Characterization of the hierarchical structures interpolating the uniruledness and the rationally connectedness via differential forms

南　範彦

Norihiko Minami

名古屋工業大学

Nagoya Institute of Technology *

Abstract

This is yet another short introduction to the author's study of the rationality problem, which centers the hierarchies of the form: lower rationality = higher ruledness. A particular emphasis is given for the hierarchical structures interpolating the uniruledness and the rationally connectedness. I shall present their characterization via differential forms.

1　背景

体 k(本講演では直ぐに (dense open smooth locus 存在のため) 『perfect』と仮定 します) 上の代数多様体 (即ち，separated and integral scheme of finite type over k) X, Y は

$$X \underset{\text{Zariski dense open}}{\supseteq} \exists U \cong \exists V \underset{\text{Zariski dense open}}{\subseteq} Y$$
$$\iff k(X) \cong k(Y)$$

のとき， <u>双有理同値</u> と呼ばれ，ここでは次のように表す：

$$X \overset{\text{bir}}{\sim} Y$$

n 次元代数多様体 X は $X \overset{\text{bir}}{\sim} \mathbb{A}^n (\overset{\text{bir}}{\sim} \mathbb{P}^n)$, 即ち，$k(X) \cong k(X_1, \cdots, X_n) := Frac(k[X_1, \cdots, X_n])$ のとき，<u>rational(有理)</u> と呼ばれる．

有理性の様々な弱形からなる以下のような階層関係が知られている：

$$\begin{aligned} &\text{rational} \implies \text{stable rational} \implies \text{ratract rational} \\ \implies &\text{separably unirational} \implies \text{separably rationally connected} \implies \text{rationally connected} \end{aligned} \tag{1}$$

この (様々なレベルでの) 逆が成立するかを <u>Generalized Luroth problems</u> と呼ぼう．実際，特に

『rational $\implies$ separably unirational』

*nori@nitech.ac.jp

の逆を問うのが元々の Luroth 問題 (1875) [L875]：

$$k(X) \underset{\text{separable extension}}{\subseteq} k(Y_1, \cdots, Y_m) \overset{?}{\Longrightarrow} k(X) \cong k(Z_1, \cdots, Z_n)$$

で，係数体 k が複素数体の場合，$\dim 2$ 以下では Yes であることが知られていたが，今から約 50 年前に，$\dim 3$ での反例が，Iskovskikh-Manin, Clemens-Griffiths, Artin-Mumford の 3 つのグループによって独立に与えられたのであった.

一方，私が最近色々なところで唱道してきた [M19][M21][M22] のは，少々異なった問題意識に基づいたものであった：

私のここでの問題意識

- 上述の rationality に関する階層構造 (1) を，『階層構造』達の間の階層構造

$$\begin{aligned} &\{\ (-i)\ \text{-rational}\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Longrightarrow \{\text{stable}\ \ (-i)\ \text{-rational}\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \\ \Longrightarrow &\{\text{retract}\ \ (-i)\ \text{-rational}\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Longrightarrow \text{separably}\ \ (-i)\ \text{-unirational}\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \\ \Longrightarrow &\ \text{separably}\ \ (-i)\ \text{-rationally connected}\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Longrightarrow \ (-i)\ \text{-rationally connected}\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \end{aligned} \tag{2}$$

  にアップグレードする.

- これらのうち幾つかの『階層構造』を，より理解しやすい代数的，コホモロジカルに表現される『階層構造』と関係づける.

- (1) に対する Generalized Luroth problems を，(2) に対する階層付き Generalized Luroth problems に upgrade し，その反例を，必要なら上で関係づける代数的，コホモロジカルに表現有れる『階層構造』を用いて，構成する.

  また，古典的な (Generalized) Luroth problem(s) に対する反例を，この観点からの反例に upgrade する.

