量子モジュラー形式と Seifert 多様体に対する homological block の保型変換則

松坂俊輝 *（九州大学数理学研究院）

Toshiki Matsusaka
Faculty of Mathematics, Kyushu University
matsusaka@math.kyushu-u.ac.jp

q 級数と一言で言っても，その特徴は千差万別である．例えば 2 つの q 級数

$$P(q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)^2(1-q^2)^2\cdots(1-q^n)^2} = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + \cdots$$

$$f_3(q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1+q)^2(1+q^2)^2\cdots(1+q^n)^2} = 1 + q - 2q^2 + 3q^3 - 3q^4 + 3q^5 + \cdots.$$

は非常に似通った表示によって定義されている．前者は分割数の母関数であり，$q^{1/24}\eta(\tau)^{-1}$ とも表示され，($q^{1/24}$ を無視すれば）重さ $-1/2$ の保型形式となることが知られている．その研究は非常に長い歴史を持ち，例えば Dedekind による保型変換則の研究 [20] や，Hardy–Ramanujan による漸近挙動に関する研究 [28] など，挙げればきりがないほどである．一方で後者の級数は Ramanujan のモックテータ関数と呼ばれる対象で，仮に $q^{1/24}$ などで割ったとしても保型形式のような良い変換則は満たさない（Watson [60] による）．そのためか，このモックテータ関数は 1920 年に姿を現してから暫くの間，あまり積極的に研究されてこなかったようにも見える．

転機となったのは 2002 年の S. Zwegers [65, 66] の登場であろう．彼は Appell–Lerch 和および不定値テータ関数，有理型 Jacobi 形式の理論の開拓に挑み，非正則である適当な修正項を加えることでモックテータ関数を（非正則な）保型形式にできることを発見した．これを契機として，Ramanujan のモックテータ関数を含む実に多様な q 級数が改めて注目されるようになり，保型形式との関わりの中で活発に研究されるようになってきたのである．以来この 20 年間の q 級数を取り巻く研究は，千変万化の様相を呈している．

さて，本稿は 2022 年 1 月 27 日 RIMS にて行った講演 “Modular transformation formulas for homological blocks” の報告記事であり，寺嶋氏と行った共同研究 [45] に基づいている．主題となるのは Rogers [56] に端を発する「偽テータ関数」，Witten [61]，Reshetikhin–Turaev [54] によって導入された「量子不変量」，そしてそれに由来して Zagier [64] によって導入された「量子モジュラー形式」であり，当研究の結果を一言で述べると「Homological block（WRT 関数）と呼ばれる新たな q 級数の保型変換則を得た」ということになる．本稿の構成は以下の通りとする：前半では「量子モジュラー形式」に関するサーベイを行う．ここでは特に話題を限定せず，Zagier [64] が取り上げている内容の一部およびその後の発展について簡単にまとめたい．そして後半において共同研究 [45] の内容について紹介することにする．

1 量子モジュラー形式

Zagier [64] によると，量子モジュラー形式とは，摂動的場の量子論に現れるような対象と同様の雰囲気を持ち，結び目や 3 次元多様体の量子不変量に由来するような，新しいタイプの保型形式的な関数である．便利のために一つ定義を固定しようとすれば，以下のように定めることができる．

Definition 1.1 ([13, Definition 21.1])**.** ある集合 $S \subset \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ に対し，関数 $f : \mathbb{Q} \cup \{i\infty\} \setminus S \to \mathbb{C}$ が $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$,（multiplier system ε を持つ）**量子モジュラー形式**であるとは，各 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ に対して定まる関数

$$h_\gamma(x) := f(x) - \varepsilon^{-1}(\gamma)(cx+d)^{-k} f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$$

*Supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP20K14292 and JP21K18141.

が $\mathbb{R}$ のある開集合上の実解析的関数（状況に応じて適切な連続性が課される）に延長されることをいう．

以下では，Zagier が取り上げている量子モジュラー形式の具体例の幾つかと，それら具体例のその後の進展を眺めることで，その気持ちを理解することを目指す．以下，任意の複素数 a と $|q|<1$ および整数 n に対し，**q-Pochhammer 記号**を $(a;q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty}(1-aq^n)$ および $(a;q)_n = (a;q)_\infty/(aq^n;q)_\infty$ で定める．

1.1 Ramanujan の σ 関数とモックテータ関数の差異

1 つ目の例は，Ramanujan の Lost Notebook [7] に登場する関数

$$\sigma(q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(-q;q)_n} = 1 + q - q^2 + 2q^3 - 2q^4 + q^5 + \cdots,$$

および，Anderws–Dyson–Hickerson [9] によって導入された $\sigma(q)$ と対をなす関数

$$\sigma^*(q) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2}}{(q;q^2)_n} = -2q - 2q^2 - 2q^3 + 2q^7 + 2q^8 + \cdots$$

である．例えば Ramanujan によって次の等式が知られている（証明は Andrews [7] による）．

$$\sigma(q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} q^n (q;q)_{n-1}, \tag{1.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big((-q;q)_\infty - (-q;q)_n \Big) = (-q;q)_\infty \left(-\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^n} \right) + \frac{1}{2}\sigma(q), \tag{1.2}$$

この表示 (1.1) を見るだけでも，最初に紹介した 2 つの q 級数 $P(q), f_3(q)$ との大きな違いを読み取ることができる．まず関数 $P(q)$ は本質的に Dedekind のエータ関数であり，各カスプにおいて極を持つことが知られている（つまり，$q \to \zeta$ と 1 の冪根に近づけるときに，$P(q)$ が発散する）．次に，それに類して導入されたモックテータ関数の一つの特徴付けが，次の 3 条件であったことを思い出そう．

Definition 1.2 ([66, Chapter 4] および [13, Definition 9.1])**.** q 級数 $F(q)$ が次の条件を満たすとき，Ramanujan の意味での**モックテータ関数**であるという．

(i) 次を満たす 1 の冪根 ζ が無限個存在する：q を半径に沿って ζ へ近づけるときに，$F(q)$ が発散する．

(ii) 各 1 の冪根 ζ に対し，弱正則モジュラー形式 $M_\zeta(q)$ と $\alpha_\zeta \in \mathbb{Q}$ が存在して，次が成り立つ．

$$F(q) - q^{\alpha_\zeta} M_\zeta(q) = O(1) \quad (q \to \zeta).$$

(iii) 任意の ζ に対して条件 (ii) を満たすような，単一の弱正則モジュラー形式 M は存在しない．

Ramanujan が最後の手紙 [8, Section 14] で観察し Watson [60] が示しているように，もしくは上の特徴付けが示唆するように，$f_3(q)$ も $P(q)$ と同様に無数のカスプにおいて極を持つ（またそれこそがモックテータ関数の一つの特徴でもある）．

Remark 1.3. Zagier [63] の意味でのモックモジュラー形式（調和 Maass 形式の正則部分，特に Ramanujan のモックテータ関数）が Definition 1.2 の条件 (iii) を満たすことは，2013 年に Griffin–Ono–Rolen [25] によって示された．一方で，Definition 1.2 の 3 条件を満たしていても，モックモジュラー形式，すなわち，調和 Maass 形式の正則部分でないような関数が存在することが Rhoades [55] によって確かめられている．

一方で $\sigma(q)$ の表示 (1.1) においては，$q=\zeta$ において右辺の和が有限和となるため，関数 $\sigma(q)$ は各カスプにおいて（計算可能な）有限値を取る．この意味で，関数 $\sigma(q)$ は $P(q)$ や $f_3(q)$ と異なる特徴を持つ関数であると言える．また偶数位数を持つ 1 の冪根 ζ に対して，(1.2) の極限 $q \to \zeta$ を考えると，

$$\sigma(\zeta) = -2\sum_{n=0}^{\infty} (-\zeta;\zeta)_n \tag{1.3}$$

という等式も得られる．これは Section 1.5 で紹介する “strange identity” の手本となるような等式である．

1.2 σ 関数の量子モジュラー性

関数 $\sigma^*(q)$ についても (1.1) と同様の表示

$$\sigma^*(q) = -2\sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1}(q^2;q^2)_n$$

が Cohen [19] によって示されており，さらに次の主張が成り立つ．

Lemma 1.4 ([64])**.** 1 の冪根 ζ に対し，$\sigma(\zeta) = -\sigma^*(\zeta^{-1})$ が成り立つ．

この「カスプで有限値を取る」という特徴を用いて，関数 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ を $f(x) = e^{\pi i x/12}\sigma(e^{2\pi i x}) = -e^{\pi i x/12}\sigma^*(e^{-2\pi i x})$ で定めるとき，Zagier [64] は次のことを観察し，証明している．

