# 合流性とZ性について

群馬大学理工学府　赤坂 陸来 *
Riku Akasaka
Department of Computer Science,
Gunma University

群馬大学理工学府　藤田 憲悦 †
Ken-etsu Fujita
Department of Computer Science,
Gunma University

名古屋大学大学院情報学研究科 中澤 巧爾
Koji Nakazawa
Graduate School of Informatics
Nagoya University

## 1　はじめに

抽象書き換え系には合流性や停止性などの重要な性質が存在する．合流性を証明する手段として, Z 性とよばれる性質を利用したものが知られている．本論文は, 前半では Z 性を中心とした基本概念の相互関係にについて, V. van Oostrom[1] にしたがって調査したものを述べる．後半では Z 性を拡張した合成的 Z 定理について, Honda, Y., K. Nakazawa, and K. Fujita[2] より例を用いて紹介する．

## 2　準備

本節では, 抽象書き換え系と例として用いる $\lambda$ 計算について, 本論文で使用する記号を含め定義を述べる．

### 2.1　抽象書き換え系

抽象書き換え系は, 任意の集合 $A$ と $A$ 上の二項関係 $\to$ の対 $(A, \to)$ である． $a, b, c, \ldots$ を集合 $A$ の要素とし, $(a, b) \in \to$ のとき, $a \to b$ と表し $a$ から $b$ への簡約という．$a \to b$ を満たすような $b$ が存在しないとき $a$ は正規形であるという．$\to$ の反射推移閉包を $\twoheadrightarrow$, 推移閉包を $\to^+$ と表す．

### 2.2　簡約列

抽象書き換え系 $(A, \to)$ が与えられたとき, $a_0 \to a_1 \to a_2 \to \ldots$ のような有限もしくは無限列を $\to$ についての簡約列という．とくに, $a, b \in A$ について, $a$ から始まる簡約列を $a$ の簡約列, $a$ から始まって $b$ で終わる簡約列を $a$ から $b$ の簡約列という．また, $\sigma : a \twoheadrightarrow b$ と表記するとき $\sigma$ は $a$ から $b$ の任意の簡約列を示す．

* 本研究は京都大学数理解析研究所の助成を受けたものである．
† 本研究の一部は KAKENHI(C)20K03711 の援助を受けたものである．

## 2.3 $\lambda$ 計算

### 2.3.1 $\lambda$ 項

$\Lambda$を$\lambda$ 項の集合とし, 以下のように定義する.

**定義 1** ($\lambda$項)

1. 変数 $x, y, z, \ldots$ は$\lambda$項である.
2. $M$ が $\lambda$ 項であり, $x$ が変数のとき $(\lambda x.M)$ は $\lambda$ 項である.
3. $M, N$ が$\lambda$項のとき $(MN)$ は$\lambda$項である.

$(\lambda x.M)$ という形を関数抽象, $(MN)$ という形を関数適用という. また, 関数抽象 $(\lambda x.M)$ の $M$ の中に変数 $x$ 現れたとき，$x$ は束縛されているという. 束縛されている変数のことを束縛変数と呼び，束縛されていない変数を自由変数と呼ぶ. $\lambda$項 $M$ に含まれる自由変数の集合を $FV(M)$ と表す.

### 2.3.2 $\beta$ 簡約 ($\rightarrow_\beta$)

$(\lambda x.M)N$ という形の $\lambda$ 項を $M[x := N]$ に書き換えることを $\beta$ 簡約と言い, $M$ を $\beta$ 簡約して $M'$ を得るとき $M \rightarrow_\beta M'$ と表記する. $\beta$ 簡約の反射推移閉包を $\twoheadrightarrow_\beta$, 推移閉包を $\rightarrow_\beta^+$ と表す. $(\lambda x.M)N$ という形の項を $\beta$ 基 ($\beta$-*redex*) と言い，$\beta$ 基を含まない $\lambda$ 項 (それ以上 $\beta$ 簡約できない $\lambda$ 項) を $\beta$ 正規形という.

また, $(\Lambda, \rightarrow_\beta)$ の同値関係を $=_\beta$ で表し以下のように定義する.