2 『階層構造』たち

必要な『階層構造』たちは既に [M19][M21][M22] で本質的に述べて来たが，読者の便宜を考え，復習しよう： For a generically smooth n-dim'l X and $0 \leq i \leq n$,

- (As a motivation...) X is <u>rational</u> , if

$$X \overset{\text{bir}}{\sim} \mathbb{P}^n \overset{\text{bir}}{\sim} \mathbb{A}^n \left(\overset{\text{bir}}{\sim} \underbrace{\mathbb{A}^1 \times \cdots \times \mathbb{A}^1}_{n} \overset{\text{bir}}{\sim} \underbrace{\mathbb{A}^1 \times \cdots \times \mathbb{A}^1}_{(n-i)} \times \underbrace{\mathbb{A}^1 \times \cdots \times \mathbb{A}^1}_{i} \overset{\text{bir}}{\sim} \mathbb{A}^{n-i} \times \mathbb{A}^i \quad (0 \leq \forall i \leq n) \right)$$

- X is <u>$(-i)$-rational</u> or <u>$(n-i)$-ruled</u> if $\exists$ an i-dimensional smooth variety Z^i s.t.

$$\mathbb{A}^{n-i} \times Z^i \overset{\text{bir}}{\sim} X.$$

- X is <u>stable $(-i)$-rational</u> or <u>stable $(n-i)$-ruled</u> if $\exists$ an i-dim'l smooth variety Z^i and $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ s.t.

$$\mathbb{A}^j \times \mathbb{A}^{n-i} \times Z^i \overset{\text{bir}}{\sim} \mathbb{A}^j \times X.$$

- X is $\underline{\underline{\text{retract } (-i)\text{-rational}}}$ or $\underline{\underline{\text{retract } (n-i)\text{-ruled}}}$ $(0 \le i \le n)$
  if $\exists$ an i-dim'l smooth Z^i. $N \in \mathbb{Z}_{\ge n}$ and rational maps

$$f : X --> \mathbb{A}^{N-i} \times Z^i, \quad g : \mathbb{A}^{N-i} \times Z^i --> X$$

  such that the composition

$$g \circ f : X --> X$$

  is defined, yielding an identity on a dense open subset of X.

Recall that X and Y are $\underline{\underline{\text{stably birational equivalent}}}$ when $\mathbb{A}^j \times X \overset{\text{bir}}{\sim} \mathbb{A}^k \times Y$ for some $j, k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$.

Then, stable $(-i)$-rationality and retract $(-i)$-rationality are both stably birational invariant concepts.

ここで，retaract $(-i)$-rational であるための極めて有用な必要条件を，Morel の unramified sheaf の理論 [M12] を用いて得られた [M22] ことを強調しておこう．

次に (2) の後半 3 つの『階層構造』を述べる：

- X is $\underline{\underline{\text{separably } (-i)\text{-unirational}}}$ or $\underline{\underline{\text{separably } (n-i)\text{-ruled}}}$
  if there exist an i-dim'l smooth projective Z^i, $N \in \mathbb{Z}_{\ge n}$ and a $\boxed{\text{separably}}$ dominant rational map
  ($\iff$ the induced function field extension is separable
  $\iff$ $\exists$ dense open where the rational map is realized by a $\boxed{\text{smooth morphism}}$.)

$$g : \mathbb{A}^{N-i} \times Z^i --> X$$

  (separably $(-i)$ unirationality の定義で，N は X の次元 n に置き換えられる．)

- (cf. Kollár-Miyaoka-Mori [KMM92], Kollár [K96]) when X is further smooth,

$$X \text{ is } \underline{\underline{\text{separably } (-i)\text{-rationally connected}}}$$

  if there exist a morphism $f : \mathbb{P}^1 \to X$ such that

$$f^*T_X \;\cong\; \oplus_{1 \le j \le n} \mathcal{O}(a_j),$$

$$\text{with } a_1 \;\ge \cdots \ge\; a_{n-i} \;\ge\; \max(1, a_{n-i+1})$$
$$\ge\; a_{n-i+1} \;\ge \cdots \ge a_{n-1} \;\ge\; a_n \;\ge\; 0.$$