Proposition 1.5. $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ で生成される部分群とするとき，関数 $f(x)$ は Γ に関する重さ 1 の量子モジュラー形式である．特に $f(x+1) - e^{\pi i/12}f(x) = 0$ であり，関数

$$h(x) := \frac{1}{2x+1} f\left(\frac{x}{2x+1}\right) - e^{\pi i/12} f(x)$$

は $x = -1/2$ を除いて $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数に延長される．

次の図は Zagier [64] によるものである．$f(x)$ がてんでんばらばらな値を取る一方で，コサイクル $h(x)$ は非常に滑らかに振る舞うことが観察できる．この不思議な現象は，Definition 1.1 のような量子モジュラー形式の定義を考える一つの動機であるといえよう．

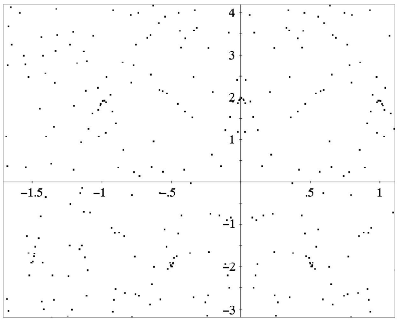


Figure 1. Graph of $\Re(f(x))$

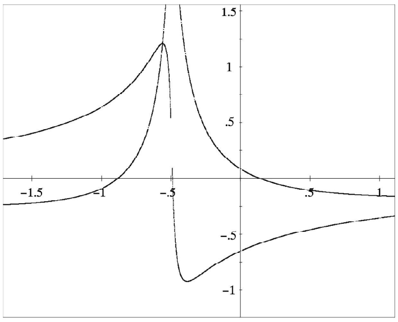


Figure 2. Graph of $\Re(h(x))$ and $\Im(h(x))$

Figure 1: 左図は $f(x)$ の実部に関するプロット，右図は $h(x)$ の実部と虚部のプロット．共に，$x \in [-1.7, 1.1]$ の範囲で，分母が 100 以下の有理数に対して値をプロットしている．

1.3 σ 関数と偽不定値テータ関数

この $\sigma(q)$ について，もう少しだけ研究を紹介したい．Andrews–Dyson–Hickerson [9] と Cohen [19] は関数 $\sigma(q)$ と $\sigma^*(q)$ の係数について研究を行なっている．鍵となるとは，次の偽不定値テータ関数表示である．

$$\sigma(q) = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ |j| \leq n}} (-1)^{n+j} q^{\frac{n(3n+1)}{2} - j^2}(1 - q^{2n+1}), \tag{1.4}$$

$$\sigma^*(q) = 2 \sum_{\substack{n \geq 0 \\ 2j \geq 3n+1}} (-1)^{n+j} q^{j^2 - \frac{n(3n+1)}{2}}(1 + q^{2(j-n)}). \tag{1.5}$$

これは [9, Section 4] のように q 級数の変形を用いて直接的に示すこともできるが，ここでは Bailey の補題を用いたより一般的な証明の概略を紹介したい．

Lemma 1.6 ([11])**.** 複素数列 $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n, (\gamma_n)_n, (\delta_n)_n, (u_n)_n, (v_n)_n$ が

$$\beta_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_{n-k} v_{n+k}, \qquad \gamma_n = \sum_{k=n}^{\infty} \delta_k u_{k-n} v_{k+n}$$

を満た（し，かつ以下の証明中の和の順序交換ができるような適切な収束性を満た）すとき，次が成り立つ．

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \gamma_n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta_n.$$

Proof. 直接計算により，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \gamma_n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sum_{k=n}^{\infty} \delta_k u_{k-n} v_{k+n} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \sum_{n=0}^{k} \alpha_n u_{k-n} v_{k+n} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \delta_k$$

の成立が分かる． □

Lemma 1.6 で $u_n = 1/(q;q)_n, v_n = 1/(aq;q)_n$（$a \in \mathbb{C}$）と取るとき，数列 $\alpha = (\alpha_n)_n, \dots, \delta = (\delta_n)_n$ は

$$\beta_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{(q;q)_{n-k}(aq;q)_{n+k}}, \qquad \gamma_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\delta_k}{(q;q)_{k-n}(aq;q)_{k+n}} \tag{1.6}$$

を満たす．この数列の組 (α, β)，(γ, δ) のことをそれぞれ（a に関する）**Bailey 対**，**共役 Bailey 対**と呼ぶ．例えば複素数 $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{C}$ と非負整数 $N \geq 0$ に対し，

$$\gamma_n = \frac{(aq/\rho_1;q)_N(aq/\rho_2;q)_N}{(aq;q)_N(qa/\rho_1\rho_2;q)_N} \frac{(-1)^n(\rho_1;q)_n(\rho_2;q)_n(q^{-N};q)_n}{(aq/\rho_1;q)_n(aq/\rho_2;q)_n(aq^{N+1};q)_n} \left(\frac{aq}{\rho_1\rho_2}\right)^n q^{nN-\frac{n(n-1)}{2}},$$
$$\delta_n = \frac{(\rho_1;q)_n(\rho_2;q)_n(q^{-N};q)_n q^n}{(\rho_1\rho_2 q^{-N}/a;q)_n}$$

は共役 Bailey 対をなすことが知られている．ここで $n > N$ のとき，$\gamma_n = \delta_n = 0$ となることに注意する．これは q-超幾何級数 ${}_3\phi_2$ に関する q-Pfaff–Saalschütz 和 ([23, (II.12)], [3, (3.3.12)])

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n(b;q)_n(q^{-N};q)_n q^n}{(q;q)_n(c;q)_n(abq^{1-N}/c;q)_n} = \frac{(c/a;q)_N(c/b;q)_N}{(c;q)_N(c/ab;q)_N}$$

を用いることで簡単に示される．この共役 Bailey 対 (γ, δ) に対し Lemma 1.6 を適用することで次を得る．

Theorem 1.7 (Bailey の補題 [4])**.** *Bailey* 対 (α, β) に対し，

$$\alpha'_n = \frac{(\rho_1;q)_n(\rho_2;q)_n \left(\frac{aq}{\rho_1\rho_2}\right)^n}{(aq/\rho_1;q)_n(aq/\rho_2;q)_n} \alpha_n,$$
$$\beta'_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{(\rho_1;q)_j(\rho_2;q)_j(aq/\rho_1\rho_2;q)_{n-j} \left(\frac{aq}{\rho_1\rho_2}\right)^j}{(q;q)_{n-j}(aq/\rho_1;q)_n(aq/\rho_2;q)_n} \beta_j$$

とおくと，この (α', β') もまた *Bailey* 対をなす．すなわち，次の等式が成り立つ．

$$\beta'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha'_k}{(q;q)_{n-k}(aq;q)_{n+k}}. \tag{1.7}$$

これは (1.7) の右辺に α'_k の定義を代入して計算し，上で与えた共役 Bailey 対 (γ, δ) に対して Lemma 1.6 を適用することで確かめられる．Theorem 1.7 の詳しい証明については [6, Section 3] を見ると良い．

Bailey の補題によると，Bailey 対 (α, β) を一つ見つけるたびに 2 つの和の間の等式が得られ，そして新たな Bailey 対 (α', β') が手に入る．Bailey [11] のアイデアは，適切な Bailey 対を見出すことで，Rogers–Ramanujan 恒等式の（ある種の動的な）証明を行う，というものであった．実際どのように適用されるかというと，Theorem 1.7 において，$a = 1, n, \rho_1, \rho_2 \to \infty$ とするとき，

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{(\rho;q)_j}{\rho^j} = \lim_{\rho \to \infty} \frac{(1-\rho)(1-\rho q)\cdots(1-\rho q^{j-1})}{\rho^j} = (-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}}$$

に注意すると，Bailey 対 (α, β) を与えるたびに，等式

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^{j^2}\beta_j = \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2}\alpha_k \tag{1.8}$$

および新たな Bailey 対

$$\alpha'_n = q^{n^2}\alpha_n, \qquad \beta'_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{q^{j^2}}{(q;q)_{n-j}}\beta_j \tag{1.9}$$

が得られる．例えば数列 $(\beta_n)_n$ を $\beta_0 = 1$，$\beta_n = 0\ (n > 0)$ と定義するとき，これと Bailey 対をなすような数列 $(\alpha_n)_n$ は $\alpha_0 = 1, \alpha_n = (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}(1+q^n)\ (n > 0)$ であることが分かる．このとき (1.9) より，新たな Bailey 対

$$\alpha'_n = q^{n^2}\alpha_n = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, \\ (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}(1+q^n) & \text{if } n > 0, \end{cases}$$
$$\beta'_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{q^{j^2}}{(q;q)_{n-j}}\beta_j = \frac{1}{(q;q)_n}$$