**定義 2** ($\rightarrow_\beta$ の同値関係)

1. $M \twoheadrightarrow_\beta N$ ならば $M =_\beta N$
2. $M =_\beta N$ ならば $N =_\beta M$
3. $M =_\beta N$ かつ $N =_\beta L$ ならば $M =_\beta L$

# 3 抽象書き換え系に関する性質

## 3.1 合流性と $Church$-$Rosser$ の定理

**定義 3** (合流性)
抽象書き換え系 $(A, \rightarrow)$ について, 以下の性質を満たすとき $(A, \rightarrow)$ は合流性をもつという.

$$\forall a, a_1, a_2 \in A,\ a \twoheadrightarrow a_1 \text{かつ}\ a \twoheadrightarrow a_2 \implies \exists a_3 \in A,\ a_1 \twoheadrightarrow a_3 \text{かつ}\ a_2 \twoheadrightarrow a_3$$

合流性はラムダ計算において成立し, 関連した性質として Church-Rosser の定理が成立する.

**定理 4** ($(\Lambda, \rightarrow_\beta)$ の合流性)

$$\forall M, M_1, M_2 \in \Lambda,\ M \twoheadrightarrow_\beta M_1 \text{かつ}\ M \twoheadrightarrow_\beta M_2 \implies \exists M_3 \in \Lambda,\ M_1 \twoheadrightarrow_\beta M_3 \text{かつ}\ M_2 \twoheadrightarrow_\beta M_3$$

**定理 5** ($Church$-$Rosser$ の定理)

$$\forall M, N \in \Lambda,\ M =_\beta N \implies \exists L \in \Lambda,\ M \twoheadrightarrow_\beta L \text{ かつ } N \twoheadrightarrow_\beta L$$

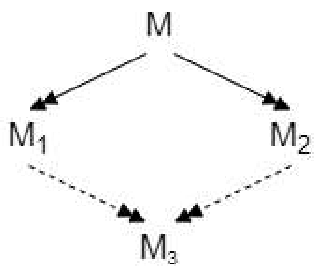



図 1: $(\Lambda, \rightarrow_\beta)$ の合流性

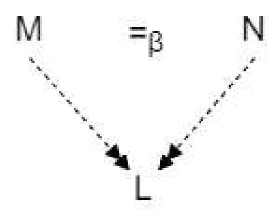



図 2: Church-Rosser の定理

$(\Lambda, \rightarrow_\beta)$ が定理 4 を満たすことを $(\Lambda, \rightarrow_\beta)$ は CR 性をもつという.

**定理 6** 合流性と *Church-Rosser* の定理について, 以下のことが言える.

$$(\Lambda, \rightarrow_\beta) \text{ が合流性をもつ } \iff (\Lambda, \rightarrow_\beta) \text{ が } CR \text{ 性をもつ}$$

証明
$(\Longrightarrow)$
$=_\beta$ の定義に沿った帰納法により証明する.

1. $M =_\beta N$ が $M \twoheadrightarrow_\beta N$ から定義されるとき：
$M \twoheadrightarrow_\beta N$, $N \twoheadrightarrow_\beta N$ より成立する.
2. $M =_\beta N$ が $N =_\beta M$ から定義されるとき：
帰納法の定義から, ある $L$ が存在し, $N \twoheadrightarrow_\beta L$, $M \twoheadrightarrow_\beta L$ となる.
3. $M =_\beta N$ が $M =_\beta N', N' =_\beta N$ から定義されるとき：
帰納法の定義から, ある $M_1, M_2$ が存在し, それぞれ $M \twoheadrightarrow_\beta M_1$かつ $N' \twoheadrightarrow_\beta M_1$, $N' \twoheadrightarrow_\beta M_2$かつ $N \twoheadrightarrow_\beta M_2$ となる. さらに合流性より, ある $M_3$ が存在し, $M_1 \twoheadrightarrow_\beta M_3$かつ $M_2 \twoheadrightarrow_\beta M_3$ となる. つまり $M \twoheadrightarrow_\beta M_3$, $N \twoheadrightarrow_\beta M_3$となる $M_3$が存在する.

$(\Longleftarrow)$
任意の $M, M_1, M_2$ に対して, $M \twoheadrightarrow_\beta M_1$, $M \twoheadrightarrow_\beta M_2$ を仮定する. $=_\beta$ の定義より $M_1 =_\beta M_2$ である. 定理 5 より, $M_1 \twoheadrightarrow_\beta M_3$, $M_2 \twoheadrightarrow_\beta M_3$となる $M_3$が存在する.

□

## 3.2 *Triangle-property*

**定義 7** $(Triange\text{-}property)$
抽象書き換え系 $(A, \rightarrow)$ と $A$ 上の写像 $f$ について, 以下の性質を満たすとき関係 $\rightarrow$ は *Triangle-property* をもつという.

