚，読者の読みやすさや使いやすさを優先させているため，本稿においては，これら四つの基本的問題の解答である定理 1 から定理 4 には証明は全く与えられていない．証明に興味がある読者は文献 [17] を参照してほしい．文献 [17] においては，定理 2 と定理 3 には二通りの証明（単純な幾何学メカニズムによる証明とゲージ理論的アプローチによる証明）が与えてある．他にも証明法があり得るのであろうという気はするのだが，本稿執筆時点での筆者には他にどういう証明があり得るのか皆目見当がつかない．他の証明法を得ることができた読者の方は，是非，電子メールでご教示いただきたい．さらに，定理 1 と定理 4 には一通りの証明しか与えることができなかったので，これらの別証明を得られた読者の方もその旨を電子メールで筆者に教えてい

ただけるとありがたい.

# 2 【定義問題】

## 2.1 包絡線の定義いろいろ

筆者が調べられる範囲は限られてしまうが，ざっと調べただけでも以下のように，平面内の直線族の包絡線の定義は様々な文献で与えられていることがわかる．尚，以下の包絡線の定義では，日本語の書籍については出版年順に並べてあり，同一年の出版の場合は第1刷の発行月日順に並べてある.

**定義 1（平面内の直線族に限定した，文献 [21] の §88 での包絡線の定義）** $XY$ 平面において媒介変数 $t$ を含む方程式

$$F(X, Y, t) = 0 \tag{1}$$

によって，直線の一つの族 (family) が表される．$t$ の値を固定すれば，(1) は一つの曲線を表すが, $t$ の値を連続的に変えるならば, その直線は位置において連続的に変わるであろう．さ て一つの曲線 $E$ が (1) の各直線に接して，しかもその接点の軌跡であるとき，$E$ を曲線族 (1) の**包絡線**という.

**定義 2（平面内の直線族に限定した，文献 [14] の第 1.5 節での包絡線の定義）** $C^\infty$ 級曲線 $\gamma(t) = (X(t), Y(t))$ で，各 $t$ に対して $F(X(t), Y(t), t) = \frac{\partial F}{\partial t}(X(t), Y(X), t) = 0$ を満たすものを曲線族 $F(X, Y, t) = 0$ の**包絡線**という.

**定義 3（平面内の直線族に限定した，文献 [18] の第 3.3 節での包絡線の定義）** 直線族に対し，ある曲線 $\mathcal{C}$ があって，その直線族に含まれる一つひとつの直線と $\mathcal{C}$ が接しているとき，$\mathcal{C}$ をこの直線族の**包絡線**という.

**定義 4（平面内の直線族に限定した，文献 [23] の付録 B-1 での包絡線の定義）** パラメータ $t$ が $\mathbb{R}$ 上を動くとき, 各 $t$ に対して 1 つずつ直線 $L_t$ が対応している, すなわち直線の族 $\{L_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を考える．この各々の直線 $L_t$ すべてに接するような曲線 $\sigma$ が存在するとき，$\sigma$ を直線族 $\{L_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ の**包絡線**という.

**定義 5（平面内の直線族に限定した，文献 [7] の第 1.5 節での包絡線の定義）** 直線の 1 径数族があったとき，この直線族のどの直線にも接するような曲線をこの直線族の**包絡線 (envelope)** という.

**定義 6（平面内の直線族に限定した，文献 [22] の第 1.1 節脚注での包絡線の定義）** 直線の族 $\{L_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に対して，$L_t$ のすべてに接する曲線 $\sigma$ が存在するとき，それを直線族 $\{L_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ の**包絡線**という．

**定義 7（平面内の直線族に限定した，文献 [4] の第 5.3 節での包絡線の定義）** The **envelope**, or the **discriminant** of the family $F$ is the set

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_F = \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{there exists } t \in \mathbb{R} \text{ with } F(X,Y,t) = \frac{\partial F}{\partial t}(X,Y,t) = 0\right\}.$$

**定義 8（平面内の直線族に限定した，文献 [4] の第 5.8 節での包絡線の定義）** The **envelope** $E_1$ is the limit of intersections of nearby lines $L_t$.

**定義 9（平面内の直線族に限定した，文献 [4] の第 5.12 節での包絡線の定義）** The **envelope** $E_2$ is a curve tangent to the $L_t$.

**定義 10（平面内の直線族に限定した，Wikipedia[25] の 1 での包絡線の定義）** Let each line $L_t$ in the family be given as the solution of an equation $F(X,Y,t) = 0$, where $t$ is a parameter. The **envelope** of the family $L_t$ is then defined as the set $\mathcal{D}$ of points $(X,Y)$ for which, simultaneously,

$$F(X,Y,t) = 0 \text{ and } \frac{\partial F}{\partial t}(X,Y,t) = 0$$

for some value of $t$, where $\frac{\partial F}{\partial t}$ is the partial derivative of $F$ with respect to $t$.

**定義 11（平面内の直線族に限定した，Wikipedia[25] での envelope$E_1$ の定義）** The **envelope** $E_1$ is the limit of intersections of nearby lines $L_t$.

**定義 12（平面内の直線族に限定した，Wikipedia[25] での envelope$E_2$ の定義）** The **envelope** $E_2$ is a curve tangent to all of the $L_t$.

**定義 13（平面内の直線族に限定した，ウィキペディア [26] での包絡線の定義）** **包絡線**（ほうらくせん, 英: **envelope**）とは, 与えられた直線族と接線を共有する曲線，すなわち与えられた（一般には無限個の）全ての直線たちに接するような曲線のことである．

## 2.2 いろいろな定義はすべて同値？

これら 13 通りの定義はすべて同値な定義と思えるだろうかと自問してみると，とてもそうは思えないことにすぐ気づく．そこで，これらの定義を同値な定義と思えるものにグループ分けしてみる．すると，以下の三つのグループに分けられそうである．

| グループ番号 | 記号 | グループのメンバー |
|---|---|---|
| グループ 1 | $E_1$ | 定義 8，定義 11 |
| グループ 2 | $E_2$ | 定義 1，定義 3〜定義 6，定義 9，定義 12，定義 13 |
| グループ 3 | $\mathcal{D}$ | 定義 2，定義 7，定義 10 |

「数学的定義を多数決で決めるのはナンセンス」ということについては承知しているつもりでいるものの，この調査の結果を眺めれば，グループ 2 の定義を採用することがもっとも妥当そうに思えてしまうことも否定できない事実と言わざるを得ない．グループ 2 で採用されている定義により定義される集合を，[4] や [25] に従い $E_2$ と書くことにする．また，グループ 1 とグループ 3 での定義により定義される集合を，同様に [4] や [25] に従い，それぞれ $E_1$, $\mathcal{D}$ と書くことにする．

さて，ここまでで，見かけ上は異なる三通りの定義があることがわかり，これら三通りの定義のうち $E_2$ がもっとも妥当そうに思えることもわかった．では次にこれら三通りの定義の違いは見かけ上だけなのでは？，ということを考えてみることにする．まず，以下は比較的容易にわかる．

**事実 1**

(1) $E_1 \subset \mathcal{D}$ ([4] の第 5.9 節を参照),

(2) $E_2 \subset \mathcal{D}$ ([4] の第 5.13 節を参照).

そこで次に，事実 1 の逆向きの包含関係は成り立つのかどうかを考えてみる．すると，たとえば以下のような簡単な例から，事実 1 の (1), (2) ともに逆向きの包含関係は一般には成り立たないことがわかる．

**例 1（[25] の Example 1）** 平面正則曲線 $\widetilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\widetilde{f}(t)=(t,t^3)$ の接線族 $\{L_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を考える．$\widetilde{\nu}(t)=\frac{(-3t^2,1)}{\sqrt{1+9t^4}}$, $\widetilde{\gamma}(t)=\frac{-2t^3}{\sqrt{1+9t^4}}$ であるから，接線族の定義方程式は

$$F(X,Y,t)=-3t^2X+Y+2t^3=0$$

となる．よって，$\frac{\partial F}{\partial t}(X,Y,t) = -6tX + 6t^2 = 6t(t-X)$ を得，

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R} \text{ s.t. } F(X,Y,t) = \frac{\partial F}{\partial t}(X,Y,t) = 0\right\} \\ &= \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R} \text{ s.t. } -3t^2X + Y + 2t^3 = 6t(t-X) = 0\right\} \\ &= \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \mid Y = 0 \text{ or } Y = X^3\right\}\end{aligned}$$

がわかる．次に，$E_1$ を考えてみる．考えている直線族は平面正則曲線 $\widetilde{f}(t) = (t,t^3)$ の接線族なのだから，

$$E_1 = \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \mid Y = X^3\right\}$$

であろうことは容易に想像がつく．[25] にあるように実際に計算してみれば，その想像は確かに正しいことが困難なく確認できる．最後に $E_2$ を調べる．この例での直線族 $\{L_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ は平面正則曲線 $\widetilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\widetilde{f}(t) = (t,t^3)$ の接線族であり，どの接線 $L_t$ に対してもこの平面正則曲線との交点であって接点にもなっている点はただ 1 点 $(t,t^3)$ のみであることは容易にわかることなので，

$$E_2 = \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \mid Y = X^3\right\}$$

となっているのである．従って，この例の場合，$E_1 = E_2 \subsetneq \mathcal{D}$ であることがわかる．

**ノート 1**　例 1 でのポイントはガウス写像 $\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ が特異点を持つことである（ノート 4 も参照）．後ほどある程度詳しく述べるが，ガウス写像 $\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ が非特異である場合は扱いやすく，様々な形での深い考察が可能となる．

さてこの例で，$\mathcal{D}$ は他の二つ $E_1, E_2$ とは一般には異なることがわかった．また，この例においては，$E_1 = E_2$ になっていた．この例のように，$E_1 = E_2$ がいつでも言えるのであろうか？たとえば [8] の 118 ページを眺めると，ライプニッツは（暗黙にかどうかはわからないが）両者が同一であることを用いて光線族のコースティックの方程式を求めていたことがわかる．ライプニッツの事例を考慮すると，包絡線の定義である $E_2$ よりも $E_1$ のほうが計算上は実用的なようなので，$E_1 = E_2$ がわかればそれなりに有用そうに思える．果たして，$E_1 = E_2$ はいつでも成り立つのであろうか？この【$E_1 = E_2$ 問題】は，次のように部分的には肯定的に解かれていた．

**事実 2（文献 [18] の命題 3.6）**　平面内の直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ のガウス写像 $\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ が非特異と仮定する．すると，$E_1 = E_2$ となる．

