

A型 Peterson Schubert calculus の幾何と計算

阿部 拓
岡山理科大学

1 序

複素ベクトル空間 \mathbb{C}^n の旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ は、 \mathbb{C}^n の線形部分空間の列からなる空間として、次のように定義される：

$$Fl(\mathbb{C}^n) = \{V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n \mid V_i \text{ は } \mathbb{C}^n \text{ の線型部分空間で } \dim_{\mathbb{C}} V_i = i \ (1 \leq i \leq n)\}.$$

Peterson 多様体は旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ の部分代数多様体であり、 $Fl(\mathbb{C}^n)$ の量子コホモロジー環の研究において重要な役割を担うことで知られる。

本稿では、Peterson 多様体のコホモロジー環において、Peterson Schubert 類と呼ばれる基底を持つ正値性とその幾何学的な意味について概観する。本研究は、堀口達也氏（宇部高専）、鍬田英也氏（近大高専）、曾昊智（中華科技大学）との共同研究である ([1])。

2 Peterson Schubert calculus とは

まず始めに Peterson 多様体の定義を紹介する。 n 次の正則冪零行列

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

を考え、この行列 N を線型写像 $N : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ とみなす。このとき、Peterson 多様体は次で定義される：

$$Pet_n := \{V_{\bullet} \in Fl(\mathbb{C}^n) \mid NV_i \subseteq V_{i+1} \ (1 \leq i \leq n-1)\}.$$

ただし、 NV_i は線型写像 $N : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ による V_i の像である。旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ が持つ自然な代数多様体の構造の下で、 Pet_n はその部分代数多様体となる。

旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ のコホモロジー環は、Schubert 類と呼ばれる「良い」基底を持つことが知られている。実際、 \mathfrak{S}_n を n 次の置換群とすると、各 $w \in \mathfrak{S}_n$ に対して、(opposite) Schubert 多様体 $\Omega_w \subseteq Fl(\mathbb{C}^n)$ が定まり、そのポアンカレ双対を $\sigma_w \in H^*(Fl(\mathbb{C}^n); \mathbb{Z})$ と書くと、これらの集まり $\{\sigma_w \mid w \in \mathfrak{S}_n\}$ は $H^*(Fl(\mathbb{C}^n); \mathbb{Z})$ の基底になることが知られている。この σ_w が Schubert 類である。これらのカップ積は

$$\sigma_w \cup \sigma_v = \sum_{u \in \mathfrak{S}_n} c_{w,v}^u \sigma_u \quad (c_{w,v}^u \in \mathbb{Z})$$

と展開することができるが、ここに現れる係数（構造定数）は**非負整数**である：

$$c_{w,v}^u \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

この構造定数 $c_{w,v}^u$ にまつわる数学は Schubert calculus と呼ばれ、代数・幾何・表現論・組み合わせ論など、様々な立場から研究されている。

面白いことに、Peterson 多様体のコホモロジー環もよく似た性質を持つ。実際、 $[n-1] := \{1, 2, \dots, n-1\}$ とするとき、各部分集合 $J \subseteq [n-1]$ に対して、ある部分多様体 $\Omega_J \subseteq Pet_n$ が定まり、そのポアンカレ双対（の定数倍）を $\varpi_J \in H^*(Pet_n; \mathbb{Z})$ と書くと、これらの集まり $\{\varpi_J \mid J \subseteq [n-1]\}$ は $H^*(Pet_n; \mathbb{Z})$ の基底になる。この ϖ_J は **Peterson Schubert 類** と呼ばれる。これらのカップ積は

$$\varpi_J \cup \varpi_K = \sum_{L \subseteq [n-1]} c_{J,K}^L \varpi_L \quad (c_{J,K}^L \in \mathbb{Z})$$

と展開することができるが、実は、ここに現れる構造定数もまた**非負整数**である：

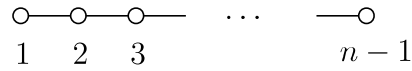
$$c_{J,K}^L \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

この $c_{J,K}^L$ にまつわる数学が **Peterson Schubert calculus** と呼ばれるものであり、その幾何学的な意味を概観するのが本項の目的である。

