ブレイド群の Schur 被覆の表示

東京理科大学　川崎　理佳子
Rikako Kawasaki
Tokyo University of Science

1　概要

Artin ブレイド群 B_n とは $(n-1)$ 個の生成元 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1}$ で生成される群であり，それらの間の関係式は以下で与えられる．

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad (\forall i, j = 1, 2, \cdots, n-1, \quad |\, i-j \,| \geq 2)$$
$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n-2).$$

$n \geq 4$ のとき，Huebschmann[3] は 1 つの元 $\sigma_1 \in B_n$ で生成される free B_n-crossed module $\pi \colon C_n \to B_n$ が中心拡大

$$0 \to H_2(B_n) \to C_n \xrightarrow{\pi} B_n \to 1$$

をみたし，かつ C_n が B_n の Schur 被覆であることを示した．Schur 被覆とは Issac Schur により有限群の射影表現の研究において見出された概念で，群の 2 次のホモロジー群と密接に関連しており，有限群 G の射影表現は G の Schur 被覆の線型表現に自然に対応する（論文 [1] を参照）．対称群の Schur 被覆は Schur 自身によって研究され有限表示も知られているが，ブレイド群 B_n の Schur 被覆 C_n の有限表示を明示的に書いた論文はない．そこで，本稿では C_n の有限表示を群の拡大の表示の理論 ([5]) を用いて具体的に計算することを目標に，基本的な定義から説明する．

また，本研究は北海道大学秋田利之教授との共同研究に基づいている．

2　群の拡大

この章では群の拡大の定義について解説する．

定義 2.1 (完全系列)**.** 群と準同型写像の列

$$G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} G_n$$

が，各 $1 \leq i \leq n-2$ に対して

$$\mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1})$$

を満たすとき，完全系列 (exact sequence) という．

定義 2.2 (群の拡大)**.** 完全系列

$$1 \to K \xrightarrow{\imath} G \xrightarrow{\pi} N \to 1$$

を短完全系列 (short exact sequence) もしくは，群の拡大 (group extension) という．群を明示するときは，G を N の K による拡大 (extension of N by K) という．

このとき，次の補題が成り立つ．

補題 2.3 (５項補題)**.** 群と準同型写像からなる可換図式

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & G_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & G_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & G_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & 1 \\
1 \arrow[r] & H_1 \arrow[r, "g_1"] & H_2 \arrow[r, "g_2"] & H_3 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

において，各行は群の拡大であるとする．もし，φ_1 と φ_3 が同型写像であれば， φ_2 も同型写像である．

3 ブレイドとブレイド群

この章ではブレイド群について解説し，その簡単な性質をいくつか紹介する．

3.1 ブレイド群の定義と基本的性質

任意の正の整数 n に対し，ブレイド群 B_n の定義を代数的に与える．この定義は生成元と関係式による群の表示の形で形式化される．

定義 3.1. Artin ブレイド群 B_n (Artin braid group) とは $(n-1)$ 個の生成元 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1}$ で生成される群で，それらの間の関係式は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}
&\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n-1, \quad | i - j | \geq 2) \\
&\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n-2).
\end{aligned}$$

この定義から直ちにわかるように，B_1 は自明な群である．また B_2 は一つの生成元 σ_1 で生成されており，関係式は空集合なので無限巡回群であり，$n \geq 3$ のブレイド群 B_n は非可換群である．

ブレイド群 B_n から群 G への準同型写像 $f\colon B_n \to G$ に対し，G の元 $\{s_i = f(\sigma_i)\}_{i=1,\cdots,n-1}$ は関係式

$$\begin{aligned}
&s_is_j = s_js_i \quad (\forall i, j = 1, 2, \cdots, n-1, \quad | i - j | \geq 2) \\
&s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n-2)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