**ノート 2**　文献 [18] においては，$E_1$ は**焦点の軌跡**と名づけられている．この名称のほうが歴史に忠実に従っているようにも思え，相槌を打ちたくなる気になる．

その一方で，筆者が調べることができた範囲は限られてしまうものの，ガウス写像が特異点を持つ場合には【$E_1 = E_2$ 問題】へのなんらかの解答が与えられてある文献を見つけることができなかった．（ガウス写像に特異点がある場合の）【$E_1 = E_2$ 問題】はオープンであったのかもしれない．ガウス写像が特異点を持つ持たないに関係なく，【$E_1 = E_2$ 問題】は [17] で肯定的に解決された．

**定理 1**（[17] の Theorem 1(c)）　平面内の直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ に対し，$E_1 = E_2$ が常に成立する．

尚，事実 1(1) は文献 [21] の第 88 節においても証明されているが，同時に，そこにおいては（直線族に限定せずに）曲線族にまで考察する対象を拡げて包絡線を考えることをすると，$E_1 = \emptyset, E_2 = \mathcal{D}$ となる場合もあり得るということを具体的な例をあげて記載してある．このように，【$E_1 = E_2$ 問題】は曲線族の包絡線まで考えることをすると，無意味な問題となってしまうので注意が必要である．

**ノート 3**　白状すると，筆者は [4] の Exercise 5.33(2)(iv) に長い間悩み続けていた．この問題は計算で証明することは難しくないのであるが，「オーソトミック上の点と元の正則曲線上の同じパラメータでの点とを結ぶ平面ベクトルがオーソトミックの法ベクトルに必ずなっている」のはなぜなのか，そこでの風景が全く見えて来ない状態がかなり長い間続いていた．悩んでいた途中の比較的最近では，[15] において，元の正則曲線を一般次元のフロンタルに拡張して同様の性質を示したりもしているが，そこにおいても計算で示すことができただけであり，その当時もそこでの風景が見えていたわけではなく，悩みは相変わらず続いたままであった．

定理 1 の証明を完成させたとき，$E_2 \subset E_1$ を示すのに使った方法こそが [4] の Exercise 5.33(2)(iv) の原風景であることに漸く気づくことができた．その瞬間，霧が一気に晴れて見通しが格段に良くなった気がして，すっきりした気持ちになることができた．このように振り返ってみると，筆者にとっては，定理 1 のルーツは [4] の Exercise 5.33(2)(iv) にある，と言えるのかもしれない．

# 3 【存在問題】

## 3.1 本稿における包絡線の定義

第 2 節において，平面内の直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ の包絡線の定義として，$E_2$ を採用すれば妥当そうに思えることを確認した．すなわち，定義 1，定義 3，定義 4，定義 5，定義 6，定義 9，定義 12，定義 13 にあるように定義するのがもっともらしいように筆者には思えるのである．本節においては，まず，この定義の微分方程式を使った言い換えを試みる．次のような「制約条件付の 1 階常微分方程式の解となるような写像」として定義すればよいことがわかる．

**定義 14（[17] における包絡線の定義）** 平面内の直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ の**包絡線**とは，制約条件

$$\underline{F\left(\widetilde{f}_1(t),\widetilde{f}_2(t),t\right)=\left(\widetilde{f}_1(t),\widetilde{f}_2(t)\right)\cdot\widetilde{\nu}(t)-\widetilde{\gamma}(t)\equiv 0}$$

を満たす，１階常微分微分方程式

$$\underline{\left(\frac{d\widetilde{f}_1}{dt}(t),\frac{d\widetilde{f}_2}{dt}(t)\right)\cdot\widetilde{\nu}(t)=0}$$

の解となる写像 $\left(\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2\right):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ のことである．

第 2 節の例 1 が包絡線を創造する直線族の例である．では，「平面内の与えられた直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ は常に包絡線を創造するのであろうか？」と問うてみると，次のような簡単な例から「常に包絡線を創造するわけではない」ということはすぐわかる．

**例 2** $t\in\mathbb{R}$ に対し $\widetilde{\nu}(t)=(0,1),\widetilde{\gamma}(t)=t$ と置くと，

$$L_t=\left\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2\mid(X,Y)\cdot\widetilde{\nu}(t)-\widetilde{\gamma}(t)=0\right\}=\left\{(X,t)\in\mathbb{R}^2\mid X\in\mathbb{R}\right\}$$

を得る．任意に $t$ を選び固定すると，$L_t\cap L_{t+\varepsilon}=\emptyset$ であるから $E_1=\emptyset$ がわかり，第 2 節の定理 1 より，$E_2=\emptyset$ がわかる．本節での定義 14 における包絡線は $E_2$ を微分方程式を使って書き換えたものに過ぎないので，結局，この例の直線族では定義 14 の意味での包絡線を創造しないことがわかる．

もう少し微妙そうな例も考えてみることにする．

**例 3（[26] の例）**　$t \in \mathbb{R}$ に対し，$L_t = \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \mid Y = X\sin t + \cos t\right\}$ と置く．[26] においては包絡線の定義は定義 13 であるので，[26] に書いてある「直線族 $\{L_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ が有する包絡線は双曲線 $X^2 - Y^2 + 1 = 0$」における包絡線の定義は定義 13 ということになるはずである．他方，この例では，$\widetilde{\nu}(t) = \frac{(\sin t, -1)}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$, $\widetilde{\gamma}(t) = \frac{-\cos t}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$ であるので，計算により $t = \frac{\pi}{2} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ は $\widetilde{\nu}$ の特異点ということがわかる．そこで，$t = \frac{\pi}{2} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ の場合を少し調べてみることにする．$t$ がこの場合の $L_t$ は $X = Y$ または $X = -Y$ という直線であり，どちらの直線も双曲線 $X^2 - Y^2 + 1 = 0$ に接していないことはすぐわかる（「無限遠点で接している」という考え方は導入しないことにする）．すなわち，この双曲線 $X^2 - Y^2 + 1 = 0$ はこの例での直線族 $\{L_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ の（定義 13 の意味での）包絡線になっておらず，この例は包絡線の例にはなっていないことがわかる．次に，この直線族に対して，包絡線の候補らしいものは他にはないのか，と考えてみる．すると，後ほど説明する第 5 節の定理 4 を先走って使うことにすると，この直線族は包絡線を創造すればただ 1 つだけ，ということがわかる．さらに，この直線族が包絡線を創造すれば，その包絡線のパラメータ空間を $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ に制限した写像は，パラメータ空間を $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ に制限した直線族の包絡線になっているはずである．その一方で，双曲線 $X^2 - Y^2 + 1 = 0$ がパラメータ空間を $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ に制限した直線族の包絡線になっていることは容易にわかるし，第 5 節の定理 4 を再び先走って使えば，パラメータ空間を $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ に制限した直線族の包絡線は存在してもただ一つ，ということもわかる．以上の考察により，この例における包絡線の候補は双曲線 $X^2 - Y^2 + 1 = 0$ 以外にはあり得ないこともわかる．すなわち，この例は定義 13 の意味での包絡線を創造しない直線族の例であることがわかり，従って，定義 14 の意味での包絡線を創造しない直線族の例であることがわかる．

## 3.2　創造的条件

**ノート 4**　例 3 を眺めていると，【存在問題】を考えるときにも，ガウス写像 $\widetilde{\nu}$ の特異点が重要になってくる気がしてくる．そこで，念のため，例 1 と例 2 におけるガウス写像 $\widetilde{\nu} : \mathbb{R} \to S^1$ の特異点を，$\mathbb{R}$ という 1 次元多様体から $S^1$ という 1 次元多様体への可微分写像の特異点の定義に則って調べてみることにする．例 1 でのガウス写像は $\widetilde{\nu}(t) = \frac{(-3t^2, 1)}{\sqrt{1+9t^4}}$ と表示されるのであった．だから，$\widetilde{\nu}(t)$ と $\widetilde{\nu}(0)$ を結ぶ弧の（反時計回りを正とする）符号付きの長さを $\Theta$ とし，$\widetilde{\nu}(t) = (\cos(\Theta \circ \widetilde{\nu})(t), \sin(\Theta \circ \widetilde{\nu})(t))$ とおけば，$\widetilde{\nu} : \mathbb{R} \to S^1$ の特異点とは $(\Theta \circ \widetilde{\nu})'(t) = 0$ となる $t \in \mathbb{R}$ のことであった．$(\Theta \circ \widetilde{\nu})'(t)$ を具体的に表わす

には，たとえば $\sin\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t)=\frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}$ の両辺を $t$ で微分してみるとよい．実行してみると，$\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)'(t)=\frac{6t}{1+9t^4}$ を得る．従って，$t=0$ がガウス写像の特異点であることがわかり，結局，例 1 はガウス写像が特異点を持っているものの，定義 14 の意味での包絡線を創造する直線族なのである，ということがわかったことになる．また，例 2 ではガウス写像は定値写像であったから，すべての $t\in\mathbb{R}$ がガウス写像の特異点である．すなわち，例 2 はガウス写像が正則点を全く持たず，定義 14 の意味での包絡線を創造しない直線族なのである．ところが，例 2 と同じガウス写像に対して, $\widetilde{\gamma}(t)=0$ と置いて直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ を考えてみると，この直線族は直線族と言いつつも常に同じ直線 $Y=0$ という名ばかりの直線族に過ぎないなので，任意の関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対し，$\mathbb{R}\ni t\mapsto (f(t),0)\in\mathbb{R}^2$ という写像は定義 14 の意味での包絡線になってしまう．特に，直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ は定義 14 の意味の包絡線を創造する直線族であることになる．その一方で，例 1 と同じガウス写像に対して，直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ が定義 14 の意味で包絡線を創造しないような高さ関数 $\widetilde{\gamma}$ を構成してみようとどんなに頑張ってみても，うまく作れそうもないことに気づく．このような簡単な考察から,「ガウス写像が特異点を持てば，その直線族は包絡線を創造しない」とは必ずしも言えず,【存在問題】にとっては,（ガウス写像の特異点それ自身というよりも）「ガウス写像 $\widetilde{\nu}$ の特異点における，$\widetilde{\nu}$ と（直線の高さを与える）高さ関数 $\widetilde{\gamma}$ の関係」が重要そうに思えてくる．さらに言えば，$\widetilde{\nu}$ の特異点は $\widetilde{\nu}$ を微分して定義されるものであるので,「ガウス写像 $\widetilde{\nu}$ の特異点における，$\widetilde{\nu}$ と高さ関数 $\widetilde{\gamma}$ の無限小レベルでの関係」が重要そうに思えてくるのである．この重要そうに思ええてくる気持ちを数学的に具体化しようと努めてみると，次の定義 15 に自然に到達する．