が得られるわけだが，この新たな Bailey 対 (α', β') に対して等式 (1.8) を考えることで，

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j^2}}{(q;q)_j} &= \frac{1}{(q;q)_\infty}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^{\frac{k(5k-1)}{2}}(1+q^k)\right) = \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k q^{\frac{k(5k-1)}{2}} \\ &= \frac{(q^5;q^5)_\infty (q^2;q^5)_\infty (q^3;q^5)_\infty}{(q;q)_\infty} = \frac{1}{(q;q^5)_\infty (q^4;q^5)_\infty}\end{aligned}$$

が従う．これは第一 Rogers–Ramanujan 恒等式である．ここで 3 つ目の等号では Jacobi 三重積を用いている．Bailey の補題の歴史や Bailey 対の更なる例については，[6, 59] や Sills のテキスト [57]（高瀬幸一氏による訳書「魅惑のロジャーズ・ラマヌジャン恒等式」も参照）に詳しい．

では (1.4) の証明を行う．(1.7) の両辺に $(1 - aq/\rho_1)$ をかけて，$a = 1, \rho_1 = q, \rho_2 \to \infty, n \to \infty$ とすると，等式

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}(1-q^k)\alpha_k = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}}(q;q)_j\beta_j$$

を得る．あとは適切な Bailey 対 (α, β) を見つければ良いのであるが，Andrews–Dyson–Hickerson [9] は幾つかの q 級数の変形を行うことで，

$$\alpha_n = c_n - c_{n-1} \quad \left(c_n = q^{n^2+n}\sum_{-n\le j\le n}(-1)^j q^{-j^2}\right), \qquad \beta_n = \frac{(-q)^n}{(q^2;q^2)_n}$$

が Bailey 対をなすことを示し，その帰結として (1.4) を示している．

(1.4) で得られた $\sigma(q)$ の表示を見ると，不定値二次形式に対する（偽）テータ関数のような見た目をしていることに気がつく．実際，Andrews らはこの表示から次が直ちに従うことを指摘している．

Theorem 1.8 ([9, Theorem 2, Theorem 5])**.** 整数 $n \equiv 1 \pmod{24}$ に対し，

$$P_n := \{u + v\sqrt{6} \mid u^2 - 6v^2 = n\}/\mathbb{Z}[\sqrt{6}]^\times$$

とおき（ここで，$\mathbb{Z}[\sqrt{6}]^\times = \{\pm(5+2\sqrt{6})^r \mid r \in \mathbb{Z}\}$ は単数群である），

$$T(n) := \#\{u + v\sqrt{6} \in P_n \mid u + 3v \equiv \pm 1 \pmod{12}\} - \#\{u + v\sqrt{6} \in P_n \mid u + 3v \equiv \pm 5 \pmod{12}\}$$

を定める．このとき，

$$\sigma(q) = \sum_{n=0}^{\infty} T(24n+1)q^n, \qquad \sigma^*(q) = \sum_{n=1}^{\infty} T(1-24n)q^n$$

が成り立つ．

この結果はその直後 Cohen [19] によって，Maass 波動形式および Artin L 関数の言葉で翻訳されている．

1.4　σ 関数とその後の進展

上で紹介した Andrews–Dyson–Hickerson [9] と Cohen [19] の研究の類似として，2015 年 Lovejoy–Osburn [42] は新たに 12 個の q 級数を導入している．一つ紹介すると，

$$L_1(q) = \sum_{1\le k\le n} \frac{(q;q)_{n-1}(-1)^{n+k}q^{\frac{n(n+1)}{2}+\frac{k(k+1)}{2}}}{(q;q)_{n-k}(q;q)_{k-1}(1-q^{2k-1})}$$

という形をした二重級数である．この級数に対し，然るべき Bailey 対 (α,β) を見つけることで，偽不定値テータ関数表示

$$L_1(q) = \sum_{\substack{n\ge1\\ -n\le j\le n-1}} \left(q^{8n^2-n-4j^2-3j}+q^{8n^2+n-4j^2-3j}\right) + \sum_{\substack{n\ge0\\ -n\le j\le n}} \left(q^{8n^2+7n+2-4j^2-j}+q^{8n^2+9n+3-4j^2-j}\right) \tag{1.10}$$

を得ており，その系として，実二次体 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ に関する等式

$$q^{-17}L_1(q^{32}) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_K\\ N(\mathfrak{a})\equiv15 \pmod{32}}} q^{N(\mathfrak{a})}$$

を導いている．論文 [42] の最後には，関数 $L_i(q)$ たちの量子モジュラー性や Maass 波動形式との関係についての問題が提起されているが，これは最近 Bringmann–Nazaroglu [16] によって一つの回答が与えられている．鍵となるのは，(1.4) や (1.10) で与えたような偽不定値テータ関数表示であり，Zwegers [66] による不定値テータ関数の理論と Bringmann–Nazaroglu [15] による偽テータ関数の理論，そして Zwegers [67] によるモック Maass テータ関数[1]の理論をうまく組み合わせることによって，Maass 波動形式との関係および偽不定値テータ関数の保型変換則を記述し，その系として量子モジュラー性を明らかにしている．

　また，Section 1.1 において，$\sigma(q)$ と Ramanujan のモックテータ関数は似て非なる対象である，ということを強調したが，モックテータ関数もある意味では量子モジュラー形式の枠組みで捉えることができる．一つの方法は Ramanujan の意味でのモックテータ関数（Definition 1.2）の定義に立ち返ったときに，各有理数 $x\in\mathbb{Q}$ に対し，ある弱正則モジュラー形式 $M_\zeta(q)$ と有理数 $\alpha_\zeta\in\mathbb{Q}$ が存在して，極限

$$\lim_{q\to\zeta}\Big(F(q)-q^{\alpha_\zeta}M_\zeta(q)\Big), \qquad (\zeta=e^{2\pi ix})$$

が存在する．例えば最初に紹介したモックテータ関数 $f_3(q)$ については，Ramanujan 自身が最後の手紙 [8, Section 14] の中で観察しているように，ζ が 1 の原始 $2k$ 乗根ならば

$$f_3(q)-(-1)^k q^{1/24}\frac{\eta(\tau)^3}{\eta(2\tau)^2} = O(1) \qquad (q\to\zeta)$$

が成り立つ．より正確には，Folsom–Ono–Rhoades が次を示している．

Theorem 1.9 ([21])**.** 1 の原始 $2k$ 乗根 ζ に対し，半径に沿った極限 $q\to\zeta$ を考えると次が成り立つ．

$$\lim_{q\to\zeta}\left(f_3(q)-(-1)^k q^{1/24}\frac{\eta(\tau)^3}{\eta(2\tau)^2}\right) = -4\sum_{n=0}^{k-1}\zeta^{n+1}(-\zeta;\zeta)_n^2.$$

　これはちょうど (1.1) や (1.3) に類する表示である．この右辺の関数と次に紹介する Kontsevich 関数を統一して拡張した 2 変数関数

$$U(q;\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}(\zeta q;q)_n(\zeta^{-1}q;q)_n q^{n+1} \tag{1.11}$$

もまた保型形式的な観点から様々な研究が行われている．それらのより詳しい進展や，unimodal 列などの組み合わせ的対象との関係性などについては，[21] や [13, Chapter 14, 21]，およびそこでまとめられている参考文献を見ると良い．

[1] モックテータ関数が「正則関数だが保型性を持たない」対象だったことの類似として，モック Maass テータ関数は「Laplacian の固有関数だが保型性を持たない」ような対象である．

1.5 Kontsevich の関数

量子モジュラー形式を語る上で欠かせないのが，Kontsevich の関数

$$F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} (q;q)_n$$

である．これまでに登場した級数とよく似ているが，この関数の大きな特徴の一つは，$F(q)$ は $\mathbb{C}$ の任意の開部分集合上で収束しないが，q が 1 の冪根の場合には和が有限となり値が定まることである．$\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ を $\varphi(x) = e^{\pi ix/12} F(e^{2\pi ix})$ と定めるとき，これが $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ 3/2 の量子モジュラー形式になることが知られている．さらに Zagier [62] は，(1.2) に類した，保型形式とのより直接的な関係を明らかにしている．

Theorem 1.10 ([62, Theorem 2])**.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big((q;q)_\infty - (q;q)_n \Big) = (q;q)_\infty \left(-\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^n} \right) + \frac{1}{2} q^{-\frac{1}{24}} \widetilde{\eta}(q). \tag{1.12}$$

ここで，$\widetilde{\eta}(q)$ は *Dedekind* η-関数

$$\eta(q) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{12}{n} \right) q^{\frac{n^2}{24}}$$