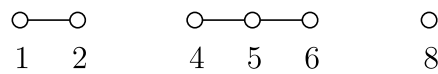
もともと、Peterson Schubert calculus は、Harada-Tymoczko ([5]) によって導入されたものであり、その際に用いられた基底の定義は（結果的には ϖ_J と一致するが）「代数的」なものであり、幾何学的な意味が明確でなかった。今回の共同研究 [1] の目的は、その幾何学的な背景を明らかにすることと、 $c_{J,K}^L$ の組み合わせ論的な公式を確立することであった。そこで、本稿では、Harada-Tymoczko による基底の定義は用いずに、[1] で与えた幾何学的な定義を用いて解説する。Harada-Tymoczko による基底との関係は [1] の 6 節を参照されたい。

3 ϖ_J の幾何的な構成

以下, $[n-1] = \{1, 2, \dots, n-1\}$ とおき, これを A_{n-1} 型の Dynkin 図の頂点集合とみなす (下図参照).



部分集合 $J \subseteq [n-1]$ が与えられると, J を頂点集合とする部分グラフが次のように定まる. すなわち, J に属する2つの頂点 i, j は, それらが A_{n-1} 型の Dynkin 図において辺で結ばれているときに限り辺で結ばれるものと約束する. 例えば, $n=9$ で $J = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$ とすると, J に対応するグラフは次のようになる.



J に属さない頂点を取り除いたグラフだと思ってもらえばよい. 以下, 各部分集合 $J \subseteq [n-1]$ は, それに対応するグラフと同一視して考える.

各 $J \subseteq [n-1]$ に対して, J の頂点に付随する単純互換たちが作る最長元を $w_J \in \mathfrak{S}_n$ と書く. 上で与えた $J = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$ の例でいうと,

$$w_J = (s_1, s_2 \text{ から作る最長元}) \cdot (s_4, s_5, s_6 \text{ から作る最長元}) \cdot (s_8 \text{ から作る最長元})$$

という具合である.

ここで, 旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ においては, 置換 $w \in \mathfrak{S}_n$ に対して, Schubert 多様体 $X_w \subseteq Fl(\mathbb{C}^n)$ と opposite Schubert 多様体 $\Omega_w \subseteq Fl(\mathbb{C}^n)$ が定まることを思い出す. これらを用いて, Pet_n における次の2種類のサイクルを考える.

定義 3.1. 各 $J \subseteq [n-1]$ に対し,

$$\begin{aligned} X_J &:= X_{w_J} \cap Pet_n, \\ \Omega_J &:= \Omega_{w_J} \cap Pet_n \end{aligned}$$

と定める. 定義より, $X_J, \Omega_J \subseteq Pet_n$ である.

旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ における Schubert 多様体 X_w と opposite Schubert 多様体 Ω_w については,

$$\dim_{\mathbb{C}} X_w = \text{codim}_{\mathbb{C}} \Omega_w = \ell(w)$$

が成り立つが (ここで, $\ell(w)$ は置換 w の長さである), Pet_n における X_J, Ω_J についても

類似の事実が成り立つ：

$$\dim_{\mathbb{C}} X_J = \text{codim}_{\mathbb{C}} \Omega_J = |J|.$$

他にも多くの類似点があるが、詳しくは [1] を参照されたい。

次の命題は、各 $J \subseteq [n-1]$ について、 $\Omega_J \subseteq \text{Pet}_n$ がベクトル束の大域切断の零点集合として（しかも期待される余次元を持つ形で）得られるということを意味する。

命題 3.2. 各 $J \subseteq [n-1]$ に対し、 Pet_n 上のベクトル束 V_J とその大域切断 ψ_J が存在し、次が成り立つ：

$$(i) \quad \Omega_J = Z(\psi_J),$$

$$(ii) \quad \text{rank } V_J = \text{codim}_{\mathbb{C}} \Omega_J = |J|.$$

ここで、 $Z(\psi_J)$ は切断 ψ の零点集合である。

この命題を踏まえて、零点集合 $Z(\psi_J)$ が持つ自然なスキーム構造を Ω_J に与えて考えると、 Ω_J のポアンカレ双対は、ベクトル束 V_J の Euler 類に他ならない。すなわち、

$$[\Omega_J] = e(V_J) \cap [\text{Pet}_n] \quad \text{in } H^*(\text{Pet}_n; \mathbb{Z}).$$