を満たし，この逆も成り立つ．

3.2 対称群への射影

以下，$\mathfrak{S}_n$ を n 次対称群とする．補題**??**を $G = \mathfrak{S}_n$ に適用しよう．$s_i = (i\ i+1) \in \mathfrak{S}_n$ $(1 \leq i \leq i-1)$ を i と $i+1$ の互換とする．$s_1, \ldots, s_{n-1} \in \mathfrak{S}_n$ が関係式 (3.1) を満たす事を確かめるのは容易である．よって，補題**??**より任意の $i = 1, 2, \cdots, n-1$ に対し $s_i = \pi(\sigma_i)$ となるような群準同型 $\pi\colon B_n \to \mathfrak{S}_n$ が唯一つ存在する．$\mathfrak{S}_n$ は $s_1, \ldots, s_{n-1} \in \mathfrak{S}_n$ で生成されるので，この準同型は全射である．

4 群の中心拡大と群の 2 次コホモロジー

G を群，A をアーベル群とし

$$0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1 \tag{4.1}$$

を G の A による中心拡大 (central extension) とする．また，π の集合論的切断 $s\colon G \to E$ を一つ選ぶ．すなわち，$\pi s = \mathrm{id}_G$ となるような写像 $s\colon G \to E$ を考える．s は正規化条件

$$s(1) = 1 \tag{4.2}$$

を満たすとしてよい．もし s が準同型写像ならば，上の拡大は分裂し，s が準同型写像ではない度合いを測る写像 $f\colon G\times G\to A$ が存在する．実際，任意の $g,h\in G$ に対し，E の元 $s(gh)$ と $s(g)s(h)$ は π で共に G の元 gh に移る．よって，$s(gh)$ と $s(g)s(h)$ の差は $i(A)$ の元である．こうして，以下の等式により $f(g,h)\in A$ を定義することができる．

$$s(g)s(h)=i(f(g,h))s(gh). \tag{4.3}$$

条件 (4.2) から f が以下の意味で正規化されていることが従う．

$$f(g,1)=0=f(1,g)\quad(g\in G). \tag{4.4}$$

写像 f は中心拡大 (4.1) と s に同伴する因子団 (factor set) と呼ばれる．次に，中心拡大 (4.1) が A と因子団 f から完全に復元できることを示す．$s(G)$ は $E/\iota(A)$ の完全代表系より，対応 $(a,g)\mapsto i(a)s(g)$ は全単射 $A\times G\to E$ を定める．$(a,g),(b,h)\in A\times G$ に対し，

$$\begin{aligned}i(a)s(g)i(b)s(h)&=i(a)i(b)s(g)s(h)\\&=i(a+b)i(f(g,h))s(g,h)\\&=i(a+b+f(g,h))s(gh)\end{aligned}$$

より，$A\times G$ 上の群演算は以下で与えられる．

$$(a,g)(b,h)=(a+b+f(g,h),bh). \tag{4.5}$$

集合 $A\times G$ に積を入れたものを E_f と表す．演算 (4.5) は直積群 $A\times G$ の積を f でひねったものに見えることに注意する．

$\forall a\in A$ に対し，$i(a)=i(a)s(1)$ であるので，合成 $A\xrightarrow{i}E\cong E_f$ は，標準的な単射

$$a\mapsto(a,1) \tag{4.6}$$

に一致し，合成 $E_f\approx E\xrightarrow{\pi}G$ は標準的な全射

$$(a,g)\mapsto g \tag{4.7}$$

元の中心拡大は G,A,f と上の対応によって定義された中心拡大

$$0\to A\to E_f\to G\to 1 \tag{4.8}$$

と同一視できる．

また注意として，条件 (4.4) を満たす任意の写像 $f\colon G\times G\to A$ に対し，演算 (4.5) によって E_f は群になるとは限らない．
以下が成り立つとき，E_f は群になる．

$$f(g,h)+f(gh,k)=f(h,k)+f(g,hk). \tag{4.9}$$

以上の考察から，次の一対一対応が成り立ち，

$$(\text{拡大 (4.1) と切断 } s \text{ の組})\leftrightarrow((4.4)\text{ と }(4.9)\text{ を満たす写像 } G\times G\to A).$$