【存在問題】に対しては，というよりも，包絡線の四つの基本的問題すべてに対しては，というべきかもしれないが，次の定義が最重要な定義である．

**定義 15（[17] の Definition 2）** $\widetilde{\gamma}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を関数とし, $\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ を写像とする．また，$T^*S^1$ を $S^1$ の余接束とする．そのとき，直線族 $\mathcal{H}_{(\widetilde{\varphi},\widetilde{\nu})}$ が**創造的**であるとは，$\widetilde{\Omega}(t)=(\widetilde{\nu}(t),\widetilde{\omega}(t))$ という形（すなわち，以下の図式が可換) であり任意の $t_0\in\mathbb{R}$ に対し，$t_0$ における 1-形式芽の等式 $d\widetilde{\gamma}=\widetilde{\omega}$ が成り立っているような写像 $\widetilde{\Omega}:\mathbb{R}\to T^*S^1$ が存在することである．

$$\begin{array}{ccc} & & T^*S^1 \\ & \overset{\widetilde{\Omega}}{\nearrow} & \downarrow \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\widetilde{\nu}} & S^1 \end{array}$$

すなわち，$\mathcal{H}_{(\widetilde{\varphi},\widetilde{\nu})}$ が創造的であるとは，$\widetilde{\Omega}(t)=(\widetilde{\nu}(t),\widetilde{\omega}(t))$ という形になっていて任意の

$t_0 \in \mathbb{R}$ における 1-形式芽 $d\widetilde{\gamma}$ が次のように表示されるような写像 $\widetilde{\Omega} : N \to T^*S^n$ が存在することである．

$$d\widetilde{\gamma} = \widetilde{\omega}(t)\left(\Pi_{(\widetilde{\nu}(t),\widetilde{\nu}(t_0))}\left(\frac{\partial}{\partial\Theta}\right)\right) d\left(\Theta \circ \widetilde{\nu}\right).$$

ここに $\Theta$ は弧度法で測った $\widetilde{\nu}(t)$ と $\widetilde{\nu}(t_0)$ の間の角度（つまり，ラジアン）であって，反時計回りを正の向きとしたものであり，$\frac{\partial}{\partial\Theta}$ は 1 次元接ベクトル空間 $T_{\widetilde{\nu}(x_0)}S^1$ の反時計回りの向きを持つ 1 次元単位ベクトル（つまり，1 次元接ベクトル空間 $T_{\widetilde{\nu}(x_0)}S^1$ と数直線 $\mathbb{R}$ の標準的な同一視のもとでは，1 という実数）である．また，$\Pi_{(\widetilde{\nu}(t),\widetilde{\nu}(t_0))} : T_{\widetilde{\nu}(t_0)}S^1 \to T_{\widetilde{\nu}(x)}S^1$ はレビ・チビタ平行移動と呼ばれる線形写像（要するに，$T_{\widetilde{\nu}(x_0)}\mathbb{R}^2$ の角度 $\Theta$ の回転という線形写像を $T_{\widetilde{\nu}(x_0)}\mathbb{R}^2$ の部分ベクトル空間である接ベクトル空間 $T_{\widetilde{\nu}(x_0)}S^1$ に制限したもの）である．

**例 4**　直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ のガウス写像 $\widetilde{\nu} : \mathbb{R} \to S^1$ が正則点しか持たないとする．すると，任意の $t_0 \in \mathbb{R}$ におけるガウス写像芽 $\widetilde{\nu} : (\mathbb{R}, t_0) \to (S^1, \widetilde{\nu}(t_0))$ に対し

$$\begin{aligned}
d\widetilde{\gamma} &= \frac{d\widetilde{\gamma}}{dt}(t)dt \\
&= \frac{d\left(\widetilde{\gamma} \circ \left(\widetilde{\nu}^{-1} \circ \Theta^{-1}\right) \circ (\Theta \circ \widetilde{\nu})\right)}{dt}(t)dt \\
&= \frac{d\left(\widetilde{\gamma} \circ \left(\widetilde{\nu}^{-1} \circ \Theta^{-1}\right)\right)}{d\Theta}(\Theta \circ \widetilde{\nu}(t))\frac{d\left(\Theta \circ \widetilde{\nu}\right)}{dt}(t)dt \\
&= \frac{d\left(\widetilde{\gamma} \circ \left(\widetilde{\nu}^{-1} \circ \Theta^{-1}\right)\right)}{d\Theta}(\Theta \circ \widetilde{\nu}(t))d(\Theta \circ \widetilde{\nu})
\end{aligned}$$

となる．「そんなことは [17] には書かれていないのでは？」と思われる読者もおられるかもしれないので，これについてもう少し説明することにする．[17] の 2592 ページにある Remark1.1(d) において，高さ関数 $\widetilde{\gamma}$ が局所的にガウス写像と $S^n$ 上のある関数との合成という形になっている場合について触れてあるが，この場合がガウス写像が非特異な場合を含んでいるのである．従って，

**事実 3**　直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ のガウス写像 $\widetilde{\nu} : \mathbb{R} \to S^1$ が非特異であれば，$\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ は必ず創造的である．

ということについて，（もしかしたらわかりにくい書き方になっているかもしれないけれども）[17] で言及してあると言える状況なのである．見方を変えれば，新奇性を前面に押し出そうとしてガウス写像 $\widetilde{\nu} : \mathbb{R} \to S^1$ が特異点を持つ場合に注力していたため，ガウス写像が非特異な場合は目立たない扱いになってしまっていた，と言える面はあるのかもしれない．

**ノート 5**　では，ガウス写像が特異点を持つ場合はどうなのだろうか？ [17] の Example4.1( c ) では例 1 の直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ が創造的かどうかをチェックしているが，そこでの計算をここに再現してみる．$\widetilde{\gamma}(t)=\frac{-2t^3}{\sqrt{1+9t^4}}$ であったので，直接計算することにより，

$$\frac{d\widetilde{\gamma}}{dt}(t)=\frac{-6t^2(1+3t^4)}{(1+9t^4)^{\frac{3}{2}}} \tag{2}$$

を得る．また，ノート 4 において既に，

$$\frac{d\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)}{dt}(t)=\frac{6t}{\sqrt{1+9t^4}} \tag{3}$$

を計算している．ここで，$\Theta$ は $\widetilde{\nu}(t)$ と $\widetilde{\nu}(0)$ を結ぶ弧の（反時計回りを正とする）符号付きの長さ（つまり，$\widetilde{\nu}(0)$ と $\widetilde{\nu}(t)$ の間の符号付きのラジアン）であった．(2) と (3) より，

$$d\widetilde{\gamma}=\frac{-t\left(1+3t^4\right)}{(1+9t^4)}d\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)$$

が得られ，例 1 の直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ は創造的であることがわかる．その一方で，例 2 の直線族に対しては，$d\widetilde{\gamma}\equiv 1$，$d\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)\equiv 0$ であるから，創造的でない．

　これらのように，ガウス写像が特異点を持つ場合は，創造的である場合もあり得るし創造的ではない場合もあり得る．

**定理 2（[17] の Theorem 1(a)）**　平面内の直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ が定義 14 の意味での包絡線を持つことの必要十分条件は，$\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ が創造的であることである．

事実 3 と定理 2 を組み合わせれば次を得る．

**系 1**　直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ のガウス写像 $\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ が非特異であれば，この直線族は定義 14 の意味での包絡線を必ず創造する．

**ノート 6**　直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ に限定して考えることにすると，「ガウス写像 $\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ が非特異であれば，$F(X,Y,t)=0$ と $\frac{\partial F}{\partial t}(X,Y,t)=0$ の交わりを $(X,Y)$-平面に射影することで直線族の包絡線を得ることができる」というような主張を，[21] をはじめとしてあちこちに見つけることができる．このような主張は，次の補題により系 1 と同じ主張と言える．だから，ガウス写像が非特異である場合は，定理 2 は昔から良く知られている上記の主張を新しい装いにして整理し直した結果に過ぎない，とも言える．

**補題 1**　平面内の直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ のガウス写像 $\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ が非特異であるとする．そのとき，定義 2 や定義 7 や定義 10 の意味での包絡線をパラメータ表示してみると，定義 14 の

意味での包絡線になっている．すなわち，ガウス写像が非特異であれば $E_2 = \mathcal{D}$ が成立する．

<u>証明</u>　事実 1 により $E_2 \supset \mathcal{D}$ を示せば十分．$\widetilde{\nu}(t) = \left(\cos\widetilde{\Theta}(t), \sin\widetilde{\Theta}(t)\right)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
F(X,Y,t) &= X\cos\widetilde{\Theta}(t) + Y\sin\widetilde{\Theta}(t) - \widetilde{\gamma}(t) \\
\frac{\partial F}{\partial t}(X,Y,t) &= \left(-X\sin\widetilde{\Theta}(t) + Y\cos\widetilde{\Theta}(t)\right)\widetilde{\Theta}'(t) - \widetilde{\gamma}'(t)
\end{aligned}
$$

である．事実 3 から $\widetilde{\gamma}'(t) = \widetilde{\omega}(t)\widetilde{\Theta}'(t)$ を満たす $\widetilde{\omega}(t)$ が存在するので，$\frac{\partial F}{\partial t}(X,Y,t) = 0$ は

$$
\left(-X\sin\widetilde{\Theta}(t) + Y\cos\widetilde{\Theta}(t) - \widetilde{\omega}(t)\right)\widetilde{\Theta}'(t) = 0
$$

と同値である．仮定から $\widetilde{\Theta}'(t) \neq 0$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ であるので，連立方程式 $F(X,Y,t) = \frac{\partial F}{\partial t}(X,Y,t) = 0$ は連立方程式

$$
\begin{aligned}
X\cos\widetilde{\Theta}(t) + Y\sin\widetilde{\Theta}(t) &= \widetilde{\gamma}(t) \\
-X\sin\widetilde{\Theta}(t) + Y\cos\widetilde{\Theta}(t) &= \widetilde{\omega}(t)
\end{aligned}
$$

と全く同じ解を持つ．$t$ を任意に固定してこの連立一次方程式を解けば，

$$
(X,Y) = \widetilde{\gamma}(t)\left(\cos\widetilde{\Theta}(t), \sin\widetilde{\Theta}(t)\right) + \widetilde{\omega}(t)\left(-\sin\widetilde{\Theta}(t), \cos\widetilde{\Theta}(t)\right)
$$