の「半」微分（*Eichler* 積分）の定数倍

$$\widetilde{\eta}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{12}{n} \right) q^{\frac{n^2}{24}} = q^{\frac{1}{24}} (1 - 5q - 7q^2 + 11q^5 + \cdots)$$

である．

この等式 (1.12) は $|q| < 1$ 上で成立する等式であるが，ここで (1.3) を考えたときと同様に q を 1 の冪根 ζ へと極限を取ると，

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{2} \lim_{q \to \zeta} \widetilde{\eta}(q)$$

が得られる．つまり Kontsevich の関数とは本質的に Dedekind η-関数の Eichler 積分 $\widetilde{\eta}(q)$ の 1 の冪根への極限値に他ならない．Zagier [62] はこうして得られた関係式のことを

$$F(q) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{12}{n} \right) q^{\frac{n^2-1}{24}} \tag{1.13}$$

と記し，**strange identity** と呼んでいる.「strange」の意味するところは，この等式の両辺が同時に意味を持たず，1 の冪根への極限によってのみ意味を持つ，という状況である．これは (1.3) において，$\sigma(q)$ が $q = \zeta$ でも有限値を定めていた状況とは異なっている．

Remark 1.11. 一般に半整数重さの保型形式の Eichler 積分，およびその量子モジュラー性については，Bringmann–Rolen [17] において考察されている．また 1 の冪根 $q = \zeta$ において，(1.11) で与えた関数を用いて $F(\zeta) = U(\zeta^{-1}; 1)$ と表示できることが Bryson–Ono–Pitman–Rhoades [18] によって示されている．これによって関数 $U(q;\zeta)$ を Kontsevich 関数の二変数化とみなすことができる．

Remark 1.12. (1.2) と (1.12) を統一するような無限族

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big((a;q)_\infty - (a;q)_n \Big) = (a;q)_\infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n a^{-1}}{1-q^n a^{-1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{aq^n}{1-aq^n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{a^n (q/a;q)_n}$$

および更なる拡張が Andrews–Jiménez-Urroz–Ono [10] によって知られている（また [52, Section 10.3] にもまとめられている）．

1.6 Kontsevich の関数と色付き Jones 多項式

この Kontsevich 関数 $F(q)$ は単に不思議な現象を伴うというだけでなく，結び目の不変量との関連からも様々に研究が行われている．その一つが量子不変量の一つである**色付き Jones 多項式**との関係である．具体的な定義はここでは省略するが（和書であれば大槻 [51]，村上 [47] など），例えば右手型トレフォイル $T_{(2,3)}$ に対する N 色 Jones 多項式は

$$J_N(T_{(2,3)};q) = q^{1-N}\sum_{n=0}^{N} q^{-nN}(q^{1-N};q)_n$$

の表示を持つことが知られている（[35] およびその中の参考文献を参照）．すぐに気が付くように，1 の（原始）N 乗根 $q=\zeta_N$ において $J_N(T_{(2,3)};\zeta_N) = \zeta_N\sum_{n=0}^{\infty}(\zeta_N;\zeta_N)_n = \zeta_N F(\zeta_N)$ が成り立つ．これを拡張する形で，樋上 [29] および樋上–Lovejoy [35] は $(2,2t+1)$-トーラス結び目に対応するような Kontsevich 型の関数

$$F_t(q) = q^t \sum_{0\le k_1\le\cdots\le k_t} (q;q)_{k_t} \prod_{i=1}^{t-1} q^{k_i(k_i+1)} \begin{bmatrix} k_{i+1} \\ k_i \end{bmatrix}_q$$

および (1.11) の拡張である

$$U_t(q;\zeta) = q^{-t} \sum_{1\le k_1\le\cdots\le k_t} (\zeta q;q)_{k_t-1}(\zeta^{-1}q;q)_{k_t-1} q^{k_t} \prod_{i=1}^{t-1} q^{k_i^2} \begin{bmatrix} k_{i+1}+k_i-i+2\sum_{j=1}^{i-1}k_j \\ k_{i+1}-k_i \end{bmatrix}_q$$

を導入し，トレフォイルの場合の一般化にあたる次を示している．

$$J_N(T_{(2,2t+1)};\zeta_N) = F_t(\zeta_N) = U_t(\zeta_N^{-1},1).$$

但し，$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}(q;q)_k}$ は q-二項係数である．さらに樋上は [30] において $F_t(q)$ の量子モジュラー性や (1.13) に類する strange identity も示している．つまり，

$$q^{-t}F_t(q) \text{“}=\text{”} -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} n\chi_{8t+4}^{(0)}(n) q^{\frac{n^2-(2t-1)^2}{8(2t+1)}} \tag{1.14}$$

である．ここで，

$$\chi_{8t+4}^{(0)}(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n\equiv 2t-1 \text{ or } 6t+5 \pmod{8t+4}, \\ -1 & \text{if } n\equiv 2t+3 \text{ or } 6t+1 \pmod{8t+4}, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とおいている．

最近 Lovejoy [41] は Bailey の補題を巧みに用いることによって，上記 strange identity の見直しを行っている．また色付き Jones 多項式の様々な表示を用いることで，$(3,2^t)$-トーラス結び目 [12] や二重ツイスト結び目 $K_{(m,p)}$ [43, 44] に対する関数 $F(q)$ の類似物の探索が行われている．さらに一般のトーラス結び目 $T_{(s,t)}$ に対する色付き Jones 多項式 $J_N(T_{(s,t)};\zeta_N)$ の保型性についても，樋上–Kirillov [33, 34] による研究がある（Eichler 積分を用いる）．

Remark 1.13. 色付き Jones 多項式と Bailey 対の関係について述べておく．葉廣 [27, (6.5)]（以下の表示は [32, Appendix B] を参照）によって，結び目 K の色付き Jones 多項式 $J_N(K;q)$ に対し，ある $C_n(K;q)\in\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ が存在して，

$$J_N(K;q) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(K;q)(q^{1+N};q)_n(q^{1-N};q)_n$$

の形の展開が成り立つ．この表示は（この記事では紹介していないが）まさに Bailey 対の条件 (1.6) を α_n について整理した形をしており，つまり，

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{(1-q^{n+1})(1-q^{2n+2})}{(1-q)(1-q^2)}(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} J_{n+1}(K;q), \\ \beta_n &= q^{-n}C_n(K;q) \end{aligned}$$

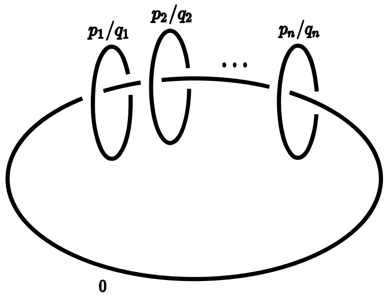
が $a=q^2$ に関する Bailey 対をなすことを示している．

2 WRT 不変量

ようやく本題に入るが，今回の研究 [45] で扱った対象は，**WRT 不変量** $\tau_K(M)$ と呼ばれる 3 次元多様体の量子不変量である．これは Witten [61] および Reshetikhin–Turaev [54] によって導入された不変量であり（Ohtsuki [50, Chapter 8] や Lickorish [40, Chapter 13]，邦訳「結び目理論概説」なども参照），特にここでは，n 本の特異ファイバーを持つ Seifert ホモロジー球面 $M(= M(p_1,\dots,p_n)) = M(p_1/q_1,\dots,p_n/q_n)$ に限定して話を進める．ここで，$p_1,\dots,p_n \geq 2$ とは pairwise coprime な整数であり，整数 $q_1,\dots,q_n$ を

$$p_1\cdots p_n \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{p_j} = 1$$

を満たすように取っている．M は次の S^3 内の絡み目 $L_0 \cup L_1 \cup \cdots \cup L_n$ に沿った Dehn 手術によって得られる 3 次元多様体である．



このとき，Lawrence–Rozansky [38, (4.2)] によって WRT 不変量の明示的な式が以下で与えられている（ここでの表記は [31, Proposition 1] を参照）．

$$\tau_K(M) = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{2\sqrt{2PK}} \frac{e^{-\frac{\pi i}{2K}\Theta_0 + \frac{\pi i}{K}}}{e^{\frac{2\pi i}{K}} - 1} \sum_{\substack{k=0 \\ K\nmid k}}^{2PK-1} e^{-\frac{\pi i}{2KP}k^2} \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(e^{\frac{\pi i k}{K p_j}} - e^{-\frac{\pi i k}{K p_j}}\right)}{\left(e^{\frac{\pi i k}{K}} - e^{-\frac{\pi i k}{K}}\right)^{n-2}} \in \mathbb{C} \quad (K \in \mathbb{Z}_{>0}).$$

但し，$P = p_1\cdots p_n, \Theta_0 = 3 - 1/P + 12\sum_{j=1}^{n} s(q_j,p_j)$ とおいており，また $s(a,c)$ は Dedekind 和 [53] であり，$s(P/p_j,p_j) = s(q_j,p_j)$ の書き換えについては [53, (33c)] を用いている．

2021 年，藤–岩木–村上–寺嶋 [22] は **WRT 関数**と呼ばれる $|q| < 1$ 上で定義される q 級数

$$\Phi_M(q) = \frac{(-1)^n q^{-\frac{1}{4}\Theta_0}}{2(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})} \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{\pm1\}^n} \varepsilon_1\cdots\varepsilon_n \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+n-3}{n-3} q^{\frac{P}{4}\left(2m+n-2+\sum_{j=1}^{n}\frac{\varepsilon_j}{p_j}\right)^2} \tag{2.1}$$

を導入し，次の極限公式を証明している．但し $\zeta_K = e^{2\pi i/K}$ であり，極限は半径に沿ったものとする．

Theorem 2.1 ([22])**.** $\lim_{q\to\zeta_K} \Phi_M(q) = \tau_K(M)$.