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について, } a \rightarrow b \implies b \rightarrow f(a)$$

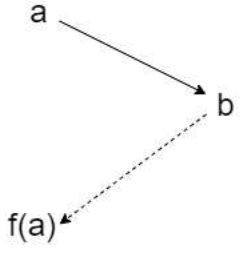



図 3: *Triangle-property*

**例題 8** ($(\Lambda, \to_\beta)$ における *Triangle-property*)
$(\Lambda, \to_\beta)$ について, 並行簡約という二項関係と写像 $*$(*complete-development*) を定義する.

**定義 *9*** (並行簡約 $\Rrightarrow_\beta$)

1. $x \Rrightarrow_\beta x$
2. $M \Rrightarrow_\beta M'$ならば$\lambda x.M \Rrightarrow_\beta \lambda x.M'$
3. $M \Rrightarrow_\beta M'$かつ $N \Rrightarrow_\beta N'$ならば $(MN) \Rrightarrow_\beta (M'N')$
4. $M \Rrightarrow_\beta M'$かつ $N \Rrightarrow_\beta N'$ならば $(\lambda x.M)N \Rrightarrow_\beta M'[x := N']$

**定義 *10*** (写像 $*$ (*complete-development*))

1. $x^* = x$
2. $(\lambda x.M)^* = \lambda x.M^*$
3. $((\lambda x.M)N)^* = M^*[x := N^*]$
4. $(LN)^* = L^*N^*$ (ただし $L$ は関数抽象以外の$\lambda$項)

$\forall M \in \Lambda$ について, 並行簡約は $M$ の中に存在する $\beta$基 を任意の数同時に簡約できる関係であり, 写像 $*$ は $M$ の中の $\beta$基 をすべて簡約した $\lambda$ 項を返すような写像である. また, $\Rrightarrow_\beta$ は $\to_\beta \subset \Rrightarrow_\beta \subset \twoheadrightarrow_\beta$ といった大小関係となる. 並行簡約と写像 $*$ を定義することで次の命題が成り立つことが分かる.

$$\text{任意の } M, N \in \Lambda \text{について, } M \Rrightarrow_\beta N \implies N \Rrightarrow_\beta M^*$$

つまり, 並行簡約 $\Rrightarrow_\beta$ は *Triangle-property* を満たす.

## 3.3 *Cofinality*

**定義 11** (戦略)
抽象書き換え系 $(A, \to)$ において, 戦略 $F$ とは次の性質を満たす $A$ から $A$ への写像である.

1. $a \equiv F(a)$　　$a$ が正規形である場合
2. $a \to^+ F(a)$　　その他

$a$ が正規形でないとき, $a$ から $F(a)$ を求める際, $a \to F(a)$ のとき $F$ は 1 ステップ戦略, $a \to^+ F(a)$ のとき $F$ は多ステップ戦略と呼ぶ.

**定義 12** ($\to_F$)
抽象書き換え系 $(A, \to)$ と戦略 $F$ があり, $a \to^+ F(a)$ のとき, $a \to_F F(a)$ と書く.

**定義 13** (*Cofinality*)
戦略 $F$ が以下の性質を満たすとき戦略 $F$ は *cofinal* である.

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について, } a \to b \implies \text{ある } n(\geq 1) \text{ が存在し, } b \twoheadrightarrow F^n(a)$$

**定義 14** (*Hyper-Cofinality*)
任意の $a, b \in A$ と $A$ 上の戦略 $F$ について, 最終的には常に簡約 $\to_F$ を含む $a$ の任意の簡約列を$\sigma$ とする. 以下の性質を満たすとき, 戦略 $F$ は *hyper-cofinal* である.

$$a \twoheadrightarrow b \implies \sigma\text{上の } c \text{ が存在し}, b \twoheadrightarrow c$$

### 3.4 Z 性

**定義 15** ($Z$ 性)[*1*] 抽象書き換え系 $(A, \to)$ について, 次の性質を満たす $A$ 上の写像 $f$ が存在するとき, 写像 $f$ は $Z$ 性を満たすという.

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について, } a \to b \implies b \twoheadrightarrow f(a) \twoheadrightarrow f(b)$$

**例題 16** ($(\Lambda, \to_\beta)$ における $Z$ 性)
$(\Lambda, \to_\beta)$ について, *3.2* 節で導入した写像 $*$ は $Z$ 性を満たす写像である. つまり, 次の命題が成り立つ.

$$\text{任意の } M, N \in \Lambda \text{について, } M \to_\beta N \implies N \twoheadrightarrow_\beta M^* \twoheadrightarrow_\beta N^*$$

証明
$M$ の構造に関する帰納法により $M \to_\beta N \implies N \twoheadrightarrow_\beta M^* \twoheadrightarrow_\beta N^*$ を証明する.