  ($\iff$ $\forall j, a_j \ge 0$ かつ 駄目度 $d := \#\{j \mid a_j = 0\} \lneq i$
  ($a_n \ge 0$ より $\underline{\text{free}}$ $\overset{\text{[Kollár 1996, II. Cor.3.5.4]}}{\Longrightarrow}$ the corresponding evaluation morphism is smooth)

- (cf. Kollár-Miyaoka-Mori [KMM92], Campana [C92]) when X is further smooth,

$$X \text{ is } \underline{\underline{(-i)\text{-rationally connected}}}$$

  if, for the $\underline{\text{maximal rationally chain connected fibration}}$ $\pi : X --> Z$, which enjoys:

$$\begin{cases} \bullet \text{ the (general) fibers are rationally chain connected} \\ \bullet \text{ (when the base field is uncountable) for a general point} \\ z \in Z, \text{ any rational curve meeing } X_z \text{ is contained in } X_z. \end{cases}$$

  satisfies the following inequality:

$$\dim\ Z \;\le\; i.$$

基礎体が非加算代数閉体で標数が 0 の場合は，最後の 2 つの『階層構造』は同値となる：

$$\text{separably } (-i)\text{-rationally connected} \overset{\text{[Kollár 96, IV.Th.5.8] [Debarre 01, Cor.5.14]}}{\Longleftrightarrow} (-i)\text{-rationally connected}$$

3 主定理

ここでの私の主定理は，上の最後の 2 つの『階層構造』のコホモロジカルな特徴づけに関するものである．主定理を述べる前に，曲面の場合の良く知られた結果を思い出しておこう：

例：$\mathbb{C}$ 上の非特異射影曲面の場合の階層構造

例として，$\mathbb{C}$ 上の非特異射影曲面の場合の階層構造を考えてみよう.曲面の場合は $n=2$ なので，考察する $0 \leq i \leq n-1$ は，$i=0$ か $i=1$ で，各々これらの階層構造はこの場合一致する：

- $\boxed{i=0 \text{ の場合，rational}}$ (= stable rational = retract rational = (separably) unirational = (separably) rationally connected)
- $\boxed{i=1 \text{ の場合，ruled}}$ stable ruled = retract ruled = (separably) uniruled $\overset{n=2\text{ の場合}}{=}$ (-1) (separably) rationally connected)

これらの cohomological criteria も古典的である [B96, Th.V.1 Cor.VI.18].
$\mathbb{C}$ 上の非特異射影曲面 X に対して, 以下が成立する：

- Castelnuovo's Rationality Criterion

$$X \text{ is rational} \iff \begin{cases} H^0\left(X, (\Omega_X^1)\right) \left(\overset{\text{Hodge}}{\cong} H^1\left(X, \mathcal{O}_X\right)\right) = 0 \\ \text{and } H^0\left(X, (\Omega_X^2)^{\otimes 2}\right) = 0 \end{cases}$$

- Enruques' Ruledness Criterion

$$X \text{ is ruled} \iff H^0\left(X, (\Omega_X^2)^{\otimes m}\right) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

すると本稿の主定理は，以下の通りとなる：

$\boxed{\text{主定理}}$を含む,『階層構造』たちの階層構造

$\mathbb{C}$ 上の smooth projective X と $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$(-i)\text{ -rational} \Longrightarrow \text{stable } (-i)\text{ -rational} \Longrightarrow \text{retract } (-i)\text{ -rational}$$

$$\Longrightarrow \text{separably } (-i)\text{ -unirational}$$

$$\overset{(\text{逆が大問題！})}{\Longrightarrow} \text{separably } (-i)\text{ -rationally connected} \overset{(\text{標数 } 0 \text{ より})}{\Longleftrightarrow} (-i)\text{ -rationally connected}$$