を得る．すなわち $\mathcal{D}$ の点はこのようなパラメータ表示を持つことがわかったことになるが，次節の定理 3 によれば，これは $E_2$ の点のパラメータ表示であることがわかる．すなわち，$\mathcal{D} \subset E_2$ が示された．　$\square$

尚，「直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ のガウス写像 $\widetilde{\nu} : \mathbb{R} \to S^1$ が非特異であれば，$F(X,Y,t) = 0$ と $\frac{\partial F}{\partial t}(X,Y,t) = 0$ の交わりを $(X,Y)$-平面に射影して包絡線を得ることができる」という主張を，「ガウス写像 $\widetilde{\nu} : \mathbb{R} \to S^1$ が非特異」という仮定を設けずに述べてあったり，あるいは，「ガウス写像 $\widetilde{\nu} : \mathbb{R} \to S^1$ が高々孤立特異点を持つ」という緩めた仮定のもとで述べてあったりしてある文献も散見される．しかし，もしもその文献における包絡線の定義が $E_2$ であるのであれば，たとえば例 1 で示しているように，残念ながらそのような主張は誤りを含んでいることになるので注意が必要である．

### 3.3　ガウス写像が特異点を持つ場合も接触多様体は有用？

**ノート 7**　[17] のプレプリント版は arXiv に置いているが，version 1 から version 4 まで存在する．version 1 や version 2 においては上記の定理 2 のみを主定理としてあり，

「単純な幾何学的メカニズムを用いて主定理を示す」という方針にしてあって，接触幾何学については一切言及していなかった．ところが，version 2 の投稿に対する（アノニマスレフェリーの一人であるレフェリー 1 の）レフェリーレポートには，「この論文の主定理は接触幾何学の標準的考察で示せる．接触幾何学は単純な幾何学的メカニズムよりも遙かに普及していると思えるので，接触幾何学的な考察による証明のほうが多くの読者にはわかりやすいはず．従って，主定理のステイトメントも証明も大幅に変更すべき」と書いてあり，AE も「是非，そうすべき」という意見であった．レフェリー 1 は接触幾何学の標準的考察による証明も書いてくれていたので，以下にレフェリー 1 の指摘を書いておくことにする．

『私が理解している限り，主定理は接触幾何学の標準的考察で以下のように示すことが可能である．$\mathbb{R}^2 \times S^1 = \{(y, \mathbf{n}) \mid ||\mathbf{n}|| = 1\}$ を標準的な接触構造 $\mathbf{n} \cdot dy = 0$ を持つ $\mathbb{R}^2$ の単位接束（余接束）とする．以下のダブルルジャンドルファイブレーションを考える，ここに $\pi_1(y, \mathbf{n}) = y, \pi_2(y, \mathbf{n}) = (y \cdot \mathbf{n}, \mathbf{n})$ である．

$$\mathbb{R}^2 \xleftarrow{\pi_1} \mathbb{R}^2 \times S^1 \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R} \times S^1$$

すると，定義 14 は「直線族 $\mathcal{H}_{(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu})}$ が包絡線を創造することの必要十分条件は，写像 $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times S^1$ がルジャンドル写像 $(\widetilde{f}, \widetilde{\nu}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ に（$\pi_2$ を通して）リフトできることである」と言い換えることができる．次に，$\mathbb{R} \times T^*S^1 = \{(z, (\mathbf{n}, \omega)) \mid z \in \mathbb{R}, \mathbf{n} \in S^1, \omega \in T^*_{\mathbf{n}}S^1\} = J^1(S^1, \mathbb{R})$ を標準的な接触構造 $dz - \Omega = 0$ を持つ接触多様体とする，ここで $\Omega$ は $T^*S^1$ 上の正準（リュービル）1-形式である．$\pi_3((z, (\mathbf{n}, \omega))) = (z, \mathbf{n})$ で定義される射影 $\pi_3 : \mathbb{R} \times T^*S^1 \to \mathbb{R} \times S^1$ はルジャンドルファイブレーションになる．すると，もしも私が誤解をしていなければ，定義 15 は「直線族 $\mathcal{H}_{(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu})}$ が創造的であることの必要十分条件は，写像 $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times S^1$ がルジャンドル写像 $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\Omega}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times T^*S^1$ に（$\pi_3$ を通して）リフトできることである」と言い換えることができる．

さて，そうすると，主定理は，「$\mathbb{R}^2 \times S^1 \to \mathbb{R} \times TS^1$, $(y, \mathbf{n}) \mapsto (y \cdot \mathbf{n}, (\mathbf{n}, y - (y \cdot \mathbf{n})\mathbf{n})$ から誘導される写像

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \times S^1 \to \mathbb{R} \times TS^1 \cong \mathbb{R} \times T^*S^1$$

は contactomorphism である」という事実に従う（$\Psi$ の逆写像は $(z, (\mathbf{n}, v)) \mapsto (v + z\mathbf{n}, \mathbf{n})$ から誘導される）．尚，接束 $TS^1$ と余接束 $T^*S^1$ は $S^1$ の標準的計量により同一視されており，$\mathbb{R}^2 \times S^1, \mathbb{R} \times T^*S^1$ のどちらの空間も”incident”多様体

$$\{(y, H) \mid y \in \mathbb{R}^2, H \text{ is a co-oriented affine line in } \mathbb{R}^2, y \in H\}$$

と自然に同一視される．また，「少なくとも局所的には任意のルジャンドルファイブレーションは同値である」という事実はダルブーの定理（の一種）であり，もしもあなたが不案内であれば，たとえば（[17] でも引用してある）[2] を見ればよい.』

いかにも正しそうな推論に思える．筆者はこれを見て，「げっ，こいつはまずそうだ！」と慌てふためいてしまい，しばらくは暗い気持の日々が続いてしまった．この後の（個人的には）劇的と思えるような結末を説明するにはある程度のスペースが必要であるが，既にこのノート 7 はだいぶ長くなってしまったので，続きは次のノート 8 に書くことにする．

**ノート 8**　相変わらず暗い気持ちの日々が続き，もうそろそろ時間切れかとも思えた修正版の投稿締切の直前になって，突然，マザー理論（のある一部）とのちょっとした関連に気づいた．そして，それにより突破口が開け，「ガウス写像が非特異であればレフェリー 1 の指摘が確かに当てはまるようだが，特異点を持つ場合は当てはまらない場合が多々あるようだ．そもそもガウス写像が特異点を持つ場合に重点を置いていたのであるから，ステイトメントも証明も変える必要はないのではなかろうか」ということに漸く気づくことができた．そしてそのことをレフェリーへの手紙に丁寧に書いたところ，レフェリー 1 にも納得してもらえ，その後はスピードアップし，1 回の minor revision を経て受理にたどり着くことができた．このあたりをもう少し詳しく説明してみることにする．

まず，関連があることに気づいたマザー理論のある一部（[6] の 62-63 ページ）を復習しておく．二つの自然数 $n, p$ に対し，写像芽 $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ を考える．写像芽 $f$ に沿った接ベクトル場とは，次の図式を可換にする写像芽 $\xi : (\mathbb{R}^n, 0) \to T\mathbb{R}^p$ のことであった，ただし $T\mathbb{R}^p$ は $\mathbb{R}^p$ の接束である．

$$\begin{tikzcd} & T\mathbb{R}^p \arrow[d] \\ (\mathbb{R}^n, 0) \arrow[ur, "\xi"] \arrow[r, "f"'] & (\mathbb{R}^p, 0) \end{tikzcd}$$

また，$f$ に沿った接ベクトル場全体を $\theta(f)$ という記号で表わしていたのであった．

$$\theta(f) = \{\xi \,|\, \xi \text{ は } f \text{ に沿った接ベクトル場 }\}$$

さらに，$id_p : (\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ を恒等写像芽としたとき，$\theta(id_p)$ のことを $\theta(p)$ と置いていて，$\theta(p) \ni \eta \mapsto \eta \circ f \in \theta(f)$ で定義される写像 $\theta(p) \to \theta(f)$ を $\omega f$ と書いていたのであった．さて，[24] の 495 ページには次の事実が書いてある（ただし，[24] では記号が異なるので注意が必要).

**事実 4**　$\theta(f)=\omega f(\theta(p))$ であることの必要十分条件は，$f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ がはめ込み芽であることである．

言い方を変えると，この事実 4 は「$f$ のリフトが $f$ と射影 $T\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ の切断との合成で常に表わせるのは，$f$ がはめ込み芽のときであり，そのときに限る」と言っているのである．そうすると，対偶をとれば，「$f$ と射影 $T\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ の切断との合成で表わすことのできないような $f$ のリフトが存在するのは，$f$ に特異点があるときであり，そのときに限る」と言うことになる（ただし，$n\le p$ を仮定した上でである）．

上記の事実を通して，レフェリー 1 が教えてくれた証明を眺めてみる．レフェリー 1 が教えてくれた二つの言い換えは，可換図式にすると次の二つである．

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^2\times S^1 \arrow[d, "\pi_2"] \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "(\exists\widetilde{f},\widetilde{\nu})"] \arrow[r, "(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})"'] & \mathbb{R}\times S^1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}\times T^*S^1 \arrow[d, "\pi_3"] \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "(\widetilde{\gamma},\exists\widetilde{\Omega})"] \arrow[r, "(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})"'] & \mathbb{R}\times S^1 \end{tikzcd}$$

「登場している二つのルジャンドルファイブレーションの間の写像 $\Psi$ が上記のように定義されていれば contactomorphism になる」というところは問題なさそうである．そうすると，気にすべきなのはこれらの言い換えの部分のようである．言い換えの部分を詳しく見てみるために，右の可換図式に登場しているファイブレーションの一部である

$$\begin{tikzcd} & T^*S^1 \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "\exists\widetilde{\Omega}"] \arrow[r, "\widetilde{\nu}"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

に着目してみよう．この可換図式は，復習したマザー理論の一部での可換図式の接束の部分が余接束になっただけのものであるので，$\widetilde{\nu}:(\mathbb{R},t_0)\to(S^1,\widetilde{\nu}(t_0))$ という写像芽に対し，

$$\begin{aligned} \theta^*(\widetilde{\nu}) &= \{\xi \mid \xi \text{ は } \widetilde{\nu} \text{ に沿った余接ベクトル場 }\} \\ \theta^*(1) &= \{\xi \mid \xi \text{ は } id_{S^1}:(S^1,\widetilde{\nu}(t_0))\to(S^1,\widetilde{\nu}(t_0)) \text{ に沿った余接ベクトル場 }\} \\ \omega^*\widetilde{\nu}(\xi) &= \xi\circ\widetilde{\nu} \quad (\xi\in\theta^*(1)) \end{aligned}$$