恒等式 (4.9) は以下の形に書き換えられる．

$$f(h,k)-f(gh,k)+f(g,hk)-f(g,h)=0. \tag{4.10}$$

式 (4.10) と (4.4) は，f が G の正規化された 2 コサイクルであることを意味している．よって一対一対応

$$(\text{拡大 (4.1) と切断 } s \text{ の組})\leftrightarrow(\text{正規化された 2 コサイクル } G\times G\to A)$$

を得る．また，(4.1) の切断を変えると，得られる 2 コサイクルは元の f に 2 コバウンダリを加えたものになる．以上のことから，次が成り立つ．

定理 4.1. A をアーベル群，$\mathcal{E}(G,A)$ を A による G の中心拡大の同値類の集合とする．このとき以下の同型が成り立つ．

$$\mathcal{E}(G,A) \cong H^2(G,A).$$

5 Schur 被覆

定理 5.1 (普遍係数定理)**.** G を群，A をアーベル群とするとき，自然な完全系列

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(G),A) \to H^n(G,A) \to \mathrm{Hom}(H_n(G),A) \to 0 \tag{5.1}$$

が存在する．

定義 5.2. G, E を群，

$$0 \to H_2(G) \to E \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

を中心拡大とし，この中心拡大に対応するコホモロジー類を $u \in H^2(G, H_2(G))$ とする．普遍係数定理における準同型 $H^2(G,H_2(G)) \to \mathrm{Hom}(H_2(G),H_2(G))$ が

$$H^2(G,H_2(G)) \ni u \mapsto \mathrm{id}_{H_2(G)} \in \mathrm{Hom}(H_2(G),H_2(G)) \tag{5.2}$$

を満たすとき，E を G の Schur 被覆 (Schur cover) という．Schur 被覆は同型を除いても唯一つとは限らない．G が完全群のとき E は G の普遍中心拡大 (universal central extension) と呼ばれる．普遍中心拡大は同型を除いて唯一つに定まる．

5.1 対称群の Schur 被覆の表示

$\mathfrak{S}_n$ を n 文字の対称群とする．$n \geq 4$ のとき

$$H_1(\mathfrak{S}_n) \cong H_2(\mathfrak{S}_n) \cong \mathbb{Z}/2$$

であることが知られている．よって $\mathfrak{S}_n$ の Schur 被覆 E は中心拡大

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \to E \to \mathfrak{S}_n \to 1 \tag{5.3}$$

の形をしている．

$$\mathrm{Hom}(H_2(\mathfrak{S}_n),\mathbb{Z}/2) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2,$$
$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_1(\mathfrak{S}_n),\mathbb{Z}/2) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$$

$\longrightarrow H^2(\mathfrak{S}_n,\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$
中心拡大は同型を除いて 4 つ

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^2(\mathfrak{S}_n,H_2(\mathfrak{S}_n)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}(H_2(\mathfrak{S}_n),H_2(\mathfrak{S}_n)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

より，$\mathfrak{S}_n$ の Schur 被覆は 2 つ

定理 5.3 (Schur ([1] を参照)). $s_i = (i\ i+1) \in \mathfrak{S}_n$ $(1 \leq i \leq n-1)$ を互換とし，$\mathbb{Z}/2 = \{1, z\}$ とおく．各 $\alpha, \beta \in \{1, z\}$ に対し次の条件を満たす 2 コサイクル $\tau_{[\alpha,\beta]} \colon \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n \to \mathbb{Z}/2$ が存在する．

$$\tau_{[\alpha,\beta]}(s_i, s_i) = \alpha, \quad \tau_{[\alpha,\beta]}(s_k, s_l) = \begin{cases} 1 & (k < l) \\ \beta & (l < k). \end{cases}$$

$H^2(\mathfrak{S}_n, \mathbb{Z}/2) = \{[\tau_{[\alpha,\beta]}] \mid \alpha, \beta \in \{1, z\}\}$ である．2 コサイクル $\tau_{[\alpha,\beta]}$ で定まる中心拡大を

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\iota} E_{[\alpha,\beta]} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{S}_n \to 1$$