$$\overset{\text{今回の}\boxed{\text{主定理}}}{\Longleftrightarrow} \forall \text{ ample l.b. } A \text{ on } X, \exists C_A > 0 \text{ s.t.}$$
$$H^0\left(X, (\Omega_X^j)^{\otimes m} \otimes A^{\otimes k}\right) = 0,$$
$$\forall j > i, \forall m, k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } m \geq C_A k$$

$$\overset{\substack{\text{逆方向も正しいと予想される}\\ \text{この予想は } \underline{MMP} \text{ の大問題}}}{\Longrightarrow} H^0\left(X, (\Omega_X^j)^{\otimes m}\right) = 0, \ \forall j > i, \forall m \in \mathbb{N}$$

証明は，$i = 0$ の場合の通常の rationally connectedness に対する特徴づけを与えた Campana–Demailly–Peternell [CDP15, 1.1] の証明を般の i の場合に対し一般化与えられる．ただし，[CDP15] の証明のうち以下で与える難しい方向の証明は余りにさらっと書かれていて良く分からないので，ここでは詳細で丁寧で良く分かる証明を，一般の i の場合に対して与える：

今回の主定理の簡単な方向の証明

$$X, \text{ (separably) } (-i)\text{- rationally connected}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \forall \text{ ample l.b. } A \text{ on } X, \exists C_A > 0 \text{ s.t.} \\ H^0\left(X, (\Omega_X^j)^{\otimes m} \otimes A^{\otimes k}\right) = 0, \\ \qquad \forall j > i, \forall m, k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } m \geq C_A k \end{cases}$$

実際，X が separably $(-i)$- rationally connected ならば，定義より <u>**X 上を $\boxed{\text{free に}}$ move して覆う**</u>

$$f : \mathbb{P}^1 \to X$$

で以下の条件を満たすものが存在する：

$$f^*T_X \cong \oplus_{1 \leq j \leq n} \mathcal{O}(a_j),$$
$$\text{with } a_1 \geq \cdots \geq a_{n-i} \geq \max(1, a_{n-i+1})$$
$$\geq a_{n-i+1} \geq \cdots \geq a_{n-1} \geq a_n \geq 0.$$

($\Longleftrightarrow$ $\forall j, a_j \geq 0$ かつ 駄目度 $d := \#\{j \mid a_j = 0\} \leq i$

($a_n \geq 0$ より <u>free</u> $\overset{[\text{Kollár 1996, II. Cor.3.5.4}]}{\Longrightarrow}$ the corresponding evaluation morphism is smooth)

$f : \mathbb{P}^1 \to X$ は X を free に move して覆うので，$j > i$ の下,

$$H^0\left(\mathbb{P}^1, f^*\left((\Omega_X^j)^{\otimes m} \otimes A^{\otimes k}\right)\right) = 0, \quad \text{if } m \leq C_A^j k$$

となる正定数 C_A^j を見つければ良い.

ところが，仮定より $j > i$ に対して，

$$f^*\left(\Omega_X^j\right) \;=\; f^*\left(\Lambda^j T_X^*\right) \;\cong\; \oplus_\lambda \mathcal{O}\left(\alpha_\lambda\right),$$
$$\text{where } \;\forall\lambda,\quad \alpha_\lambda \;\leq\; -\sum_{n-j+1\leq k\leq n} a_k \;\boxed{\overset{\because) j>i}{<}}\; 0$$

となるので，与えられた X 上の ample line bundle A に対して

$$f^*(A) \;=\; \mathcal{O}(b),\; b > 0$$

とし $C_A^j > \frac{b}{\sum_{n-j+1\leq k\leq n} a_k} \boxed{\overset{\because) j>i}{>} 0}$ なる任意の C_A^j を取れば良い. □