と置けば，復習したマザー理論の一部から，

**事実 5**　$\theta^*(\widetilde{\nu})=\omega^*\widetilde{\nu}(\theta^*(1))$ であることの必要十分条件は，$\widetilde{\nu}:(\mathbb{R},t_0)\to(S^1,\widetilde{\nu}(t_0))$ が非特異．

が成り立つことがわかる．だから，$\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ が特異点を持たない場合は，定義 15 における $\widetilde{\Omega}$ は必ず $\widetilde{\nu}$ と切断との合成で作れることになる（これは，$\mathbb{R}$ の変数 $t$ を $\Theta\circ\widetilde{\nu}(t)$ に置き換えることができる，と言っていることから従うことなので，マザー理論の一部などと言わなくても済むことではあるが）．定義 15 における $\widetilde{\Omega}$ の存在が示せれば，$\Psi$ が contactomorphism であることから定義 14 も成り立つことになり，従ってこの場合（すなわち，$\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ が非特異の場合）は主定理を接触幾何学的な標準的考察で証明できることがわかるだけでなく，定義 14 の意味での包絡線を必ず創造することもわかることになる．

他方，$\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ が特異点を持つ場合は，$\Theta\circ\widetilde{\nu}(t)$ は $t$ のような本物の独立変数ではなく偽りの変数でしかないだけでなく，事実 5 より特異点の周りでは $\widetilde{\nu}$ と切断との合成として表わせないリフトが沢山あることになる．しかし，これだけでは「定義 15 を満たすようなリフト $\widetilde{\Omega}$ が特異点の周りでは $\widetilde{\nu}$ と切断との合成として表わせない」とは言い切れない．そこで，ノート 5 を思い出してみる．

$$\widetilde{\nu}(t)=\frac{(-3t^2,1)}{\sqrt{1+9t^4}}=\left(\cos\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t),\sin\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t)\right)$$

であったので，$\cos\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right),\sin\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)$ はどちらも偶関数であることがわかる．従って，もしも $\widetilde{\Omega}(t)=\widetilde{\eta}\circ\widetilde{\nu}(t)$ を満たす切断 $\widetilde{\eta}:S^1\to T^*S^1$ が存在するのであれば，$\widetilde{\omega}$ は偶関数でなければならないことになる．他方，

$$d\widetilde{\gamma}=\frac{-t\left(1+3t^4\right)}{(1+9t^4)}d\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)$$

であったので，$\widetilde{\omega}(t)=\frac{-t\left(1+3t^4\right)}{(1+9t^4)}$ となり，$\widetilde{\omega}(t)$ は奇関数であることがわかる．よって，$\widetilde{\Omega}(t)=\widetilde{\eta}\circ\widetilde{\nu}(t)$ を満たす切断 $\widetilde{\eta}:S^1\to T^*S^1$ は存在しないことになる．これにより，$\widetilde{\Omega}$ は確かに $\omega^*\widetilde{\nu}(\theta^*(1))$ の補空間に含まれていることが確認できたことになる．従って，レフェリー 1 に示唆してもらった定義 15 の言い換えは（そして，二つの接触多様体の間の contactomorphism の存在は問題ないので，定義 14 の言い換えも），$\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ が特異点を持つ場合だと一般には正しくないことが明瞭にわかるようになり，ようやく安堵することができた次第であった．

# 4 【表示問題】

## 4.1 表示公式

【表示問題】とは包絡線の表示に関する問題であるから，与えられた直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ に対して包絡線が存在することは仮定されている．すなわち，定理 2 により，定義 15 における $\frac{d\widetilde{\gamma}}{dt}(t)=\widetilde{\omega}(t)\frac{d(\Theta\circ\widetilde{\nu})}{dt}(t)$ を満たす $\widetilde{\omega}(t)$ の存在を仮定したときの包絡線の表示問題なのである．$\widetilde{\omega}d\Theta$ はガウス写像 $\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ に沿った余接ベクトル場であるので，$t$ を固定した $\widetilde{\omega}(t)$ は 1 次元余接ベクトルの（符号付きの）長さ，すなわち単なる実数に過ぎない．そのことを頭の片隅に置いておいて，$T^*_{\widetilde{\nu}(t)}S^1$ と（$T_{\widetilde{\nu}(t)}\mathbb{R}^2$ の中の）$T_{\widetilde{\nu}(t)}S^1$ とを同一視にし，さらに $T_{\widetilde{\nu}(t)}\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}^2$ とを同一視して，$t$ を固定した $\widetilde{\omega}(t)d\Theta$ という 1 次元余接ベクトルを $\mathbb{R}^2$ 内の 2 次元ベクトルとして表わしてみると，

$$\widetilde{\omega}(t)\left(-\sin\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t),\cos\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t)\right)$$

と表わされるはずであることがわかる．ただし，$\widetilde{\nu}(t)=\left(\cos\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t),\sin\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t)\right)$ と置いている．包絡線の表示問題の解答は次の定理である．

**定理 3（[17] の Theorem 1(b)）** 平面内の直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ が定義 14 の意味での包絡線 $\widetilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ を持つとする．そのとき，$\widetilde{f}$ は以下のように表示される．ただし，$\widetilde{\nu}(t)=\left(\cos\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t),\sin\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t)\right)$ と置いており，$\widetilde{\omega}(t)$ は定義 15 に登場する $T^*_{\widetilde{\nu}(t)}S^1$ 内の余接ベクトルの（符号付きの）長さである．

$$\widetilde{f}(t)=\widetilde{\gamma}(t)\left(\cos\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t),\sin\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t)\right)+\widetilde{\omega}(t)\left(-\sin\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t),\cos\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t)\right).$$

## 4.2 例

**例 5** [17] の Example4.1(ｃ) では例 1 の直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ の包絡線が確かに $\widetilde{f}(t)=\left(t,t^3\right)$ というパラメータ表示を持つことを確認している．そこでの計算をここに再現してみる．ノート 5 で確認しているように

$$\widetilde{\omega}(t)=\frac{-t\left(1+3t^4\right)}{\sqrt{1+9t^4}}$$

である．また，

$$\widetilde{\gamma}(t)=\frac{-2t^3}{\sqrt{1+9t^4}},\quad \widetilde{\nu}(t)=\frac{\left(-3t^2,1\right)}{\sqrt{1+9t^4}}=\left(\cos\widetilde{\Theta}(t),\sin\widetilde{\Theta}(t)\right)$$

であった．ただし表示を簡潔にするため，$\widetilde{\Theta}(t)=\Theta\circ\widetilde{\nu}(t)$ と置いている．よって定理 3 より，

$$
\begin{aligned}
\widetilde{f}(t) &= \widetilde{\gamma}(t)\left(\cos\widetilde{\Theta}(t),\sin\widetilde{\Theta}(t)\right)+\widetilde{\omega}(t)\left(-\sin\widetilde{\Theta}(t),\cos\widetilde{\Theta}(t)\right)\\
&= \frac{-2t^3}{\sqrt{1+9t^4}}\frac{\left(-3t^2,1\right)}{\sqrt{1+9t^4}}+\frac{-t\left(1+3t^4\right)}{\sqrt{1+9t^4}}\frac{\left(-1,-3t^2\right)}{\sqrt{1+9t^4}}\\
&= \frac{\left(6t^5+t+3t^5,-2t^3+3t^3+9t^7\right)}{1+9t^4}\\
&= \frac{\left(t\left(1+9t^4\right),t^3\left(1+9t^4\right)\right)}{1+9t^4}\\
&= \left(t,t^3\right)
\end{aligned}
$$

となり，確かに包絡線 $E_2$ のパラメータ表示が得られていることがわかる．

読者の中には「たまたま，運よくいっただけなのでは」と訝しく思われる方もいらっしゃるかもしれない，と思い，もう一つダメ押しの例も与えておく．ダメ押しの例とは言っても，例 5 を一般化しただけに過ぎないのではあるが・・・．

**例 6** $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を 2 階微分可能な関数とする．一変数関数 $h$ のグラフ $t\mapsto(t,h(t))$ 上の点 $(t,h(t))$ における接線の方程式を，$\widetilde{\Theta}(t)=\Theta\circ\widetilde{\nu}(t)$ と置いて簡潔に表示することにして $X\cos\widetilde{\Theta}(t)+Y\sin\widetilde{\Theta}(t)=\widetilde{\gamma}(t)$ とおくと，

$$
\left(\cos\widetilde{\Theta}(t),\sin\widetilde{\Theta}(t)\right)=\frac{(-h'(t),1)}{\sqrt{1+\left(h'(t)\right)^2}},\quad \widetilde{\gamma}(t)=\frac{-th'(t)+h(t)}{\sqrt{1+\left(h'(t)\right)^2}}
$$

となる．これより，

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}'(t) &= \frac{-h'(t)-th"(t)+h'(t)}{\sqrt{1+\left(h'(t)\right)^2}}+\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(-th'(t)+h(t)\right)\left(2h'(t)h"(t)\right)}{\left(1+\left(h'(t)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{-th"(t)\left(1+\left(h'(t)\right)^2\right)-h'(t)h"(t)\left(-th'(t)+h(t)\right)}{\left(1+\left(h'(t)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{h"(t)\left(-t-t\left(h'(t)\right)^2+t\left(h'(t)\right)^2-h'(t)h(t)\right)}{\left(1+\left(h'(t)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{h"(t)\left(-t-h'(t)h(t)\right)}{\left(1+\left(h'(t)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

を得る．その一方で，$\sin \widetilde{\Theta}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+(h'(t))^2}}$ の両辺を $t$ で微分することにより

$$\left(\cos \widetilde{\Theta}(t)\right) \widetilde{\Theta}'(t) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(2h'(t)h"(t))}{\left(1+(h'(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