この定理により，WRT 関数 $\Phi_M(q)$ を WRT 不変量の単位円盤 $|q| < 1$ 上への拡張と見ることができるだろう．また Andersen–Mistegård [2] は，Gukov–Pei–Putrov–Vafa [26] によって導入された **homological block** と呼ばれる不変量を用いて，同様の極限公式を（藤らとは異なる方法で）独立に示しており，また WRT 関数と homological block が本質的に等しいことを指摘している．

2.1 保型性を捉える

Section 1 では，いくつかの q 級数の（量子）モジュラー性について紹介した．q 級数の保型性を捉える方法は様々であるが，一つの原理としては「然るべき変形によってテータ関数の表示に帰着させる」と良い．例えば Ramanujan のモックテータ関数の保型性は，Andrews [5] によって Bailey の補題から**不定値テータ関数**（不定値二次形式のテータ関数）表示が与えられ，Zwegers [66] によって不定値テータ関数の理論が構築されたことで，その保型形式的な側面が解明された．Ramanujan の σ 関数についても，やはり Bailey の補題から (1.4) の**偽不定値テータ関数**（不定値二次形式のテータ関数であって和の範囲が部分的，もしくは sgn-項を含む）表示を獲得したが，Bringmann–Nazaroglu [16] はこれを用いて Maass 波動形式との関係を明らかにしている．今回保型性を捉えたい目的の WRT 関数 $\Phi_M(q)$ は，既に**偽テータ関数**（正定値二次形式のテータ関数であって和の範囲が部分的，もしくは sgn-項を含む）の形をしているため，とりあえずこれ以上の変形は必要なく，偽テータ関数の理論を整備することが目標となる．

2.2 Poincaré ホモロジー球面の場合

我々の研究の原型となるのは，Poincaré ホモロジー球面 $M(2,3,5)$ の WRT 不変量に対する Lawrence–Zagier [39] の研究である．まずはざっくりと彼らの研究を振り返っておく．Poincaré ホモロジー球面に対する WRT 関数 $\Phi_M(q)$ は

$$\begin{aligned}
-2q^{\frac{181}{120}}(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}})\Phi_M(q) &= \sum_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\in\{\pm1\}^3} \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \sum_{m=0}^{\infty} q^{\frac{1}{120}(60m+30+15\varepsilon_1+10\varepsilon_2+6\varepsilon_3)^2} \\
&= -2q^{\frac{1}{120}} + \frac{1}{2}\sum_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\in\{\pm1\}^3} \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \sum_{m\equiv\ell\ (60)} \operatorname{sgn}(m) q^{\frac{m^2}{120}} \qquad (2.2)\\
&= -2q^{\frac{1}{120}} + q^{\frac{1}{120}}\left(1+q+q^3+q^7-q^8-q^{14}-q^{20}-\cdots\right)
\end{aligned}$$

と表示することができる．但し，$\operatorname{sgn}(0)=0$ とし，$P=2\times3\times5=30$,

$$\ell = \ell(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \equiv P\left(n-2+\sum_{j=1}^{n}\frac{\varepsilon_j}{p_j}\right) \pmod{2P} \qquad (2.3)$$

とおいている．この右辺の級数は [39, p.102] に登場する $\widetilde{\Theta}_+(\tau)$ と等しく，また Theorem 2.1 の極限公式が示されている．今，$f_M(x)=\lim_{q\to e^{2\pi i x}}\Phi_M(q)$ と定めることで，$f_M:\mathbb{Q}\to\mathbb{C}$ を得ることができるが，この f_M が（つまり WRT 不変量が）量子モジュラー形式であることを示す，というのが Lawrence–Zagier の一つの結果である．彼らのアイデアは次の通りである：上半平面 $\mathbb{H}$ 上の関数 $\widetilde{\Theta}_+(\tau)$（本質的に $\Phi_M(q)$ のことである）を重さ 3/2 のテータ関数 $\Theta_+(\tau)$ の「半整数重さ」Eichler 積分と見ることができる．このとき，$\widetilde{\Theta}_+(\tau)$ は古典的な意味での保型形式にはならないが，それと対をなすような下半平面 $\mathbb{H}^-$ 上の関数（非正則 Eichler 積分とも呼ばれる）$\Theta_+^*(\tau)$ を考えることができ，次を満たす．

- $\tau\to x$ としたときの $\widetilde{\Theta}_+(\tau)$ と $\Theta_+^*(\tau)$ の漸近挙動が一致する．
- $\Theta_+^*(\tau)$ の下半平面 $\mathbb{H}^-$ 上の保型変換則を，$\Theta_+(\tau)$ の積分を用いて記述できる．

したがって「よく分からない上半平面からの極限 $\lim_{\tau\to x}\widetilde{\Theta}_+(\tau)$」を「よく分かる下半平面からの極限 $\lim_{\tau\to x}\Theta_+^*(\tau)$」に言い換えることで，双方の極限である $f_M(x)$ の保型性，つまり量子モジュラー性を記述できるということである．そして一つの系として次を得ている．

Theorem 2.2 ([39, (18)]). *WRT 不変量 $\tau_M(K)$ に対し，$K\to\infty$ における次の漸近公式が成り立つ．*

$$\zeta_K^{\frac{181}{120}}(\zeta_K^{1/2}-\zeta_K^{-1/2})\tau_M(K) \sim \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{K}{i}}\left(e^{2\pi i K\frac{-1}{120}}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+e^{2\pi i K\frac{-49}{120}}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right).$$

これはいわゆる Witten（Andersen）の漸近展開予想 [49, Conjecture 7.7], [1, Conjecture 1.1] の主要項であり，e の指数に現れている $\{-1/120,-49/120\}$ は Chern–Simons 不変量と呼ばれる量である．

Remark 2.3. 一般の Seifert ホモロジー球面 $M(p_1,\ldots,p_n)$ に対しても，Lawrence–Zagier のアイデアを拡張することで，樋上 [31] は Theorem 2.2 の類似，すなわち Witten の漸近展開予想を証明している．そこでは WRT 関数（homological block）とは異なる q 級数が用いられている．

2.3 WRT 関数と偽テータ関数

上半平面の問題を下半平面の問題へと言い換えることで得られた Lawrence–Zagier や樋上の結果を，直接 WRT 関数 $\Phi_M(q)$ の（上半平面での）保型性を示すことで再証明する，というのが松坂–寺嶋 [45] の位置付けとなる．まず，テータ関数および偽テータ関数を定義する．

Definition 2.4. 正整数 $M>0$ に対し，格子 $L=\sqrt{M}\mathbb{Z}$ および双対格子 $L'=(1/\sqrt{M})\mathbb{Z}$ を取る．このとき，各 $k\in\mathbb{Z}_{\geq0}$ と $\mu\in L'/L$ に対し，**テータ関数**，**偽テータ関数**をそれぞれ

$$\theta_{k,\mu}(\tau)=\sum_{n\in L+\mu} n^k q^{\frac{n^2}{2}}, \qquad \widetilde{\theta}_{k,\mu}(\tau)=\sum_{n\in L+\mu}\operatorname{sgn}(n) n^k q^{\frac{n^2}{2}}$$

で定める．

Remark 2.5. 一般の格子と正定値二次形式に対しても同様に定義できるが，今回は 1 次元格子しか用いない．また，例えば Vignéras [58] によると，$L=\sqrt{M}\mathbb{Z}$ に対し，非正則なテータ関数

$$\Theta_{k,\mu}(\tau)=v^{-\frac{k}{2}}\sum_{n\in L+\mu}H_k\left(n\sqrt{v}\right)q^{\frac{n^2}{2}}\qquad(\tau=u+iv)$$