今回の主定理の証明のもう一つの難しい方向の証明

$$\begin{cases} \forall \text{ ample l.b. } A \text{ on } X, \exists C_A > 0 \text{ s.t.} \\ H^0\left(X, (\Omega_X^j)^{\otimes m} \otimes A^{\otimes k}\right) = 0, \\ \qquad \forall j > i, \forall m, k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } m \geq C_A k \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \quad X,\ \text{(separably)}\ \ (-i)\text{- rationally connected}$$

この難しい方向に対する [CDP15] の $i = 0$ の場合の証明は，余りにさらっと書かれていて良く分からないので，ここでは詳細で丁寧で良く分かる証明を，一般の i の場合に対して与える．なお， ここで用いる pseudoeffective divisor, pseudoeffective line bundle, big line bundle, movable curve 等の基本的な性質に関しては，本証明極めて本質的な役割を果たす Bouchsom-Demailly-Paum-Peternell の基本的な論文 [BDPP13] に加え，Fulger-Lehman [FL] の quick guide が参考になる.

さて，この証明は，以下の 3 つの深い定理を用いて 背理法で 示される：

- Miyaoka-Mori [MM86] が 標数正の代数幾何 を用いて示した uniruledness criterion.
- Bouchsom–Demailly–Paun–Peternell [BDPP13] が，上述の Miyaoka-Mori に加えて，複素解析的手法 (e.g. 大澤-竹腰 L^2-拡張定理) を用いて示した，

$$X\text{: uniruled} \quad \Longleftrightarrow \quad K_X\text{: not peudoeffective}$$

- Graber-Harris-Starr [GHS03] が基礎体が標数 0 の代数閉体の場合に示した，Campana [C92] Kollár-Miyaoka-Mori [KMM92] の MRC-fibration

$$X - - > Z$$

  の底 Z の 非 uniruledness 性.

実際，背理法で $\boxed{X \text{ が } (-i)\text{- rationally connected でないとすると，}}$ X の MRC-fibration

$$f : X - - > Z,$$

に対して，

$$j := \dim Z \ > \ i$$

となり，更に Graber-Harris-Starr [GHS03] より Z は uniruled でないので，Bouchsom-Demailly-Paum-Peternell [BDPP13] より，$K_Z = \Omega^j_Z$ が pseudoeffective となることがわかる．

次にこの条件を X に移入したいのだが，f は rational map なので，$X \setminus U$ の X における余次元が 2 以上の open $U \subseteq X$ でしか定義されてない：

$$X \supseteq U \xrightarrow{f} Z$$

そこで，広中先生の定理 [H64] を適応し，$X \setminus U$ の上で blowup を繰り返して f から morphism $\widehat{f}$ を得る：

$$\begin{tikzcd}
\widehat{X} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[rr, bend left, "\widehat{f}"] & \pi^{-1}(U) \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\cong"'] & \\
X & U \arrow[l, hook'] \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}$$

すると，X 上の 層

$$\mathcal{F} := \left(\pi_* \left(\widetilde{f}^* \left(\Omega^j_Z\right)\right)\right)^{**} \ \subset \ \Omega^j_X$$

が pseudoeffective line bundle となることがわかる．実際，

- $K_Z = \Omega^j_Z$ が pseudoeffective line bundle だったが，$\widetilde{f}$ は全射なので $\widetilde{X}$ 上の movable curve を Z 上の movable curve に移す．　そこで Bouchsom-Demailly-Paum-Peternell [BDPP13] を用いれば，

$$\widetilde{f}^* \left(\Omega^j_Z\right) \ \left(\subset \Omega^j_{\widetilde{X}}\right) \tag{3}$$

  が $\widetilde{X}$ 上の pseudoeffective line bundle となることがわかる．

- (3) に pushforward の double-dual functor $(\pi_*(-))^{**}$ を適応すると，

$$\mathcal{F} := \left(\pi_* \left(\widetilde{f}^* \left(\Omega^j_Z\right)\right)\right)^{**} \ \subset \ \left(\pi_* \left(\Omega^j_{\widetilde{X}}\right)\right)^{**} \ = \ \Omega^j_X \tag{4}$$