を得るので，これより

$$\widetilde{\Theta}'(t) = \frac{h"(t)}{1+(h(t))^2}$$

がわかる．よって，$\widetilde{\gamma}'(t) = \widetilde{\omega}(t)\widetilde{\Theta}'(t)$ を満たす $\widetilde{\omega}(t)$ は

$$\widetilde{\omega}(t) = \frac{-(t+h'(t)h(t))}{\sqrt{1+(h'(t))^2}}$$

であることがわかる．よって定理 3 より，

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(t) &= \widetilde{\gamma}(t)\left(\cos \widetilde{\Theta}(t),\ \sin \widetilde{\Theta}(t)\right) + \widetilde{\omega}(t)\left(-\sin \widetilde{\Theta}(t),\ \cos \widetilde{\Theta}(t)\right) \\
&= \frac{-th'(t)+h(t)}{\sqrt{1+(h'(t))^2}} \frac{(-h'(t),\ 1)}{\sqrt{1+(h'(t))^2}} + \frac{-(t+h'(t)h(t))}{\sqrt{1+(h'(t))^2}} \frac{(-1,\ -h'(t))}{\sqrt{1+(h'(t))^2}} \\
&= \frac{\left(t(h'(t))^2 - h(t)h'(t) + t + h'(t)h(t),\ -th'(t) + h(t) + th'(t) + (h'(t))^2 h(t)\right)}{1+(h'(t))^2} \\
&= \frac{\left(t\left(1+(h'(t))^2\right),\ h(t)\left(1+(h'(t))^2\right)\right)}{1+(h'(t))^2} \\
&= (t,\ h(t))
\end{aligned}$$

となり，確かに包絡線 $E_2$ のパラメータ表示が得られていることがわかるのである．さらに，$h$ は 2 階微分可能ということしか仮定していなかったが，上の計算を見ればたしかに 2 階微分可能という仮定だけで十分であることもわかる．

**ノート 9**　ここでの計算の途中に登場した $\widetilde{\Theta}'(t) = \frac{h"(t)}{1+(h(t))^2}$ より，

$$\text{接線族のガウス写像が非特異} \Leftrightarrow h"(t) \neq 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

がわかる．これにより，第 6.2 節で説明する（通常の）ルジャンドル変換は接線族のガウス写像が非特異であることを仮定していたことがわかる．第 6.2 節において復習する「（凸性を仮定する通常の）ルジャンドル変換は対合的 (involutive) であるのでその逆変換は自分自身」という良く知られている事実を思い出してみると，「ガウス写像が非特異な

場合に包絡線を求めることは，凸性を仮定する通常のルジャンドル変換の逆変換を実行することに他ならないので，そりゃあ容易に求まるはず」という思いに自然に達する．さらに，ルジャンドル変換を「2 階微分可能な関数のグラフの接線族への変換」と拡張して捉えることにする場合においても，その逆変換は可能であり例 6 のようにすればよい，ということにも自然に気づく．第 6.2 節において，「2 階微分可能な関数のグラフ」を（第 6.1 節で概説する）「フロンタル」に拡張し，ルジャンドル変換を「フロンタルの接線族への変換」と拡張して捉えることにしても，その逆変換は本稿での定理 3 で得られる，ということを概説する．

# 5 【一意性問題】

例 2 に似ている次の例を考える．

**例 7** $t \in \mathbb{R}$ に対し $\widetilde{\nu}(t) = (0,1), \widetilde{\gamma}(t) = 0$ と置く．ガウス写像は例 2 と全く同じであるが，高さ関数 $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が異なっているこの直線族はパラメータが動いても直線は全く動かない．そうすると，$t \mapsto (t, 0)$ や $t \mapsto (\cos t, 0)$, あるいは $t \mapsto (0, 0)$ など，定義 14 を満たす写像（すなわち，$E_2$ 包絡線）$\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は無数にあることは容易にわかる．定理 2 と定理 3 を使ってもっと詳しく調べてみる．任意の $t_0 \in \mathbb{R}$ においてどちらの 1-形式芽 $d\widetilde{\gamma}$, $d\left(\Theta \circ \widetilde{\nu}\right)$ も恒等的にゼロであるので，任意の関数芽 $\widetilde{\omega} : (\mathbb{R}, t_0) \to \mathbb{R}$ に対して，1-形式芽の恒等式

$$d\widetilde{\gamma} = \widetilde{\omega}(t) d\left(\Theta \circ \widetilde{\nu}\right)$$

が成立してしまう．よって，この直線族は創造的であることになり，定理 2 によりこの直線族は（定義 14 の意味での）包絡線を創造することがわかる．また，この直線族に対しては $\cos\left(\Theta \circ \widetilde{\nu}\right)(t) = 0,\ \sin\left(\Theta \circ \widetilde{\nu}\right)(t) = 1$ であるから，定理 3 により，包絡線のパラメータ表示は

$$\begin{aligned} &\widetilde{\gamma}(t)\left(\cos\left(\Theta \circ \widetilde{\nu}\right)(t),\ \sin\left(\Theta \circ \widetilde{\nu}\right)(t)\right) + \widetilde{\omega}(t)\left(-\sin\left(\Theta \circ \widetilde{\nu}\right)(t),\ \cos\left(\Theta \circ \widetilde{\nu}\right)(t)\right) \\ &= \left(-\widetilde{\omega}(t),\ 0\right) \end{aligned}$$

となる．すなわち，この直線族が創造する（定義 14 の意味での）包絡線がなす集合と関数 $\widetilde{\omega} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ がなす集合との間には自然な 1 対 1 対応があることになり，特に両者の濃度は等しいことがわかる．

例 7 のように同一の直線族であるものの，創造し得る包絡線が無数にあるような直線族も確かに存在するのである．「与えられた直線族が包絡線を創造するとする．そのとき，包

絡線が一意的であることの特徴づけを求めよ」という問題が【一意性問題】である．他の基本的な問題に対する解答と同様に，【一意性問題】に対する解答も以下のように簡潔で使いやすい．

**定理 4**（[17] の Theorem 2） 与えられた $\widetilde{\gamma}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と $\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ から作れる直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ が（定義 14 の意味での）包絡線を創造するとする．そのとき，包絡線が一意的であることの必要十分条件はガウス写像 $\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ の正則点の集合が $\mathbb{R}$ の中で稠密であることである．

# 6 関連する話題

平面内の直線族に限定しているとはいえ，包絡線は多くの場面に登場する重要な幾何学的対象であるので，関連する話題は多い．とはいえ，筆者の能力の問題もあり，筆者が言及できる話題は限られてくる．本節では，筆者が気づいた限りの関連する話題について触れておくことにする．

## 6.1 フロンタル

写像 $\widetilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ は，写像 $\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ が存在して

$$\frac{d\widetilde{f}}{dt}(t)\cdot\widetilde{\nu}(t)=0 \quad (\forall t\in\mathbb{R})$$

が成り立っているとき**フロンタル**と呼ばれ，写像 $\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ はフロンタル $\widetilde{f}$ の**ガウス写像**と呼ばれる．フロンタルの定義により，平面内の直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ が $E_2$ 包絡線を創造する場合，その包絡線はフロンタルであることがわかる．逆に，与えられたフロンタル $\widetilde{f}$ に対し，

$$\begin{aligned} L_t &= \left\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2 \mid (X,Y)\cdot\widetilde{\nu}(t)=\widetilde{\gamma}(t)\right\} \\ \mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})} &= \{L_t\}_{t\in\mathbb{R}} \end{aligned}$$

とおけば，$\widetilde{f}$ は直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ の $E_2$ 包絡線であることがわかる（ただし，$\widetilde{\gamma}(t)=\widetilde{f}(t)\cdot\widetilde{\nu}(t)$ と置いている）．従って，平面内の直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ が創造する包絡線とフロンタルとは同じ概念と言える．

その一方で，[11] を眺めればフロンタルは盛んに研究されているように見受けられるが，『平面内の直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ が創造する包絡線』と捉えて研究している文献は見当たらないように思える．本稿の内容を使ったフロンタルの研究が進展することを期待したい．

本稿の内容の使い方の一例をあげておく．与えられたフロンタル $\widetilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ に対して，$\widetilde{f}$ は直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ の包絡線であるから定義 15 での創造的条件

$$\frac{d\widetilde{\gamma}}{dt}(t)=\widetilde{\omega}(t)\frac{d\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)}{dt}(t)$$

を満たすような $\widetilde{\omega}(t)$ が存在することになる．この等式での $\widetilde{\gamma}(t)$ は $\widetilde{\gamma}(t)=\widetilde{f}(t)\cdot\widetilde{\nu}(t)$ と定義されているのであったが，この $\widetilde{\gamma}(t)$ に定数 $c$ を加えて，新しい高さ関数 $\widetilde{\gamma}_c$ を作ってみる．すなわち，$\widetilde{\gamma}_c(t)=\widetilde{\gamma}(t)+c$. すると，$c$ は定数であるから，同じガウス写像 $\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ と新しい高さ関数 $\widetilde{\gamma}_c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対しても，上と同じ $\widetilde{\omega}$ を使って

$$\frac{d\widetilde{\gamma}_c}{dt}(t)=\widetilde{\omega}(t)\frac{d\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)}{dt}(t)$$

という等式が当然成立する．従って，定理 3 により，直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma}_c,\widetilde{\nu})}$ の包絡線として得られるフロンタル $\widetilde{f}_c$ は

$$\begin{aligned}
&\widetilde{f}_c(t)\\
&=\widetilde{\gamma}_c(t)\left(\cos\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t),\sin\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t)\right)+\widetilde{\omega}(t)\left(-\sin\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t),\cos\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t)\right)\\
&=\left(\widetilde{\gamma}(t)+c\right)\left(\cos\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t),\sin\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t)\right)+\widetilde{\omega}(t)\left(-\sin\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t),\cos\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t)\right)\\
&=\widetilde{f}(t)+c\left(\cos\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t),\sin\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t)\right)
\end{aligned}$$

となって，$\widetilde{f}_c$ が $\widetilde{f}$ の平行曲線であることが表示式からも確認できる．さらに，$\widetilde{\omega}$ は $\widetilde{f}$ に対しても $\widetilde{f}_c$ に対しても全く同一であるので次を得る．

**命題 1**　(1)　任意の実数 $t,c$ に対し，$\widetilde{f}(t)$ と垂足曲線上の点 $\widetilde{\gamma}(t)\widetilde{\nu}(t)$（ただし，垂足点は原点としている）との（符号付きの）距離 $\widetilde{\omega}(t)$ と，平行曲線上の点 $\widetilde{f}_c(t)$ とその垂足曲線上の点 $\widetilde{\gamma}_c(t)\widetilde{\nu}(t)$（ただし，垂足点は原点としている）との（符号付きの）距離は常に等しい．