が成り立つ。以下、 $PD[\Omega_J] = e(V_J)$ と書く。

4 Pet_n のホモロジー群とコホモロジー環

よく知られているように、上で定義した X_J ($J \subseteq [n-1]$) は Pet_n のホモロジー群の基底を成す：

$$H_*(\text{Pet}_n; \mathbb{Z}) = \bigoplus_{J \subseteq [n-1]} \mathbb{Z}[X_J].$$

3節で述べたように、我々は各部分集合 $J \subseteq [n-1]$ を A_{n-1} 型の Dynkin 図の部分グラフとみなしているが、対応する部分グラフは一般にいくつかの連結成分を持つ。そこで、各連結成分の要素の個数の階乗を全て掛け合わせた整数を $m_J (> 0)$ と定める。上述の例 $J = \{1, 2, \quad, 4, 5, 6, \quad, 8\}$ でいうと、 $m_J = 2! \cdot 3! \cdot 1! = 12$ である。この整数 m_J を用いると、コホモロジー類 $PD[\Omega_J](= e(V_J))$ が次の意味でホモロジー類 $[X_J]$ の双対であることが分かる。

命題 4.1. $H^*(Pet_n; \mathbb{Z})$ と $H_*(Pet_n; \mathbb{Z})$ の自然なペアリングの下で, 任意の $J, K \subseteq [n-1]$ について次が成り立つ:

$$\langle PD[\Omega_J], [X_K] \rangle = \begin{cases} m_J & (J = K), \\ 0 & (J \neq K). \end{cases}$$

そこで, 次の定義を考えるのが自然である.

定義 4.2. 各 $J \subseteq [n-1]$ に対し,

$$\varpi_J := \frac{1}{m_J} PD[\Omega_J] = \frac{1}{m_J} e(V_J)$$

と定める.

この定義と命題 4.1 より, ϖ_J ($J \subseteq [n-1]$) は整数係数のコホモロジー群 $H^*(Pet_n; \mathbb{Z})$ に属し, その基底を成す:

$$H^*(Pet_n; \mathbb{Z}) = \bigoplus_{J \subseteq [n-1]} \mathbb{Z} \varpi_J.$$

従って, 基底同士のカップ積は

$$\varpi_J \cup \varpi_K = \sum_{L \subseteq [n-1]} c_{J,K}^L \varpi_L \quad (c_{J,K}^L \in \mathbb{Z})$$

と展開することができる. 次の定理が示すように, 構造定数 $c_{J,K}^L$ は非負整数である.

定理 4.3. 任意の $J, K, L \subseteq [n-1]$ について次が成り立つ:

$$c_{J,K}^L \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

2 節の最後でも述べたように, (結果的には) 我々の基底 ϖ_J は Harada-Tymoczko による代数的な基底の定義と一致する ([1] の 6 節). それ故, この定理は [2], [3], [4], [5] などにおいて証明されている正值性と同じものであるが, 我々の結果 [1] は, X_J と Ω_J の幾何を用いてこの正值性を証明したものである. 実際, 我々は ϖ_J の定義に現れるベクトル束 V_J が nef 直線束の直和になることを用いて定理 4.3 を得た.

論文 [1] では, 構造定数 $c_{J,K}^L$ の具体的な計算法も解説しているが, ここでは割愛する. $c_{J,K}^L$ の組み合わせ論的な意味については [1] および [6] を参照されたい.

参考文献

- [1] H. Abe, T. Horiguchi, H. Kuwata, and H. Zeng, *Geometry of Peterson Schubert calculus in type A and left-right diagrams*, arXiv:2104.02914.
- [2] E. Drellich, *Monk's rule and Giambelli's formula for Peterson varieties of all Lie types*, J. Algebraic Combin. **41** (2015), no. 2, 539–575.
- [3] R. Goldin and B. Gorbutt, *A positive formula for type A Peterson Schubert calculus*, arXiv:2004.05959.
- [4] R. Goldin, L. Mihalcea, and R. Singh, *Positivity of Peterson Schubert Calculus*, arXiv:2106.10372.
- [5] M. Harada and J. Tymoczko, *A positive Monk formula in the S^1 -equivariant cohomology of type A Peterson varieties*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **103** (2011), no. 1, 40–72.
- [6] T. Horiguchi, *Mixed Eulerian numbers and Peterson Schubert calculus*, arXiv:2104.14083