  ここで入射性 $\subset$ を示すには，その両辺の reflexive sheaf を U に制限したとき，reflexive sheaf の入射 (3) を $\pi^{-1}(U)$ に制限した　入射になることに注意し，$X \setminus U$ の X における余次元が 2 以上なので，Hartshorne [H80, Proposition 1.6] を適応すればよい．同様に，ここでの等号 $=$ を示すには，その両辺の reflexive sheaf を U に制限して同型 $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U$ で $\pi^{-1}(U)$ に引き戻したとき，共に $\Omega^j_{\pi^{-1}(U)}$ に同一視されることに注意し，再び，$X \setminus U$ の X における余次元が 2 以上なので，Hartshorne [H80, Proposition 1.6] を適応すればよい．

- $\mathcal{F} := \left(\pi_* \left(\widetilde{f}^* \left(\Omega^j_Z\right)\right)\right)^{**}$ が X 上の pseudoeffective line bundle であることを示すには，先ず $\widetilde{X}$ 上の pseudoeffective line bundle $\widetilde{f}^* \left(\Omega^j_Z\right)$ を，$\widetilde{X}$ が smooth project なので

$$N^1(\widetilde{X}) \xrightarrow{\cong} N_{\dim \widetilde{X}-1}(\widetilde{X}) \supset \overline{\mathrm{Eff}}_{\dim \widetilde{X}-1}(\widetilde{X})$$

であることに注意し，以下のように表そう：

$$\widetilde{f}^* \left(\Omega_Z^j\right) \cong \mathcal{L}(D), \quad D \in \overline{\mathrm{Eff}}_{\dim \widetilde{X}-1}(\widetilde{X}) \tag{5}$$

ここで，次が成立する：

$$(\pi_* \mathcal{L}(D))^{**} \cong \mathcal{L}\left(\pi_*(D)\right) \tag{6}$$

実際，両辺とも reflexive sheaf であるが，これらを H に制限して同型 $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U$ で $\pi^{-1}(U)$ に引き戻したとき，共に $\mathcal{L}(D)\big|_{\pi^{-1}(U)}$ に同一視されることに注意し，三度，$X \setminus U$ の X における余次元が 2 以上なので，Hartshorne [H80, Proposition 1.6] を適応すればよい．

すると，

$$\mathcal{F} := \left(\pi_* \left(\widetilde{f}^* \left(\Omega_Z^j\right)\right)\right)^{**} \overset{(5)}{\cong} (\pi_* \mathcal{L}(D))^{**} \overset{(6)}{\cong} \mathcal{L}\left(\pi_*(D)\right), \quad D \in \overline{\mathrm{Eff}}_{\dim \widetilde{X}-1}(\widetilde{X}) \tag{7}$$

となるが，$D \in \overline{\mathrm{Eff}}_{\dim \widetilde{X}-1}(\widetilde{X})$ より

$$\pi_* D \ \in \ \overline{\mathrm{Eff}}_{\dim X-1}(X) \tag{8}$$

となるので，(7) (8) より確かに，$\mathcal{F} := \left(\pi_* \left(\widetilde{f}^* \left(\Omega_Z^j\right)\right)\right)^{**}$ は，smooth proper variety X 上の pseudo-effective line bundle となる．

斯くして $\mathcal{F} := \left(\pi_* \left(\widetilde{f}^* \left(\Omega_Z^j\right)\right)\right)^{**}$ が X 上の psedeoeffective line bundle であることが分かったが，pseudoeffective line bundle の定義，或いは定義より容易に従う特徴づけより，X 上の任意の ample line bundle A と自然数 $C \in \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{F}^{\otimes C} \otimes A$ は $\boxed{\text{big}}$:，即ち

$$h^0\left(X, \left(\mathcal{F}^{\otimes C} \otimes A\right)^{\otimes k}\right) = O\left(k^{\dim X}\right)$$