(2)　任意の閉区間 $[a,b]$ に対し，$M_{\widetilde{\omega}}=\max\{|\widetilde{\omega}(t)|\mid t\in[a,b]\}$, $M_{\widetilde{\gamma}}=\max\{|\widetilde{\gamma}(t)|\mid t\in[a,b]\}$, $M=\max\{M_{\widetilde{\omega}},M_{\widetilde{\omega}}\}$ とおく．そのとき，任意の正の実数 $\varepsilon$ に対し，$M$ よりも十分大きい正の実数 $C$ が存在し，任意の $t\in[a,b]$ と $C$ 以上の任意の実数 $c$ に対して次の不等式が成立する．

$$-\varepsilon<\frac{d\widetilde{f}_c}{dt}(t)\cdot\widetilde{f}_c(t)<\varepsilon.$$

命題 1 の (2) は，「$c$ を十分に大きくすれば，$\widetilde{f}_c$ の動きはほとんど（原点中心の）円上の動きと見做せる」ということを言っている．

## 6.2 凸性を仮定しないルジャンドル変換の逆

ルジャンドル変換は，解析力学や熱力学，あるいは数理経済学等，さまざまなところで登場する．現在ではルジャンドル変換は凸解析という大きな分野における基本的ツールとしてまとめられているように見受けられ，[1, 10, 19] 等の良書も多いこともあり，ルジャンドル変換はかなり普及している概念のようである．

その一方で，次の定義にあるように，ルジャンドル変換には**凸**という仮定がついていて，この仮定により**対合的**というルジャンドル変換の重要な性質が導かれ，逆変換も元のルジャンドル変換と同じ変換になるのであった．これらのことをざっと復習してみる．

**定義 16（[1] の §14 の A. 定義から引用）** $y = f(x)$ を凸関数：$f"(x) > 0$ とする．関数 $f$ の**ルジャンドル変換**とは，別の変数 $p$ の新しい関数 $g$ で，次の方法で作られる．

$(x, y)$ 平面上に関数 $f$ のグラフを描く．数 $p$ を与えたとする．直線 $y = px$ を考えよう．曲線が $y$ 軸と平行にこの直線からもっとも遠く離れる点を $x = x(p)$ とする．つまり，$p$ を固定するとき関数 $px - f(x) = F(p, x)$ は点 $x(p)$ において最大値をとる．このとき，$g(p) = F(p, x(p))$ とするのである．

点 $x(p)$ は極値条件：$\partial F/\partial x = 0$，つまり $f'(x) = p$ から定まる．$f$ は凸であるから，このような点 $x(p)$ はそれが存在すればただ 1 つである．

[1] の §14 の **C. 対合性**から引用　関数 $f(x)$ は必要な回数だけ微分可能であるとし，$f"(x) > 0$ とする．ルジャンドル変換は凸関数を凸関数に移すことが容易に分る．したがって変換をもう一度施してよい．

**定理 5（[1] の §14 の C. 対合性から引用）** ルジャンドル変換は対合的である．すなわち，その 2 乗は恒等変換に等しい．つまり，$f$ がルジャンドル変換により $g$ に移ると，$g$ のルジャンドル変換は $f$ である．

[1] にはこの定理の証明も載っている．その証明を見ると，$f"(x) > 0$ であること，つまりグラフの凸性が重要な役割を果たしていることがわかる．そもそも $f"(x) > 0$ という仮定があるからこそ，「ルジャンドル変換は凸関数を凸関数に移す」などということが言える．

さて，例 1 と同様に $f(x) = x^3$ とおいてみると $f"(x) = 6x$ であるから $f"(x) > 0$ は成り立たない．そうすると，定義 16 における「点 $x(p)$ は極値条件：$\partial F/\partial x = 0$，つまり $f'(x) = p$ から定まる」が嘘になる．実際，$f'(x) = 3x^2 = p$ $(p > 0)$ とすると，$x = \pm\sqrt{p}$ とな

り一意に定まらない．すなわち，定義 16 の意味のルジャンドル変換は $f(x) = x^3$ の場合は定義できないことになる．そこで，「定義 16 における $p$ は，接点 (x(p), f(x(p))) における接線の傾きである」，「定義 16 における $g(p)$ は，接点 (x(p), f(x(p))) における接線の $y$ 切片を逆符号にしたものである」と解釈し，「定義 16 で定義するルジャンドル変換とは，関数のグラフを接線族に対応させる対応のことである」と定義し直すことにする．このような新しい定義は，実際に，[1] の付録 4 や [13] の第 7 章 において，もっと洗練された形で与えられている．とりわけ [1] の付録 4 では**ルジャンドル対合**という概念も定義されているので，[1] の付録 4 での定義を例 1 の $f(x) = x^3$ に適用すれば逆変換が得られそうにも思えてくる．しかし，よくよく考えると逆変換が得られることの必要十分条件は定義 2 で与えられた創造的条件が成り立つことである，ということに気づく．

さて本稿は，2021 年 11 月 29 日〜12 月 1 日に Zoom 上で開催された RIMS 共同研究 (公開型) 研究集会『可微分写像の特異点論及びその応用』の報告集用の原稿である．その研究集会における筆者の講演はこのあたり（ルジャンドル変換とその周辺）に特化しており，本稿は講演内容を大幅に拡張して整理したものになっていると言える．筆が遅い筆者のことなので，このあたりに特化した内容を英文としてまとめた本論文は，本稿執筆時点では未だ計画中の段階である．

# 7　おわりに

タイトルにもあるように，本稿の主題は平面内の直線族が創造する包絡線であった．平面内の直線族が創造する包絡線に対しては，ガウス写像が非特異か特異点を持つかで，扱い方も結果も異なってくるということを本稿で概説した．以下にまとめておく．

## 7.1　ガウス写像が非特異の場合

まず【定義問題】に対しては，定理 1 と補題 1 より

$$\underline{\mathbf{E_1} = \mathbf{E_2} = \mathcal{D}}$$

が必ず成り立つ．つまり，第 2 節で登場している包絡線の三種類の定義 $E_1$, $E_2$ および $\mathcal{D}$ について，

<u>**包絡線の定義としてどれを選ぶべきか気にする必要はない**</u>

という状況である．

次に【存在問題】であるが，系 1 により

<u>**包絡線を常に創造する**</u>

という状況になっているので，【存在問題】も気にする必要はない，という状況になっている．

【表示問題】はどうであろうか？定理 3 での表示公式

$$\widetilde{f}(t)=\widetilde{\gamma}(t)\left(\cos\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t),\sin\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t)\right)+\widetilde{\omega}(t)\left(-\sin\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t),\cos\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t)\right)$$

における $\widetilde{\omega}(t)$ は，ガウス写像が非特異の場合は $\Theta\circ\widetilde{\nu}(t)$ を変数とした $S^1$ 上の関数として

$$\widetilde{\omega}(t)=\frac{d\left(\widetilde{\gamma}\circ\left(\widetilde{\nu}^{-1}\circ\Theta^{-1}\right)\right)}{d\Theta}(\Theta\circ\widetilde{\nu}(t))$$

という形に表わせる．つまり定義 15 における $\widetilde{\Omega}(t)$ は，余接束 $T^*S^1\to S^1$ の切断の $\widetilde{\nu}$ による引き戻しという形で表わせることになる．すなわちレフェリー 1 に教えてもらったように

<u>**接触幾何学の標準的考察により表示公式を得ることができる**</u>

という状況になっているわけである．非特異なガウス写像の特別な場合として $\Theta\circ\widetilde{\nu}(t)=t$ となる場合，つまり，$\Theta\circ\widetilde{\nu}$ が恒等写像になっている場合がある．この場合の包絡線は

$$\widetilde{f}(t)=\widetilde{\gamma}(t)\left(\cos\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t),\sin\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t)\right)+\frac{d\widetilde{\gamma}}{dt}(t)\left(-\sin\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t),\cos\left(\Theta\circ\widetilde{\nu}\right)(t)\right)$$

と表わされ，[9] に与えられているカーン：ホフマンのベクトル公式（の曲線版）が得られることがわかる．要するに，包絡線の表示公式はカーン：ホフマンのベクトル公式（の曲線版）の自然な一般化になっているのである．

最後に【一意性問題】を見てみよう．非特異なガウス写像には，「非特異」の定義により，特異点がない．だから，非特異なガウス写像の正則点の集合は，当然，$\mathbb{R}$ の中で稠密である．従って，定理 4 から，

<u>**包絡線は一意的**</u>

という状況であることがわかる．

このような状況は高次元でも同様である．すなわち，$\mathbb{R}^{n+1}$ における超平面族に対しても，ガウス写像が非特異である場合は，

<u>**包絡超曲面は必ず一意的に創造され，その特異点の研究にはルジャンドル特異点論が有効**</u>

と言うことができる．

以上のように，ガウス写像が非特異な場合の包絡超曲面は，敢えて例えて言うなれば，上質の現代的インフラが高度に整備されている桃源郷のようなものと言えるのかもしれない．桃源郷には人を惹きつける魅力があるようで，超平面族を完全解の集合とし包絡超曲面を特異解とするクレロー方程式を扱った [12] や [20] をはじめ，ガウス写像が非特異である場合の包絡超曲面の研究結果と見做せる文献は数多い．

## 7.2 ガウス写像が特異点を持つ場合

この場合はいろいろなことが起こり得て煩雑になってしまうが，【定義問題】,【存在問題】,【表示問題】,【一意性問題】の各問題別にまとめておく．

まず【定義問題】に対して．事実 1 と定理 1 より $E_1 = E_2 \subset \mathcal{D}$ は常に成り立っていて，例 1 のように $E_1 = E_2$ は $\mathcal{D}$ の真部分集合になっているという例が確かにあるものの，$E_1 = E_2 = \mathcal{D}$ となる例は見つからない．実際，補題 1 の証明ほぼそのままで次の補題 2 の証明になりえるので，そのような例はあり得ないことがわかる．

**補題 2** 平面内における直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ が包絡線を創造し，ガウス写像 $\widetilde{\nu}$ が特異点を持つとする．そのとき，

$$\underline{\mathbf{E_1} = \mathbf{E_2} \subsetneqq \mathcal{D}}$$

という関係が必ず成り立っている．

さて，第 2 節で確認したように，多くの文献では

<u>**包絡線の定義として $E_2$ を採用する**</u>

という方針が取られているのであった．また，本稿同様，文献 [17] もその方針のもとで書かれているのであった．直線族のみでなく曲線族にまで考察の対象を拡げると $E_1 \neq \emptyset, E_2 = \emptyset$ となる例があることを思い出しつつ，歴史に忠実に従って包絡線を定義しようとすれば，この方針は合点がいく方針と思われるし，補題 2 を考慮すれば猶更納得できるような気になるのは筆者だけであろうか？