は重さ $k+1/2$ の保型変換則を満たす．ここで $H_k(x)$ は

$$\sum_{k=0}^{\infty}H_k(x)\frac{t^k}{k!}=e^{-2\pi t(2x+t)}$$

で定義される Hermite 多項式であり，最初の数項は $H_0(x)=1, H_1(x)=-4\pi x, H_2(x)=16\pi^2x^2-4\pi,\dots$ で与えられる．$\theta_{k,\mu}(\tau)$ は $\Theta_{k,\mu}(\tau)$ の正則部分であるので，金子–Zagier [36] に則るならば，$k\geq 2$ のとき，$\theta_{k,\mu}(\tau)$ は準テータ関数，$\widetilde{\theta}_{k,\mu}(\tau)$ は偽準テータ関数，と呼ぶべき対象であろうか．

このとき Poincaré ホモロジー球面の場合と同様に，WRT 関数を偽テータ関数を用いて次のように表示することができる．

Lemma 2.6. $\ell=\ell(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ を (2.3) と同様に定義するとき，ある明示的な多項式 $P_M(q)\in\mathbb{Q}[q^{\pm\frac{1}{4P}}]$ および有理数列 $c_\varepsilon(k)\in\mathbb{Q}$ が存在して，次が成り立つ．

$$(-1)^n 2q^{\frac{1}{4}\Theta_0}(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}})\Phi_M(q)-P_M(q)=\frac{1}{2}\sum_{\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{\pm1\}^n}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\sum_{k=0}^{n-3}(2P)^{k/2}c_\varepsilon(k)\widetilde{\theta}_{k,\frac{\ell}{\sqrt{2P}}}(\tau).\tag{2.4}$$

よって「$\Phi_M(q)$ の保型変換則を得る」という問題は本質的に「$\widetilde{\theta}_{k,\mu}(\tau)$ の保型変換則を得る」ことに帰着する．

2.4 偽テータ関数の保型変換則

$k=0$ の場合の偽テータ関数の保型変換則は，2019 年に Bringmann–Nazaroglu [15] によって与えられている．ここでは，彼らのアイデアを土台にして，$k>0$ の場合にも $\widetilde{\theta}_{k,\mu}(\tau)$ の保型変換則を記述するための筋書きを紹介したい．

偽テータ関数の定義 Definition 2.4 において保型性を崩している要因の一つは，sgn-項の存在である．Bringmann–Nazaroglu は Zwegers [66] の不定値テータ関数の構成を手本に「sgn-項をエラー関数で置き換える」という形で，保型性の補完を行っている．まず**エラー関数**を

$$\mathrm{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt$$

によって定義する．

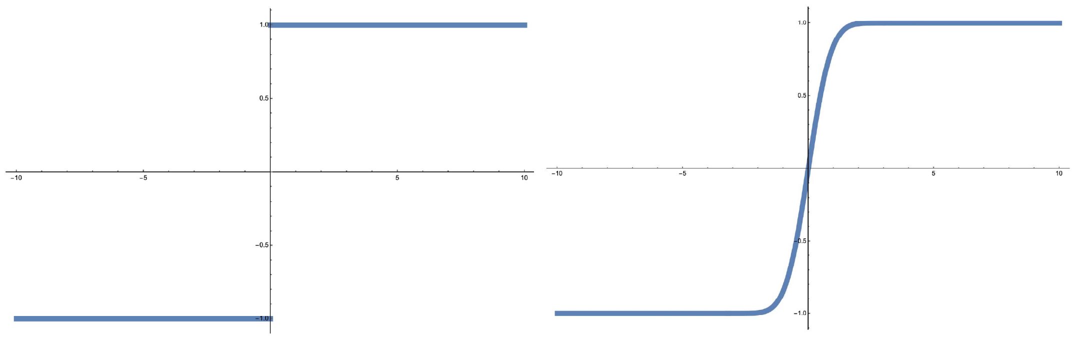


Figure 2: 左図は $\mathrm{sgn}(x)$ のグラフ，右図は $\mathrm{erf}(x)$ のグラフである．

このとき非負整数 $k\geq 0$ と $(\tau,w,x)\in\mathbb{H}\times\mathbb{H}\times\mathbb{R}$ に対し，

$$F_{k,\tau,w}(x)=\sqrt{i(w-\tau)}x^k\,\mathrm{erf}\left(-i\sqrt{\pi i(w-\tau)}x\right)e^{\pi i x^2\tau}\tag{2.5}$$

を定義すると，次が成り立つ．

Lemma 2.7. $\mathcal{F}$ を *Fourier* 変換とするとき，ある明示的な多項式 $c_{l,H_k}(\tau), c_{l,K_k}(\tau,\tau')$ が存在して，

$$\mathcal{F}(F_{k,-\frac{1}{\tau},-\frac{1}{w}})(x) = \frac{-(-i)^{1/2}w^{-1/2}}{(-2\pi i)^k}\left(\sum_{l=0}^{k} c_{l,H_k}(\tau)F_{l,\tau,w}(x) + \sum_{l=0}^{k-1} c_{l,K_k}(\tau,w-\tau)x^l e^{\pi i x^2 w}\right) \tag{2.6}$$

が成り立つ．また，二変数テータ関数を

$$\widetilde{\Theta}_{k,\mu}(\tau,w) = \sum_{n\in L+\mu} F_{k,\tau,w}(n) \tag{2.7}$$

で定義するとき，任意の $\epsilon>0$ に対し，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\widetilde{\Theta}_{k,\mu}(\tau,\tau+it+\epsilon)}{\sqrt{i(it+\epsilon)}} = \widetilde{\theta}_{k,\mu}(\tau)$$

が成り立つ．特に $k=0$ のとき，$\mathcal{F}(F_{0,-\frac{1}{\tau},-\frac{1}{w}})(x) = -(-i)^{1/2}w^{-1/2}F_{0,\tau,w}(x)$ である．

つまり偽テータ関数 $\widetilde{\theta}_{k,\mu}(\tau)$ の保型補完とは，

- 新たに $w\in\mathbb{H}$ という変数を追加し，sgn-項をエラー関数に置き換えることで，偽テータ関数の和の中身を「滑らかに」補完する (2.5).
- Fourier 変換 (2.6) を用いて，格子上の和 (2.7) に Poisson の和公式を適用することで，二変数テータ関数の保型変換則

$$\begin{aligned}\widetilde{\Theta}_{k,\mu}\left(-\frac{1}{\tau},-\frac{1}{w}\right) &= \frac{-(-i)^{1/2}}{\sqrt{M}}\frac{w^{-1/2}}{(-2\pi i)^k}\sum_{\nu\in L'/L} e^{2\pi i\mu\nu}\\ &\quad\times\left(\sum_{l=0}^{k} c_{l,H_k}(\tau)\widetilde{\Theta}_{l,\nu}(\tau,w) + \sum_{l=0}^{k-1} c_{l,K_k}(\tau,w-\tau)\theta_{l,\nu}(w)\right)\end{aligned} \tag{2.8}$$

  を得る．
- $w=\tau+it+\epsilon$（$\epsilon>0$）とおき $t\to\infty$ と極限を取ることで，所望の偽テータ関数 $\widetilde{\theta}_{k,\mu}(\tau)$ を得る．ここで ϵ の役割は，$\sqrt{i(w-\tau)}$ の branch cut との位置付けである．

の 3 つの要素からなっている．例えば $k=0$ のとき，

$$\widetilde{\Theta}_{0,\mu}\left(-\frac{1}{\tau},-\frac{1}{w}\right) = \frac{-(-i)^{1/2}w^{-1/2}}{\sqrt{M}}\sum_{\nu\in L'/L} e^{2\pi i\mu\nu}\widetilde{\Theta}_{0,\nu}(\tau,w)$$

であることから，$w=\tau+it+\epsilon$（$\epsilon>0$）に沿って極限 $w\to i\infty$ を考えることで，

$$\lim_{w\to 0}\widetilde{\Theta}_{0,\mu}\left(-\frac{1}{\tau},w\right) = \frac{-1}{\sqrt{M}}\sum_{\nu\in L'/L} e^{2\pi i\mu\nu}\widetilde{\theta}_{0,\nu}(\tau) \tag{2.9}$$

を得る．注意として，$\pi/4<|\phi|<3\pi/4$ に対して，

$$\operatorname{erf}(re^{i\phi}) \sim -\frac{e^{-ir^2\sin 2\phi}}{\sqrt{\pi}e^{i\phi}}\frac{1}{r}e^{-r^2\cos 2\phi} \qquad (r\to\infty)$$