*1.* $M$ が関数抽象 $(\lambda x.M_1)$ のとき :
$M = \lambda x.M_1 \to_\beta \lambda x.N_1 = N$ と仮定すると, 帰納法の仮定より, $N_1 \twoheadrightarrow_\beta M_1^* \twoheadrightarrow_\beta N_1^*$ となる. 従って, $\lambda x.N_1 \twoheadrightarrow_\beta \lambda x.M_1^*(= (\lambda x.M_1)^*) \twoheadrightarrow_\beta \lambda x.N_1^*(= (\lambda x.N_1)^*)$ である.

*2.* $M$ が関数適用 $M_1 M_2$のとき :

**2-1** $M_1 M_2 = (\lambda x.M_0)M_2 \to_\beta M_0[x := M_2] = N$ の場合 :
$N = M_0[x := M_2] \twoheadrightarrow_\beta M_0^*[x := M_2^*](= ((\lambda x.M_0)M_2)^* = M^*) \twoheadrightarrow_\beta M_0[x := M_2]^* = N^*$ となる.

**2-2** $M = M_1 M_2 \to_\beta N_1 N_2 = N$ の場合 :
$M_1 \to_\beta N_1(M_2 = N_2)$ もしくは $M_2 \to_\beta N_2(M_1 = N_1)$ となる. それぞれの場合において帰納法の仮定より, $N_i \twoheadrightarrow_\beta M_i^* \twoheadrightarrow_\beta N_i^*(i = 1, 2)$ である. $M_1$が関数抽象で $M_1^* = \lambda x.M_0'$ であれば, $M_0' \twoheadrightarrow_\beta N_0'$となる $N_0'$について $N_1^* = \lambda x.N_0'$となる. よって,

$$\begin{aligned} N_1 N_2 &\twoheadrightarrow_\beta M_1^* M_2^* = M_0'[x := M_2^*] \\ &\to_\beta M_0'[x := M_2^*] \ (= (M_1 M_2)^*) \\ &\twoheadrightarrow_\beta N_0'[x := N_2^*] \ (= (N_1 N_2)^*) \end{aligned}$$

その他の場合, $N_1 N_2 \twoheadrightarrow_\beta M_1^* M_2^* \twoheadrightarrow_\beta N_1^* N_2^*$となる. $N_1$が関数抽象で $N_1^* = \lambda x.N_0'$ のとき, $N_1^* N_2^* = (\lambda x.N_0')N_2^* \to N_1'[x := N_2^*] = (N_1 N_2)^*$ である. それ以外は $N_1^* N_2^* = (N_1 N_2)^*$となる.

□

## 4 相互関係

本節では, 3 節で挙げた 5 つの概念について, それらの相互関係を述べる.

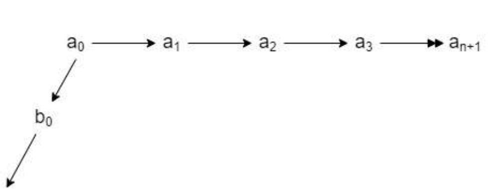
### 4.1 $Z$ 性と合流性

$Z$ 性と合流性について次のことが成立する.

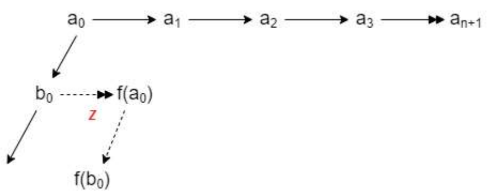
**定理 17** ($Z$ 定理)
抽象書き換え系 $(A, \to)$ と $A$ 上の写像 $f$ が与えられたとき,

$$\text{写像 } f \text{ が } Z \text{ 性を満たす} \implies (A, \to) \text{ は合流性をもつ}$$

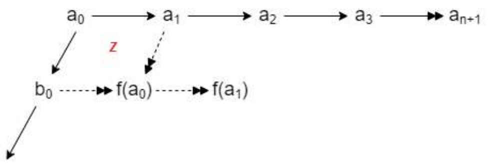
証明
$a \in A$ から分岐した任意の項について, $Z$ 性を帰納的に用いることで下図のように示すことができる.



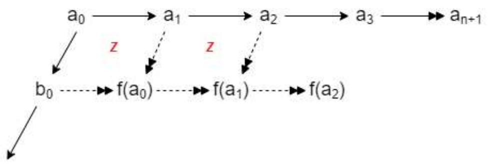

i



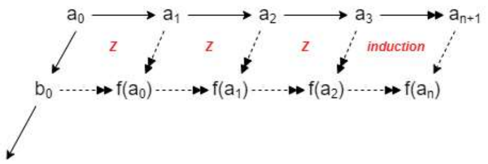

ii



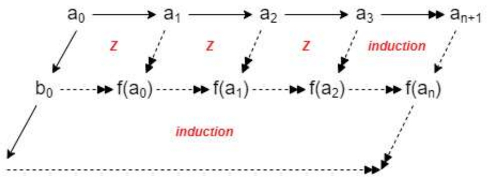

iii




iv




v




vi

□

## 4.2 $Z$ 性と *Cofinality*

$Z$ 性と *Cofinality* について次のことが成立する.