とすると $E_{[\alpha,\beta]}$ は $t_1, \ldots, t_{n-1}, z$ を生成元,

$$\begin{aligned} &t_i^2 = \alpha,\ z^2 = 1,\ zt_i = t_i z,\ t_j t_{j+1} t_j = t_{j+1} t_j t_{j+1},\ t_k t_l = \beta t_l t_k \\ &(1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq j \leq n-2,\ 1 \leq k < l-1 \leq n-2) \end{aligned} \tag{5.4}$$

を基本関係式とする群であり，$\iota(z) = z$, $\pi(t_i) = s_i$, $\pi(z) = 1$ を満たす．$E_{[\alpha,\beta]}$ が $\mathfrak{S}_n$ の Schur 被覆であるための必要十分条件は $\beta = z$ である．

5.2 ブレイド群の Schur 被覆

$n \geq 4$ に対し

$$H_1(B_n) \cong \mathbb{Z}, \quad H_2(B_n) \cong \mathbb{Z}/2$$

であることが知られている．よって B_n の Schur 被覆は中心拡大

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \to E \to B_n \to 1 \tag{5.5}$$

の形をしている．

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}(H_2(B_n), \mathbb{Z}/2) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2, \\ &\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_1(B_n), \mathbb{Z}/2) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2) = 0 \end{aligned}$$

$\longrightarrow H^2(B_n, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$
非自明な中心拡大は一つで，この中心拡大が B_n の Schur 被覆

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_1(\mathfrak{S}_n), \mathbb{Z}/2) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\mathfrak{S}_n, \mathbb{Z}/2) \arrow[r] \arrow[d, "\pi^*"] & \mathrm{Hom}(H_2(\mathfrak{S}_n), \mathbb{Z}/2) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & H^2(B_n, \mathbb{Z}/2) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}(H_2(B_n), \mathbb{Z}/2) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

より B_n の 4 つの 2 コサイクル $\mu_{[\alpha,\beta]} \coloneqq \tau_{[\alpha,\beta]} \circ (\pi \times \pi) \colon B_n \times B_n \to \mathbb{Z}/2$ についてについて次が従う．

命題 5.4. B_n の 4 つの 2 コサイクル

$$\mu_{[\alpha,\beta]} \coloneqq \tau_{[\alpha,\beta]} \circ (\pi \times \pi) \colon B_n \times B_n \to \mathbb{Z}/2$$

について以下が従う．上記の正規化された 2 コサイクル $\mu_{[\alpha,\beta]} \colon B_n \times B_n \to \mathbb{Z}/2$ に対応する中心拡大を

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to C_{[\alpha,\beta]} \to B_n \to 1$$

とする．$\beta = z$ のとき $C_{[\alpha,\beta]}$ は B_n の Schur 被覆であり，$\beta = 1$ のとき上の中心拡大は自明である．

6 ブレイド群の Schur 被覆の表示

以上の準備の下，実際にブレイド群の Schur 被覆の具体的表示を求める．

$\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ をブレイド群 B_n の生成元とし，$\mu_{[\alpha,\beta]}\colon B_n \times B_n \to \mathbb{Z}/2 = \{1, s\}$ $(\alpha, \beta \in \{1, s\})$ を 2 コサイクルとする．定理 5.3 より $\mu_{[\alpha,\beta]}$ は次式を満たす．

$$\begin{cases} \mu_{[\alpha,\beta]}(\sigma_i, \sigma_i) = \alpha \\ \mu_{[\alpha,\beta]}(\sigma_k, \sigma_l) = 1 \quad (k < l) \\ \mu_{[\alpha,\beta]}(\sigma_l, \sigma_k) = \beta \quad (k < l). \end{cases}$$

$\mu_{[\alpha,\beta]}$ に対応する中心拡大を

$$1 \to \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\iota} C_{[\alpha,\beta]} \xrightarrow{\pi} B_n \to 1$$

とする．$C_{[\alpha,\beta]}$ は集合として $\mathbb{Z}/2 \times B_n$ と同一視できる．この同一視の下で群演算は

$$(x, \sigma) \cdot (y, \tau) = (x \cdot y \cdot \mu_{[\alpha,\beta]}(\sigma, \tau), \sigma\tau)$$