が成り立つため（例えば [24, 8.254]），単に $w=0$ を代入したときに現れる和 $\sum_n \operatorname{erf}\left(-i\sqrt{-\pi i\tau}n\right)e^{\pi i n^2\tau}$ は絶対収束していないことに注意する．一つの見方は積分表示

$$\frac{\widetilde{\Theta}_{k,\mu}(\tau,w)}{\sqrt{i(w-\tau)}} = -i\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Re}(w-\tau))\int_{\tau}^{w}\frac{\theta_{k+1,\mu}(\mathfrak{z})}{\sqrt{-i(\mathfrak{z}-\tau)}}d\mathfrak{z} \qquad (\mathrm{Re}(w-\tau)\neq 0) \tag{2.10}$$

を用いる方法で，このとき $\theta_{1,\mu}(\tau)$ が重さ 3/2 の保型性，すなわち

$$\theta_{1,\mu}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{(-i\tau)^{3/2}}{\sqrt{M}}\sum_{\nu\in L'/L} e^{2\pi i\mu\nu}\theta_{1,\nu}(\tau)$$

を満たすことから，$\tau\to 0$ において $\theta_{1,\mu}(\tau)$ が指数関数的に減少し，(2.10) において $k=0, w\to 0$ とした積分が収束する．したがって，(2.9) の左辺の極限を計算し，式の形を整えることで次が得られる．

Proposition 2.8. $\mathrm{Re}(\tau) \neq 0$ のとき，次が成立する．

$$\widetilde{\theta}_{0,\mu}\left(-\frac{1}{\tau}\right) + \mathrm{sgn}(\mathrm{Re}(\tau))\frac{(-i\tau)^{1/2}}{\sqrt{M}} \sum_{\nu \in L'/L} e^{2\pi i \mu\nu} \widetilde{\theta}_{0,\nu}(\tau) = -i \int_0^{i\infty} \frac{\theta_{1,\mu}(\mathfrak{z})}{\sqrt{-i\left(\mathfrak{z} + \frac{1}{\tau}\right)}} d\mathfrak{z}.$$

$k > 0$ のとき，一般に $\theta_{k+1,\mu}(\tau)$ は $\tau \to 0$ において急減少するわけではないため同じ議論は機能しないように見えるが，今考えている Lemma 2.6 の偽テータ関数の「和」においては，そのような非減少項がキャンセルするため，同様の議論を適用することができる．しかし，ここで紹介するには技術的すぎるため詳細は省略することにする．

Theorem 2.9 ([45])**.** *Lemma* 2.6, *Lemma* 2.7 と同様の記号のもと，(2.4) の右辺を $\widehat{\Psi}_M(\tau)$ と定義し，$j \geq 0, 0 \leq k \leq n-3$ に対し，

$$\eta_{j,k}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\{\pm1\}^n} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n c_\varepsilon(k) \sum_{\nu=0}^{2P-1} e^{2\pi i \frac{\ell\nu}{2P}} \theta_{j,\frac{\nu}{\sqrt{2P}}}(\tau),$$

$$\widetilde{\eta}_{j,k}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\{\pm1\}^n} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n c_\varepsilon(k) \sum_{\nu=0}^{2P-1} e^{2\pi i \frac{\ell\nu}{2P}} \widetilde{\theta}_{j,\frac{\nu}{\sqrt{2P}}}(\tau)$$

とおく．このとき $\mathrm{Re}(\tau) \neq 0$ に対し，次の保型変換則が成り立つ．

$$\widehat{\Psi}_M\left(-\frac{1}{\tau}\right) = -\mathrm{sgn}(\mathrm{Re}(\tau))(-i\tau)^{1/2} \sum_{k=0}^{n-3} \frac{(2P)^{\frac{k-1}{2}}}{(-2\pi i)^k} \sum_{j=0}^{k} c_{j,H_k}(\tau) \left(\widetilde{\eta}_{j,k}(\tau) + i \int_0^{i\infty} \frac{\eta_{j+1,k}(\mathfrak{z})}{\sqrt{-i(\mathfrak{z}-\tau)}} d\mathfrak{z}\right).$$

以上をまとめると，次の通りである．まず藤–岩木–村上–寺嶋 [22] が導入した WRT 関数 $\Phi_M(q)$ は WRT 不変量 $\tau_M(K)$ の $|q| < 1$ 上への拡張であったが，それは Lemma 2.6 において本質的に偽テータ関数の和に分解された．Lawrence–Zagier [39] の研究から 20 年たった現在では偽テータ関数もまた保型形式の枠組みで捉えられるようになり，具体的には Zwegers, Bringmann–Nazaroglu のアイデアを拡張することで，WRT 関数の保型変換則を記述することに成功した．

Theorem 2.9 の系として，Witten（Andersen）の漸近展開予想の直接的な別証明を与えることができる．

Theorem 2.10 ([45])**.** *Seifert* ホモロジー球面 $M(p_1,\ldots,p_n)$ の *WRT* 不変量 $\tau_M(K)$ に対し，$K \to \infty$ における次の漸近公式が成り立つ．

$$\sqrt{\frac{2}{K}} \sin\left(\frac{\pi}{K}\right) \tau_M(K) \sim \frac{2^{n-2}K^{n-3}e^{-\frac{2n-3}{4}\pi i}\zeta_K^{-\frac{1}{4}\Theta_0}}{(n-2)!\sqrt{P}} \sum_{m=1}^{2P} (-1)^{mn} e^{2\pi i K \frac{-m^2}{4P}} B_{n-2}\left(\frac{m}{2P}\right) \prod_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi m}{p_j}\right).$$

ここで $B_n(x)$ は n 番目の *Bernoulli* 多項式である．

この結果が樋上 [31, Proposition 4] と一致していることに注意しておく．本稿では簡単のために省略しているが，$K \to \infty$ に関する主要項だけでなく，漸近展開まで得られている．また，e の指数に現れている $\{-m^2/4P\}$ は Chern–Simons 不変量である（Kirk–Klassen [37, Theorem 5.2] および Andersen–Mistegård [2, Propositoin 8] を参照）．

Remark 2.11. Gukov–Pei–Putrov–Vafa [26] の homological block は，Seifert ホモロジー球面に限らず，より一般の plumbed 多様体に対して定義されている．このとき Theorem 2.1 と同様に，homological block の 1 の冪根への極限が存在して WRT 不変量と等しいか，という問題が考えられる．この問題については最近，森–村上 [46] および村上 [48] が幾つかの条件のもとで解決している．一方で，Seifert ホモロジー球面でない場合の homological block の保型性については，Bringmann–Mahlburg–Milas [14] の研究があるものの，まだまだ発展途上，見渡す限り千山万水である．

Acknowledgements

本稿および集会における講演の機会を与えてくださいました世話人の森本和輝氏（神戸大学），宮崎直氏（北里大学）に感謝いたします．また 2022 年 4 月から 7 月にかけて樋上和弘氏（九州大学）には量子不変量について講義をしていただき，さらに本稿を執筆するにあたって数多くの助言を頂きました．加えて，村上友哉氏（東北大学）とも頻繁に顔を合わせては，多くの議論を行いました．著者が未熟なゆえ，本稿にそれら多くの学びを十分に反映することはできておりませんが，この場をお借りして感謝申し上げます．

References

[1] J. E. Andersen, *The Witten-Reshetikhin-Turaev invariants of finite order mapping tori I*, J. Reine Angew. Math. **681** (2013), 1–38.

[2] J. E. Andersen and W. E. Mistegård, *Resurgence analysis of quantum invariants of Seifert fibered homology spheres*, J. Lond. Math. Soc. (2) **105** (2022), no. 2, 709–764.

[3] G. E. Andrews, *The theory of partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976.

[4] ———, *Multiple series Rogers-Ramanujan type identities*, Pacific J. Math. **114** (1984), no. 2, 267–283.

[5] ———, *The fifth and seventh order mock theta functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **293** (1986), no. 1, 113–134.

[6] ———, *q-series: their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 66, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[7] ———, *Ramanujan's "lost" notebook. V. Euler's partition identity*, Adv. in Math. **61** (1986), no. 2, 156–164.

[8] G. E. Andrews and B. C. Berndt, *Ramanujan's lost notebook. Part V*, Springer, Cham, 2018.

[9] G. E. Andrews, F. J. Dyson, and D. Hickerson, *Partitions and indefinite quadratic forms*, Invent. Math. **91** (1988), no. 3, 391–407.

[10] G. E. Andrews, J. Jiménez-Urroz, and K. Ono, *q-series identities and values of certain L-functions*, Duke Math. J. **108** (2001), no. 3, 395–419.

[11] W. N. Bailey, *Identities of the Rogers-Ramanujan type*, Proc. London Math. Soc. (2) **50** (1948), 1–10.