**定理 18**
抽象書き換え系 $(A, \to)$ と $A$ 上の写像 $f$ が与えられたとき,

$$\text{写像 } f \text{ が } Z \text{ 性を満たす} \implies \text{戦略 } f \text{ は } cofinal \text{ である}$$

証明
$a$ の簡約列上の任意の項 $b_n$ について, ある $k$ が存在し, $b_n \twoheadrightarrow f^k(a)$ となればよい. $Z$ 性より $a \to b_0 \to b_1$ のとき, $b_0 \twoheadrightarrow f^1(a)$, $b_1 \twoheadrightarrow f^1(b_0)$ である. $b_0 \twoheadrightarrow f^1(a)$ なので $Z$ 性より, $f^1(b_0) \twoheadrightarrow f^2(a)$ となる. 同様に考えると, $a$ の簡約列上の任意の項 $b_n$ について $b_n \twoheadrightarrow f^k(a)$ となる.

□

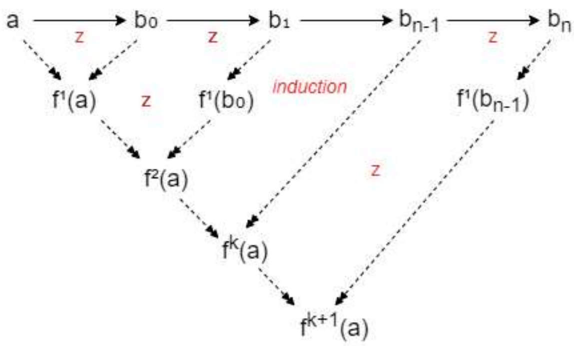



図 4: $Z$ 性 $\implies$ *Cofinality*

### 4.3 「$Z$ 性 $\Longleftarrow$ 合流性」,「$Z$ 性 $\Longleftarrow$ *Cofinality*」の反例

以下のような項書き換えは, $Z$ 性 $\Longleftarrow$ 合流性, $Z$ 性 $\Longleftarrow$ *Cofinality* の反例となる.

- $i \to i+1$ $(\forall i \in \mathbb{Z})$
- $-(n+1) \to n+1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

証明
$Z$ 性を満たす写像 $*$ が存在すると仮定する. $0^* = n$ $(n > 0)$ であり, 書き換え規則より, $-(n+1) \twoheadrightarrow 0$, $-(n+1) \to n+1$ となるので, それぞれ Z 性より, $-(n+1)^* \twoheadrightarrow 0^*$, $n+1 \twoheadrightarrow -(n+1)^*$ である. つまり, $n+1 \twoheadrightarrow 0^* = n$ となり, 書き換え規則に矛盾する.

□

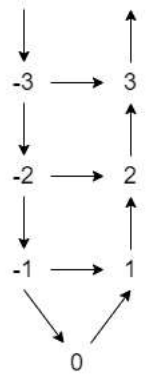



図 5: 「$Z$ 性 $\Longleftarrow$ 合流性」,「$Z$ 性 $\Longleftarrow$ *Cofinality*」の反例

### 4.4 $Z$ 性と *Hyper-Cofinality*

$Z$ 性と *Hyper-Cofinality* について次のことが成立する.

**定理 19**
抽象書き換え系 $(A, \to)$ と $A$ 上の写像 $f$ が与えられたとき,

写像 $f$ が $Z$ 性を満たす $\Longrightarrow$ 戦略 $f$ は *hyper-cofinal* である

証明
$a \to b$ となる任意の $a, b \in A$ と, 最終的には常に簡約 $\to_f$ を含むような $a$ の簡約列 $\sigma$ が与えられたときに, $\sigma$ に合流する $b$ の簡約列$\delta$ が存在することを示す. $\sigma$ は正規形で終わるか, $a$ から $c$ の簡約列$\sigma_1$ と, $c \to_f f(c)$ と, $f(c)$ の簡約列$\sigma_2$ に分けられる. $a \to b$, $a \twoheadrightarrow c$ なので, それぞれ Z 性より $b \twoheadrightarrow f(a)$, $f(a) \twoheadrightarrow f(c)$ である. つまり, $c \twoheadrightarrow d \twoheadrightarrow f(c)$ となる $d$ が存在し, $\delta_1 : b \twoheadrightarrow d$ が考えられる. $c$ が正規形の場合, $\delta := \delta_1$ とし, その他の場合, $\delta_1$ と $c \twoheadrightarrow f(c)$ と $\sigma_2$ を合わせたものを $\delta$ とすることで $\delta$ は $\sigma$ に合流する $b$ の簡約列である.