と表せ，準同型 ι, π は

$$\mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\iota} C_{[\alpha,\beta]} \quad s \mapsto (s, 1)$$
$$C_{[\alpha,\beta]} \xrightarrow{\pi} B_n, \quad (x, \sigma) \mapsto \sigma$$

と表せる．さらに標準的な集合論的切断

$$B_n \to C_{[\alpha,\beta]}, \quad \sigma \mapsto (1, \sigma)$$

が存在する．$\mathbb{Z}/2$ と B_n の表示は

$$\mathbb{Z}/2 = \langle s \mid s^2 \rangle,$$
$$B_n = \langle \sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i\sigma_j\sigma_i\sigma_j^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1} \ (i = j-1), \quad \sigma_i\sigma_j{\sigma_i}^{-1}{\sigma_j}^{-1} \ (i < j-1) \rangle$$

で与えられる．簡単のため

$$\mathbb{Z}/2 = \langle Y \mid S \rangle, \quad B_n = \langle X \mid R \rangle$$

とおく．また，X に対応する B_n の生成系も X と表すことにする．この意味において $X \subset B_n$ である．同様に $Y \subset \mathbb{Z}/2$ である．

群の拡大の表示の理論を用いて，$C_{[\alpha,\beta]}$ の表示を求める ([5] 参照)．

$$X^* \coloneqq \{{\sigma_1}^*, \cdots, \sigma_{n-1}^*\}, \quad Y^* \coloneqq \{s^*\}$$

および，自由群 $F := F(X^* \cup Y^*)$ を考える．

$$S^* \coloneqq \{(s^*)^2\} \subset F$$

$$X' \coloneqq \{(1, \sigma_i) \mid 1 \leqq i \leqq n-1\}$$

とおく．対応

$$s^* \mapsto s = (s, 1), \quad \sigma_i^* \mapsto (1, \sigma_i)$$

により，全射準同型写像

$$\varphi\colon F \to C_{[\alpha,\beta]}$$

が定義される．各 i,j $(1 \le i < j \le n-1)$ に対し

$$r_{ij} = \begin{cases} \{\sigma_i\sigma_j\sigma_i(\sigma_j\sigma_i\sigma_j)^{-1} & (i=j-1) \\ \sigma_i\sigma_j(\sigma_j\sigma_i)^{-1} & (i<j-1) \end{cases}$$

$$r^*_{ij} = \begin{cases} \sigma^*_i\sigma^*_j\sigma^*_i(\sigma^*_j\sigma^*_i\sigma^*_j)^{-1} & (i=j-1) \\ \sigma^*_i\sigma^*_j(\sigma^*_j\sigma^*_i)^{-1} & (i<j-1) \end{cases}$$

とおく．

$$\varphi(r^*_{ij}) = \begin{cases} (1,\sigma_i)(1,\sigma_j)(1,\sigma_i)(1,\sigma_j)^{-1}(1,\sigma_i)^{-1}(1,\sigma_j)^{-1} & (i=j-1) \\ (1,\sigma_i)(1,\sigma_j)(1,\sigma_i)^{-1}(1,\sigma_j)^{-1} & (i<j-1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1,\sigma_i)(1,\sigma_j)(1,\sigma_i)^{-1}(1,\sigma_j)^{-1} &= (1,\sigma_i\sigma_j)(1,\sigma_i\sigma_j)^{-1}(\beta,1)^{-1} \\ &= (\beta,1)^{-1} \\ &= (\beta,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(1,\sigma_i)(1,\sigma_j)(1,\sigma_i)(1,\sigma_j)^{-1}(1,\sigma_i)^{-1}(1,\sigma_j)^{-1} \\ &= (\mu_{[\alpha,\beta]}(\sigma_i\sigma_j,\sigma_i),\sigma_i\sigma_j\sigma_i)(\mu_{[\alpha,\beta]}(\sigma_j,\sigma_i\sigma_j),\sigma_j\sigma_i\sigma_j)^{-1} \\ &= (1,1) \end{aligned}$$