[12] C. Bijaoui, H. U. Boden, B. Myers, R. Osburn, W. Rushworth, A. Tronsgard, and S. Zhou, *Generalized Fishburn numbers and torus knots*, J. Combin. Theory Ser. A **178** (2021), Paper No. 105355, 15.

[13] K. Bringmann, A. Folsom, K. Ono, and L. Rolen, *Harmonic Maass forms and mock modular forms: theory and applications*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 64, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.

[14] K. Bringmann, K. Mahlburg, and A. Milas, *Higher depth quantum modular forms and plumbed 3-manifolds*, Lett. Math. Phys. **110** (2020), no. 10, 2675–2702.

[15] K. Bringmann and C. Nazaroglu, *A framework for modular properties of false theta functions*, Res. Math. Sci. **6** (2019), no. 3, Paper No. 30, 23.

[16] ———, *Quantum modular forms from real quadratic double sums*, 2022, arXiv:2205.02643.

[17] K. Bringmann and L. Rolen, *Half-integral weight Eichler integrals and quantum modular forms*, J. Number Theory **161** (2016), 240–254.

[18] J. Bryson, K. Ono, S. Pitman, and R. C. Rhoades, *Unimodal sequences and quantum and mock modular forms*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **109** (2012), no. 40, 16063–16067.

[19] H. Cohen, *q-identities for Maass waveforms*, Invent. Math. **91** (1988), no. 3, 409–422.

[20] R. Dedekind, *Erläuterungen zu zwei fragmenten von. Riemann*, B. Riemanns gesammelte math. Werke und wissenschaftlicher Nachlaß. 2. Auflage (1892), 466–478.

[21] A. Folsom, K. Ono, and R. C. Rhoades, *Mock theta functions and quantum modular forms*, Forum Math. Pi **1** (2013), e2, 27.

[22] H. Fuji, K. Iwaki, H. Murakami, and Y. Terashima, *Witten-Reshetikhin-Turaev function for a knot in Seifert manifolds*, Comm. Math. Phys. **386** (2021), no. 1, 225–251, arXiv:2007.15872v3.

[23] G. Gasper and M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, second ed., Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 96, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, With a foreword by Richard Askey.

[24] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, seventh ed., Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2007, Translated from the Russian, Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger, With one CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX).

[25] M. Griffin, K. Ono, and L. Rolen, *Ramanujan's mock theta functions*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **110** (2013), no. 15, 5765–5768.

[26] S. Gukov, D. Pei, P. Putrov, and C. Vafa, *BPS spectra and* 3*-manifold invariants*, J. Knot Theory Ramifications **29** (2020), no. 2, 2040003, 85.

[27] K. Habiro, *A unified Witten-Reshetikhin-Turaev invariant for integral homology spheres*, Invent. Math. **171** (2008), no. 1, 1–81.

[28] G. H. Hardy and S. Ramanujan, *Asymptotic Formulaae in Combinatory Analysis*, Proc. London Math. Soc. (2) **17** (1918), 75–115.

[29] K. Hikami, *Difference equation of the colored Jones polynomial for torus knot*, Internat. J. Math. **15** (2004), no. 9, 959–965.

[30] ______, *q-series and L-functions related to half-derivatives of the Andrews-Gordon identity*, Ramanujan J. **11** (2006), no. 2, 175–197.

[31] ______, *Quantum invariants, modular forms, and lattice points. II*, J. Math. Phys. **47** (2006), no. 10, 1–32.

[32] ______, *Hecke type formula for unified Witten-Reshetikhin-Turaev invariants as higher-order mock theta functions*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2007), no. 7, Art. ID rnm 022, 32.

[33] K. Hikami and A. N. Kirillov, *Torus knot and minimal model*, Phys. Lett. B **575** (2003), no. 3-4, 343–348.

[34] ______, *Hypergeometric generating function of L-function, Slater's identities, and quantum invariant*, Algebra i Analiz **17** (2005), no. 1, 190–208.

[35] K. Hikami and J. Lovejoy, *Torus knots and quantum modular forms*, Res. Math. Sci. **2** (2015), Art. 2, 15.

[36] M. Kaneko and D. Zagier, *A generalized Jacobi theta function and quasimodular forms*, The moduli space of curves (Texel Island, 1994), Progr. Math., vol. 129, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995, pp. 165–172.

[37] P. A. Kirk and E. P. Klassen, *Chern-Simons invariants of* 3*-manifolds and representation spaces of knot groups*, Math. Ann. **287** (1990), no. 2, 343–367.

[38] R. Lawrence and L. Rozansky, *Witten-Reshetikhin-Turaev invariants of Seifert manifolds*, Comm. Math. Phys. **205** (1999), no. 2, 287–314.

[39] R. Lawrence and D. Zagier, *Modular forms and quantum invariants of* 3*-manifolds*, vol. 3, 1999, Sir Michael Atiyah: a great mathematician of the twentieth century, pp. 93–107.

[40] W. B. R. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 175, Springer-Verlag, New York, 1997.

[41] J. Lovejoy, *Bailey pairs and strange identities*, 2022, arXiv:2203.14391.

[42] J. Lovejoy and R. Osburn, *Real quadratic double sums*, Indag. Math. (N.S.) **26** (2015), no. 4, 697–712.

[43] ______, *The colored Jones polynomial and Kontsevich-Zagier series for double twist knots, II*, New York J. Math. **25** (2019), 1312–1349.

[44] ______, *The colored Jones polynomial and Kontsevich-Zagier series for double twist knots*, J. Knot Theory Ramifications **30** (2021), no. 5, Paper No. 2150031, 28.

[45] T. Matsusaka and Y. Terashima, *Modular transformations of homological blocks for Seifert fibered homology* 3*-spheres*, 2021, arXiv:2112.06210.

[46] A. Mori and Y. Murakami, *Witten-Reshetikhin-Turaev invariants, homological blocks, and quantum modular forms for unimodular plumbing H-graphs*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **18** (2022), Paper No. 034, 20.

[47] J. Murakami, **結び目理論**, 森北出版, 2021.

[48] Y. Murakami, *Witten-Reshetikhin-Turaev invariants and homological blocks for plumbed homology spheres*, 2022, arXiv:2205.01282.

[49] T. Ohtsuki, *Problems on invariants of knots and 3-manifolds*, Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001), Geom. Topol. Monogr., vol. 4, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002, With an introduction by J. Roberts, pp. i–iv, 377–572.

[50] ———, *Quantum invariants*, Series on Knots and Everything, vol. 29, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002, A study of knots, 3-manifolds, and their sets.

[51] ———, **結び目の不変量**, 数学の輝き 4, 共立講座, 2015.

[52] K. Ono, *The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 102, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[53] H. Rademacher and E. Grosswald, *Dedekind sums*, The Carus Mathematical Monographs, No. 16, Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1972.

[54] N. Reshetikhin and V. G. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. **103** (1991), no. 3, 547–597.

[55] R. C. Rhoades, *On Ramanujan's definition of mock theta function*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **110** (2013), no. 19, 7592–7594.

[56] L. J. Rogers, *On two theorems of combinatory analysis and some allied identities*, Proc. London Math. Soc. **16** (1917), no. 2, 316–336.

[57] A. V. Sills, *An invitation to the Rogers-Ramanujan identities*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2018, With a foreword by George E. Andrews.

[58] M.-F. Vignéras, *Séries thêta des formes quadratiques indéfinies*, Modular functions in one variable VI, Lecture Notes in Mathematics, vol. 627, 1977, pp. 227–239.

[59] S. O. Warnaar, *50 years of Bailey's lemma*, Algebraic combinatorics and applications (Gößweinstein, 1999), Springer, Berlin, 2001, pp. 333–347.

[60] G. N. Watson, *The Final Problem : An Account of the Mock Theta Functions*, J. London Math. Soc. **11** (1936), no. 1, 55–80.

[61] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), no. 3, 351–399.

[62] D. Zagier, *Vassiliev invariants and a strange identity related to the Dedekind eta-function*, Topology **40** (2001), no. 5, 945–960.

[63] ———, *Ramanujan's mock theta functions and their applications (after Zwegers and Ono-Bringmann)*, no. 326, 2009, Séminaire Bourbaki. Vol. 2007/2008, pp. Exp. No. 986, vii–viii, 143–164 (2010).

[64] ———, *Quantum modular forms*, Quanta of maths, Clay Math. Proc., vol. 11, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, pp. 659–675.

[65] S. P. Zwegers, *Mock θ-functions and real analytic modular forms*, q-series with applications to combinatorics, number theory, and physics (Urbana, IL, 2000), Contemp. Math., vol. 291, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, pp. 269–277.

[66] ———, *Mock theta functions*, Ph.D. thesis, Utrecht University, 2002.

[67] ———, *Mock Maass theta functions*, Q. J. Math. **63** (2012), no. 3, 753–770.