□

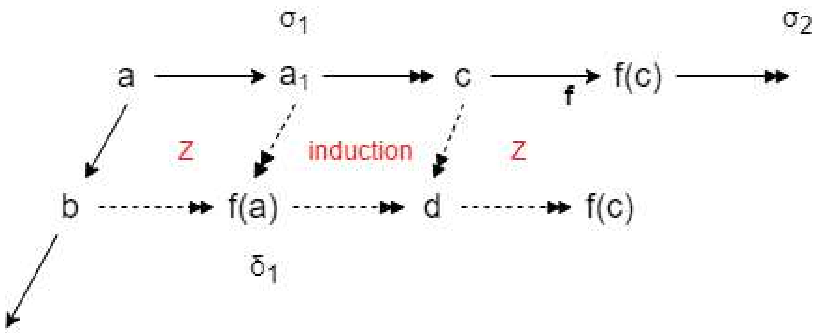



図 6: $Z$ 性 $\implies$ *Hyper-Cofinality*

## 4.5 $Z$ 性と *Triangle-property*

$Z$ 性と *Triangle-property* について次のことが成立する.

**定理 20**
抽象書き換え系 $(A, \rightarrow)$ と $A$ 上の写像 $f$ が与えられたとき,

写像 $f$ が $Z$ 性を満たす

$$\Updownarrow$$

ある関係 $\rightarrow_t$ が存在し,次の性質を満たす.

**T1.** $\rightarrow \subseteq \rightarrow_t \subseteq \twoheadrightarrow$

**T2.** $a \rightarrow_t b \implies b \rightarrow_t f(a)$

証明
$(\implies)$
$a \twoheadrightarrow b \twoheadrightarrow f(a)$ のとき, $a \rightarrow_t b$ と定義する. $\rightarrow_t$ が T1, T2 を満たすことを示す.

**(T1)** $a \rightarrow b$ ならば Z 性より, $a \rightarrow b \twoheadrightarrow f(a)$ である. よって $\rightarrow \subseteq \rightarrow_t$ である. $a \rightarrow_t b$ ならば, 明らかに $a \twoheadrightarrow b$ である. よって $\rightarrow_t \subseteq \twoheadrightarrow$ である. 以上より, $\rightarrow \subseteq \rightarrow_t \subseteq \twoheadrightarrow$ の関係が得られる.

**(T2)** $a \rightarrow_t b$ と仮定すると $\rightarrow_t$ の定義から $a \twoheadrightarrow b \twoheadrightarrow f(a)$ となり, Z 性より $f(a) \twoheadrightarrow f(b)$ である. $b \twoheadrightarrow f(a) \twoheadrightarrow f(b)$ となるので $\rightarrow_t$ の定義から $b \rightarrow_t f(a)$ である. 従って, $a \rightarrow_t b$ ならば $b \rightarrow_t f(a)$ となり T2 が成り立つ.

$(\impliedby)$
$a \rightarrow b$ を仮定すると, T1, T2 より $a \rightarrow_t b \rightarrow_t f(a)$ となる. $b \rightarrow_t f(a)$ なので T2 より, $b \rightarrow_t f(a) \rightarrow_t f(b)$ となる. T1 より, $b \twoheadrightarrow f(a) \twoheadrightarrow f(b)$ である. 従って, $a \rightarrow b$ ならば $b \twoheadrightarrow f(a) \twoheadrightarrow f(b)$ となり, $Z$ 性が示された.

□

## 4.6 合流性と *Cofinality*

合流性と *Cofinality* について次のことが成立する.

**定理 21**
抽象書き換え系 $(A, \rightarrow)$ と $A$ 上の写像 $F$ が与えられたとき,

戦略 $F$ が *cofinal* $\implies$ $(A, \rightarrow)$ は合流性をもつ.