となる．特に，

$$\exists k_C \in \mathbb{N}, \text{ s.t. } \forall k \geq k_C, \ H^0\left(X, \left(\mathcal{F}^{\otimes C} \otimes A\right)^{\otimes k}\right) \ \neq \ 0.$$

これは，

$$\forall C \in \mathbb{N}, \ \forall k \geq k_C \in \mathbb{N}, \ H^0\left(X, \left(\Omega_X^j\right)^{\otimes Ck} \otimes A^{\otimes k}\right) \ \neq \ 0$$

を導くので，背理法の証明が完成した． □

References

[B96] Arnaud Beauville, *Complex algebraic surfaces,* Translated from the 1978 French original by R. Barlow, with assistance from N. I. Shepherd-Barron and M. Reid. Second edition. London Mathematical Society Student Texts, 34. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. x+132 pp. I

[BDPP13] Sébastien Boucksom, Jean-Pierre Demailly, Mihai Păun, Thomas Peternell, *The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension,* J. Algebraic Geom. 22 (2013), no. 2, 201–248.

[C92] F. Campana, *Connexité rationnelle des variétés de Fano,* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 25 (1992), no. 5, 539–545.

[CDP15] F. Campana, J.-P. Demailly, Th. Peternell, *Rationally connected manifolds and semipositivity of the Ricci curvature.* Recent advances in algebraic geometry, 71–91, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 417, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2015.

[FL] MIHAI FULGER, BRIAN LEHMANN, *QUICK GUIDE TO POSITIVE CONES OF NUMERICAL CLASSES,* 7pp.
https://www2.math.uconn.edu/~fulger/index_files/Pliantexcerpt.pdf

[GHS03] Tom Graber, Joe Harris, Jason Starr, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), no. 1, 57–67.

[H80] Robin Hartshorne, *Stable Reflexive Sheaves,* Math. Ann. 254, 121–176 (1980).

[H64] Heisuke Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero,* I, II. Ann. of Math. (2) 79 (1964), 109–203; ibid. (2) 79 1964 205–326.

[KMM92] János Kollár, Yoichi Miyaoka, Shigefumi Mori, *Rationally connected varieties,* J. Algebraic Geom. 1 (1992), no. 3, 429–448.

[K96] János Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 32, Springer-Verlag, 1996.

[L875] J. Lüroth, *Beweis eines Satzes über rationale Curven*, Math. Ann. (1875), no. 2, 163–165.

[Mil22] J.S. Milne, *Abelian Varieties*, version 2.00, January 2, 2022, 49pp.
https://www.jmilne.org/math/xnotes/AVs.pdf

[M19] Norihiko Minami, *Higher uniruledness, Bott towers and "Higher Fano Manifolds",* RIMS Kôkyûroku No.2135, 141–155, Nov, 2019.

[M21] Norihiko Minami, *On the nonexistence of the hierachy structure : lower rationality = higher ruledness, and very general hypersurfaces as examples,* RIMS Kôkyûroku No.2199, 09, 7pp, Sep, 2021.

[M22] Norihiko Minami, *Retract $(-i)$ rationality and its necessary conditions expressed by unramified presheaves - Noether's problem of a finite group G as an example,* RIMS Kôkyûroku No.2225, 08, 14pp, Jul, 2022.

[MM86] Yoichi Miyaoka, Shigefumi Mori, *A numerical criterion for uniruledness,* Ann. of Math. (2) 124 (1986), no. 1, 65–69.

[M12] Fabien Morel, $\mathbb{A}^1$*-algebraic topology over a field.* Lecture Notes in Mathematics, 2052. Springer, Heidelberg, 2012. x+259 pp.