次に【存在問題】に対して．平面内における直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ のガウス写像 $\widetilde{\nu}$ が特異点を持つ場合は，例 1 の場合のように $E_2$ 包絡線を創造する場合もあれば，例 2 の場合のように創造しない場合もあり得る．平面内における直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})}$ が $E_2$ 包絡線を創造するや否やに関する判定条件は定義 15 で与えられている「創造的条件」である．すなわち，

$\underline{d\widetilde{\gamma} = \widetilde{\omega}(t) d\left(\Theta \circ \widetilde{\nu}\right)}$ **を満たす** $\widetilde{\omega}(t)$ **が存在することが判定条件**

である．

三番目に【表示問題】について．【表示問題】という問題では，包絡線の存在は仮定されている．すなわち，$d\widetilde{\gamma} = \widetilde{\omega}(t) d\left(\Theta \circ \widetilde{\nu}\right)$ を満たす $\widetilde{\omega}(t)$ が存在することは仮定されている場合の問題である．【表示問題】の解答である包絡線のパラメータ表示 $\widetilde{f}(t)$ は，定理 3 において，$\widetilde{\gamma}(t)$, $\widetilde{\nu}(t)$, $\widetilde{\omega}(t)$ を使った以下の形で与えられている．

$$\underline{\widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{t}) = \widetilde{\gamma}(\mathbf{t}) \left(\cos\left(\boldsymbol{\Theta} \circ \widetilde{\nu}\right)(\mathbf{t}), \sin\left(\boldsymbol{\Theta} \circ \widetilde{\nu}\right)(\mathbf{t})\right) + \widetilde{\omega}(\mathbf{t}) \left(-\sin\left(\boldsymbol{\Theta} \circ \widetilde{\nu}\right)(\mathbf{t}), \cos\left(\boldsymbol{\Theta} \circ \widetilde{\nu}\right)(\mathbf{t})\right)}.$$

ノート 8 において,「例 1 に対する $\widetilde{\omega}(t)$ はガウス写像 $\widetilde{\nu}$ と $S^1$ 上の関数との合成では表わせない」ということが説明してあるが,「このようなことは常に言えるのでは？」と思われるかもしれない．しかし,「常に」を「ガウス写像が特異点を持ち包絡線を創造する任意の直線族に対して」という意味に解釈すると，以下のように簡単な反例がすぐみつかる．

**例 8**　孤立した特異点を持っている写像 $\widetilde{\nu} : \mathbb{R} \to S^1$ に対し，$\widetilde{\gamma}(t) = c$（定数）とおくと，直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu})}$ は包絡線を創造する．この直線族に対しては $\widetilde{\omega}(t) \equiv 0$ となる．$S^1$ 上の関数 $\eta : S^1 \to \mathbb{R}$ を $\eta(\cos\Theta, \sin\Theta) = 0$ で定義すれば,

$$\widetilde{\omega} = \eta \circ \widetilde{\nu}$$

が成り立つ．さらに, 実定数 $c$ に対して $\widetilde{\gamma}(t) = c\widetilde{\Theta}(t)$（ここに, $\widetilde{\nu}(t) = (\cos\widetilde{\Theta}(t), \sin\widetilde{\Theta}(t))$）とおくと $\widetilde{\omega}(t) \equiv c$ となり，$S^1$ 上の関数 $\eta : S^1 \to \mathbb{R}$ を $\eta(\cos\Theta, \sin\Theta) = c$ で定義すれば,

$$\widetilde{\omega} = \eta \circ \widetilde{\nu}$$

が成り立つこともすぐわかる．

もう少し考察を進めると，$S^1$ 上の関数 $\eta : S^1 \to \mathbb{R}$ が定数関数でない関数で反例が構成できる場合が沢山あることにも気づく．

他方,「常に」を「ガウス写像が特異点を持つような 1 変数関数 $Y = h(X)$ のグラフの接線族に対して」という意味だとすると，例 6 で得られている $\widetilde{\nu}$ と $\widetilde{\omega}$ の具体的な表示式対し，それらをガウス写像の特異点においてテーラー展開してみれば，$\widetilde{\omega}(t)$ はガウス写像 $\widetilde{\nu}$ と $S^1$ 上の関数との合成では表わせないことがわかる．従って，ガウス写像が特異点を持つような 1 変数関数 $Y = h(X)$ のグラフの接線族に対しては，残念ながら,

**接触幾何学的考察では元のグラフのパラメータ表示を得ることはできない**

という状況になっているのである．

最後に【一意性問題】について．【一意性問題】の解答は定理 4 で与えられているが，定理 4 では包絡線の存在を仮定していた．包絡線が存在するための必要十分条件は定理 2 で与えられていたわけだが，ガウス写像 $\widetilde{\nu}$ と $\widetilde{\gamma}$ の関係という形で与えられていた．他方，定理 4 における必要十分条件はガウス写像 $\widetilde{\nu}$ のみで記述されていた．また，ガウス写像が特異点を持たなければ包絡線は必ず存在することは既に確認済みであり，ガウス写像が特異点を持たないということは正則点しかないわけだから定理 4 により包絡線は一意的であることがわかる．そうすると，次が気になってくる．

**問題 1**　特異点を持つが正則点の集合が稠密であるような写像 $\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ が与えられたとする．そのとき，直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma}_1,\widetilde{\nu})}$ は包絡線を創造するが，直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma}_2,\widetilde{\nu})}$ は包絡線を創造しないような，二つの関数 $\widetilde{\gamma}_1,\widetilde{\gamma}_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は必ず存在するのだろうか？

この問題は定理 2 を使うことにより容易に解け次を得る．

**補題 3**　写像 $\widetilde{\nu}:\mathbb{R}\to S^1$ は $t=t_0$ を特異点に持ち，正則点の集合が稠密であるとする．そのとき，$\widetilde{\gamma}_1(t)=c$（定数）とおくと直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma}_1,\widetilde{\nu})}$ は包絡線を創造する．また，$\widetilde{\gamma}_2(t)=t$ とおくと直線族 $\mathcal{L}_{(\widetilde{\gamma}_2,\widetilde{\nu})}$ は包絡線を創造しない．

さて，これで気になることはなくなったので，ガウス写像が特異点を持ち直線族が包絡線を創造する場合のまとめをしよう．この場合は，定理 4 により，包絡線が一意的に存在する場合も非加算無限個存在する場合もあり得ることがわかる．従って，ガウス写像が特異点を持つ場合の【一意性問題】のまとめとしては，以下のように，定理 4 そのものにならざるを得ない．有終の美とは言い難いような「まとめ」になってしまい恐縮であるが，筆者の文才のなさによるものとご理解いただきご容赦願いたい．

**直線族が包絡線を創造すれば，包絡線が一意的 $\Leftrightarrow$ ガウス写像の正則点の集合が稠密．**

# 謝辞

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.
また，高橋雅朋氏から本稿に関連する内容をいろいろ教えていただいたおかげで本稿を改良することができた．高橋氏に感謝する．

# 参考文献


[1] V. I. アーノルド著 安藤韶一・蟹江幸博・丹羽敏雄訳：**古典力学の数学的方法**, 岩波書店，1980.

[2] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps I*, Monographs in Mathematics **82**, Birkhäuser, Boston Basel Stuttgart, 1985. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3940-6

[3] J. W. Bruce and P. J. Giblin, *What is an envelope?*, Math. Gazette, **65** (1981), 186–192. https://doi.org/10.2307/3617131

[4] J. W. Bruce and P. J. Giblin, *Curves and Singularities* second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1992. https://doi.org/10.1017/CBO9781139172615

[5] P. J. Giblin, *Private communications*, 2021 年 9 月.

[6] 福田拓生・西村尚史: **特異点と分岐**, 特異点の数理第 2 巻, 共立出版, 2002 年.

[7] 福井敏純：**曲線と曲面の基礎・基本**, 理工系数学の基礎・基本⑮, 牧野書店, 2015 年.

[8] E. ハイラー・G. ヴァンナー著 蟹江幸博訳：*Analysis by Its History* **解析教程 上**, 丸善出版，2012 年.

[9] D. W. Hoffman and J. W. Cahn, *A vector thermodynamics for anisotropic surfaces*, Surface Science, **31** (1972), 368–388. https://doi.org/10.1016/0039-6028(72)90268-3

[10] L. Hörmander, *Notions of Convexity*, Progress in Mathematics **127**, Birkhäuser Boston, 1994. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4585-4

[11] G. Ishikawa, *Singularities of frontals*, Adv. Stud. Pure Math., **78**, 55–106, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2018. https://doi.org/10.2969/aspm/07810055

[12] S. Izumiya, *On Clairaut-type equations*, Publ. Math. Debrecen, **45** (1994), 159-–166.

[13] 泉屋周一・石川剛郎：**応用特異点論**，共立出版，1998 年.

[14] 泉屋周一・佐野貴志・佐伯 修・佐久間一浩：**幾何学と特異点**，特異点の数理 第 1 巻，共立出版，2001 年.

[15] S. Janeczko and T. Nishimura, *Anti-orthotomics of frontals and their applications*, J Math Anal Appl, **487**(2020), 124019. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124019

[16] 小林昭七：**接続の微分幾何学とゲージ理論**，裳華房，1989 年.

[17] T. Nishimura, *Hyperplane families creating envelopes*, Nonlinearity, **35** (2022),

2587. https://doi.org/10.1088/1361-6544/ac61a0

[18] 小沢哲也：**曲線 幾何学の小径**，培風館，2005 年.

[19] R. Tyrrell Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Landmarks in Mathematics and Physics **11**, Princeton University Press, 1996. https://doi.org/10.1515/9781400873173

[20] K. Saji and M. Takahashi, *Singularities of Singular Solutions of First-Order Differential Equations of Clairaut Type*, J Dyn Control Syst **28** (2020), 19–41. https://doi.org/10.1007/s10883-020-09511-4

[21] 高木貞治：**解析概論 改訂第三版 軽装版**，岩波書店，1983 年.

[22] 梅原雅顕・佐治健太郎・山田光太郎：**特異点を持つ曲線と曲面の微分幾何学**，現代数学シリーズ 第 19 巻，丸善出版，2017 年.

[23] 梅原雅顕・山田光太郎：**曲線と曲面–微分幾何的アプローチ–改訂版**, 裳華房, 2015 年.

[24] C.T.C. Wall, *Finite determinacy of smooth map germs*, Bull. London Math. Soc., **13** (1981), 481–539. https://doi.org/10.1112/blms/13.6.481

[25] Wikipedia, ”envelope (mathematics)”で検索，2022 年 5 月 21 日.

[26] ウィキペディア，『包絡線』で検索，2022 年 5 月 21 日.