証明
$a_1 \twoheadleftarrow a \twoheadrightarrow a_2$ となる任意の $a, a_1, a_2 \in A$ について．戦略 $F$ は *cofinal* なので，ある $n, m$ が存在し，$a_1 \twoheadrightarrow F^n(a)$ かつ $a_2 \twoheadrightarrow F^m(a)$ となる．$k = max(n, m)$ とすると，$F^n(a) \twoheadrightarrow F^k(a) \twoheadleftarrow F^m(a)$ である．従って，$a_1 \twoheadrightarrow F^k(a) \twoheadleftarrow a_2$ となり合流性が成立する．

□

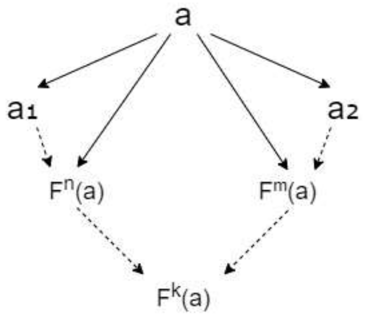



図 7: 合流性 $\Longrightarrow$ *Cofinality*

## 5　合成的 $Z$ 定理

### 5.1　弱 $Z$ 性

**定義 22** (弱 $Z$ 性)
抽象書き換え系 $(A, \rightarrow)$ について，$\rightarrow_\times$ を $A$ 上の関係とし，その反射推移閉包を $\twoheadrightarrow_\times$ とする．次の性質を満たす $A$ 上の写像 $f$ が存在するとき，写像 $f$ は弱 $Z$ 性を満たすという．

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について，} a \rightarrow b \implies b \twoheadrightarrow_\times f(a) \twoheadrightarrow_\times f(b)$$

### 5.2　合成的 Z 定理

**定理 23** (合成的 $Z$ 定理)[*2*]
抽象書き換え系 $(A, \rightarrow)$ について，$\rightarrow = \rightarrow_1 \cup \rightarrow_2$ とする．次の性質を満たす $A$ 上の写像 $f_1, f_2$ が存在するとき，合成写像 $f_2 \circ f_1$ は $Z$ 性を満たす．

1. $\rightarrow_1$ について，$f_1$ が $Z$ 性を満たす．
2. $a \rightarrow_1 b$ となるとき $f_2(a) \twoheadrightarrow f_2(a)$ である．
3. 任意の $a \in Im(f_1)$ について，$a \twoheadrightarrow f_2(a)$ である．
4. $\rightarrow_2$ について，$f_2 \circ f_1$ が弱 $Z$ 性を満たす．

図 8 が上の性質を図示したものであり，合成写像 $f_2 \circ f_1$ が Z 性を満たすことが確認できる．

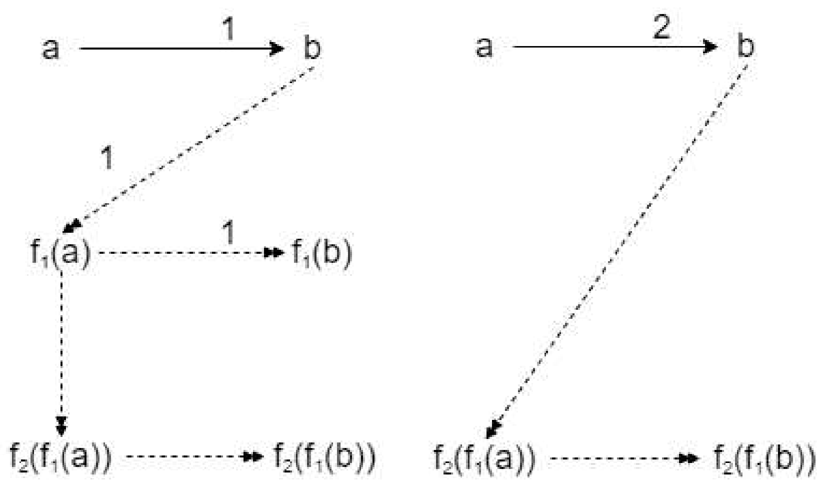



図 8: 合成的 Z 定理

**例題 24** ($\lambda\mu$計算) [*2*]
以下のような項と簡約規則からなる $\lambda\mu$計算 の体系を定義する.

**定義** ***25*** ($\lambda\mu$計算)
項： $M ::= x \mid (\lambda x.M) \mid (MM) \mid (\mu\alpha.M) \mid ([\alpha]M)$

簡約規則：

*1.* $(\lambda x.M)N \to_\beta M[x := N]$

*2.* $(\mu\alpha.M)N \to_S M[[\alpha]w := [\alpha](wN)]$

*3.* $[\alpha](\mu\beta.M) \to_R M[\beta := \alpha]$

*4.* $\mu\alpha.[\alpha]M \to_{\mu\eta} M \ (\alpha \notin FV(M))$

この体系で $Z$ 性をみたす写像を求めるとき, 例題 *16* と同様に考えて, どれかの簡約規則を優先させる写像を考えたとしても $Z$ 性を満たさない. そこで, $\to_1 = \to_{\mu\eta}$, $\to_2 = \to_\beta \cup \to_S \cup \to_R$ として, 以下のような写像 $*^1, *^2$ を与える. すると, 写像 $*^1, *^2$ が合成的 $Z$ の性質を満たし, 合成写像 $*^2 \circ *^1$ が $Z$ 性を満たすことが分かり, 上の体系の合流性が示せる.