より，

$$R^* \coloneqq \{\sigma^*_i\sigma^*_j\sigma^*_i(\sigma^*_j\sigma^*_i\sigma^*_j)^{-1}\ (i=j-1), \quad \sigma^*_i\sigma^*_j(\sigma^*_j\sigma^*_i)^{-1}(s^*)^{-1}\ (i<j-1)\}$$

とおく．最後に，$\mathrm{Im}(\iota)$ は $C_{[\alpha,\beta]}$ の正規部分群であるから，$\sigma^*_i \in X^*$, $s^* \in Y^*$ に対し，

$$\varphi((\sigma^*_i)^{-1}s^*\sigma^*_i) \in \mathrm{Im}(\iota).$$

よって

$$\varphi((\sigma^*_i)^{-1}s^*\sigma^*_i) = \iota(s).$$

$$T^* \coloneqq \{(\sigma^*_i)^{-1}s^*\sigma^*_i(s^*)^{-1} \in F \mid \sigma^*_i \in X^*, s^* \in Y^*\}$$

とおく．以上の計算より，次の主結果を得る．

定理 6.1. （秋田-K.（2022））$n \ge 4$ とする．正規化された 2 コサイクル $\mu_{[\alpha,\beta]}\colon B_n \times B_n \to \mathbb{Z}/2$ に対応する中心拡大を

$$1 \to \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\iota} C_{[\alpha,\beta]} \xrightarrow{\pi} B_n \to 1$$

とする．このとき $C_{[\alpha,\beta]}$ の表示は生成元

$$\sigma^*_1, \cdots, \sigma^*_{n-1}, s^*$$

と関係式

$$\begin{aligned} &(s^*)^2 = 1, \\ &\sigma^*_i\sigma^*_j\sigma^*_i = \sigma^*_j\sigma^*_i\sigma^*_j \quad (i=j-1), \\ &\sigma^*_i\sigma^*_j = \begin{cases} \sigma^*_j\sigma^*_i & (\beta=1, i<j-1), \\ s^*\sigma^*_j\sigma^*_i & (\beta=s, i<j-1), \end{cases} \\ &\sigma^*_i s^* = s^*\sigma^*_i \quad (1 \le i \le n-1) \end{aligned}$$

で与えられ，$\pi(\sigma^*_i) = \sigma_i$ $(1 \le i \le n-1)$, $\pi(s^*) = 1$, $\iota(s) = s^*$ を満たす．

命題 5.4 より $\beta = s$ のときが B_n の Schur 被覆なので，以下が成り立つ．

系 6.2. （秋田-K.（2022））$n \geq 4$ とする．ブレイド群 B_n の Schur 被覆 C_n の表示は

$$\sigma_1^*, \cdots, \sigma_{n-1}^*, s^*$$

と関係式

$$\begin{aligned}
&(s^*)^2 = 1, \\
&\sigma_i^*\sigma_j^*\sigma_i^* = \sigma_j^*\sigma_i^*\sigma_j^* \quad (i = j-1), \\
&\sigma_i^*\sigma_j^* = s^*\sigma_j^*\sigma_i^* \quad (i < j-1), \\
&\sigma_i^* s^* = s^*\sigma_i^* \quad (1 \leq i \leq n-1)
\end{aligned}$$

で与えられ，射影 $\pi\colon C_n \to B_n$ は $\pi(\sigma_i^*) = \sigma_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$, $\pi(s^*) = 1$ を満たす．

参考文献

[1] Yuri Bazlov and Arkady Berenstein, Cocycle twists and extensions of braided doubles, Contemporary Mathematics Volume 592 (2013), 32–33.

[2] Kenneth S. Brown, Cohomology of Groups, Springer-Verlag (1994).

[3] Johannes Huebschmann, Braids and crossed modules, J. Group Theory 15 (2012), 57–83.

[4] Christian Kassel and Vladimir Turaev, Braid Groups, Springer (2008).

[5] 佐藤隆夫,『群の表示』，近代科学社（2017).

[6] D.Johnson;Presentation of Groups,Cambridge University Press,1990.