**定義** ***26*** (写像$*^1$)

*1.* $x^{*^1} = x$

*2.* $(\lambda x.M)^{*^1} = \lambda x.M^{*^1}$

*3.* $(MN)^{*^1} = (M^{*^1}N^{*^1})$

*4.* $(\mu\alpha.[\alpha]M)^{*^1} = M^{*^1} \ (\alpha \notin FV(M))$

*5.* $(\mu\alpha.M)^{*^1} = \mu\alpha.M^{*^1}$

*6.* $([\alpha]M)^{*^1} = [\alpha]M^{*^1}$

**定義** ***27*** (写像$*^2$)

*1.* $x^{*^2} = x$

*2.* $(\lambda x.M)^{*^2} = \lambda x.M^{*^2}$

3. $((\lambda x.M)N)^{*^2} = M^{*^2}[x := N^{*^2}]$

4. $((\mu\alpha.M)N)^{*^2} = \mu\alpha.M^{*^2}[[\alpha]w := [\alpha](wN^{*^2})]$

5. $(MN)^{*^2} = (M^{*^2}N^{*^2})$

6. $(\mu\alpha.M)^{*^2} = \mu\alpha.M^{*^2}$

7. $([\alpha](\mu\beta.M)N)^{*^2} = M^{*^2}[[\beta]w := [\alpha](wN^{*^2})]$

8. $([\alpha]M)^{*^2} = [\alpha]M^{*^2}$

## 6 まとめ

文献 [1] [5] に従って, 相互関係を図 9 のように整理することができる. また, $Z$ 性を拡張した合成的 $Z$ 定理では, 簡約規則が複数ある体系で $Z$ 性を満たす写像が直接与えることが出来なくても, 簡約規則を分けて考えることで Z 性を満たす写像について考えることができる.

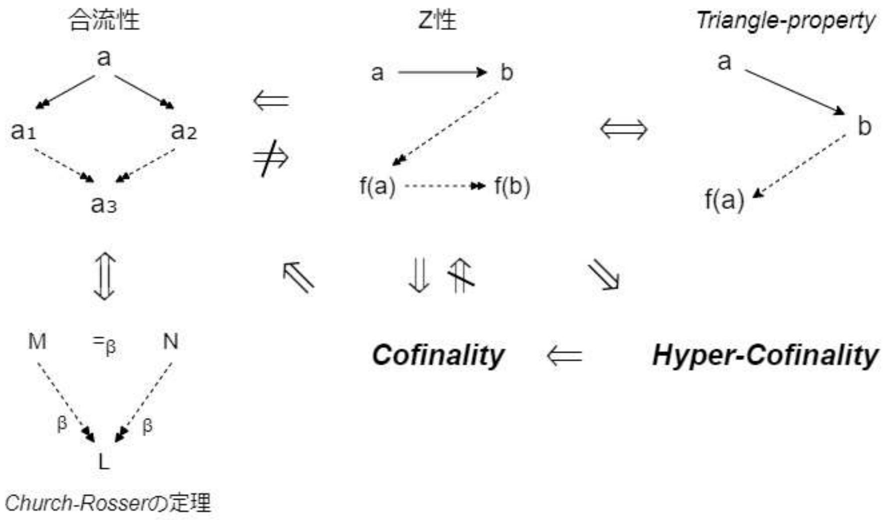



図 9: 5 つの概念の相互関係

参考文献

[1] V. van Oostrom, Z; Syntax-Free Developments, 6th International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD 2021) Article No.24 pp.24:1-24:22, 2021.

[2] Honda, Y., K. Nakazawa, and K. Fujita, Confluence Proofs of Lambda-Mu-Calculi by Z Theorem, Studia Logica 109:917-936, 2021.

[3] Komori, Y., N. Matsuda, and F. Yamakawa, A simplified proof of the Church-Rosser theorem, Studia Logica 102(1):175-183, 2013.

[4] Nakazawa, K., and K. Fujita, Compositional Z: Confluence proofs for permutative conversion, Studia Logica 104:1205-1224, 2016.

[5] Terse, Term Rewriting System, Volume 55 of Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, Cambridge University Press, 2003.