Seiberg-Witten Floer stable homotopy type and
its applications to corks and the intersection forms of 4-manifolds

九州大学 数理学研究院 笹平 裕史
Hirofumi Sasahira
Faculty of Mathematics,
Kyushu University

1 はじめに

本講究録では，Seiberg-Witten 理論の４次元トポロジーへの応用を二つ紹介する．一つは，４次元多様体 X の交差形式

$$Q_X : H_2(X;\mathbb{Z})/\operatorname{Tor} \otimes H_2(X;\mathbb{Z})/\operatorname{Tor} \to \mathbb{Z}$$

に関することであり，もう一つはコルクと呼ばれるものに関することである． Q_X は２次形式であるが，与えられた２次形式がある４次元多様体の交差形式として実現できるかという基本的な問題がある．Seiberg-Witten 理論はこの問題に関して大きい発展を与えている．コルクは３つ組 (W, Y, ι) のことである．Y はホモロジー３球面，W は Y を境界とするコンパクト，可縮な，滑らかな４次元多様体，$\iota : Y \to Y$ は滑らかな対合で，W の微分同相へ拡張しないものである．コルクは４次元トポロジーにおいて重要な役割を果たすことが知られているが [CFH96, Mat96]，扱いが難しく研究があまり進んでおらず，具体例も少ない．Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型を用いて，コルクの具体例を得られることを紹介する．

2 Seiberg-Witten 方程式

X を滑らかな向きの付いた４次元多様体とし，g を X の Riemann 計量とする． (以後，断らない限り，多様体は滑らかで，向きが付いているとする．) X の $spin^c$ 構造 $\mathfrak{s}$ を選ぶと，次の Seiberg-Witten 方程式を考えることができる．

$$\begin{cases} D_A\phi = 0, \\ F_A^+ = q(\phi). \end{cases}$$

A は X 上の $spin^c$ 接続，D_A は A に付随した Dirac 作用素, ϕ は X 上のスピノール束 $\mathbb{S}^+$ の切断, F_A は A の曲率，F_A^+ は F_A の自己双対な成分， $q(\phi)$ は ϕ に関する２次形式である．

特に $X = Y \times \mathbb{R}$ とする．Y は閉３次元多様体である．このとき，X 上の Seiberg-Witten 方程式は，無限次元空間 $\mathcal{E}$ 上の Chern-Simons-Dirac 汎関数 $CSD : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ の勾配曲線の方程式とみることができ， CSD の Morse ホモロジーが Seiberg-Witten Floer ホモロジー (またはモノポール Floer ホモロジー) という３次元多様体の不変量 [KM07] で，多くの応用をもつ．

3 ４次元多様体の交叉形式

X を閉４次元多様体とする．交差形式

$$\begin{array}{rcl} Q_X : H_2(X;\mathbb{Z})/\operatorname{Tor} \otimes H_2(X;\mathbb{Z})/\operatorname{Tor} & \to & \mathbb{Z} \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \langle PD(\alpha) \cup PD(\beta), [X] \rangle \end{array}$$

はユニモジュラーな２次形式になる．PD は Poincare 双対を表す．ユニモジュラーな２次形式 Q が与えられたとき，Q を交差形式とする４次元多様体 X が存在するかというのは４次元幾何学において基本的な問題である．*spin* ４次元多様体に限って話をする．*spin* 閉４次元多様体の交差形式に関しては松本幸夫氏による次の予想がある．

予想 1 ([Mat82])**.** X を滑らかな *spin* 閉４次元多様体とする．このとき，

$$\frac{11}{8}|\sigma(X)| \leq b_2(X)$$

が成り立つ．ここで，$\sigma(X)$ は Q_X の符号数 $b^+(X) - b^-(X)$ である．$b^+(X), b^-(X)$ は Q_X の正の固有値の数，$b^-(X)$ は負の固有値の数.

この予想に関して次が証明されている．

定理 2 ([Fur01])**.** X を滑らかな *spin* 閉４次元多様体とする．$b^+(X), b^-(X) \neq 0$ とする．このとき，

$$\frac{10}{8}|\sigma(X)| + 2 \leq b_2(X).$$

証明は Seiberg-Witten 方程式の有限次元近似と，Pin(2) 同変写像に関する Borsuk-Ulam 型定理の組み合わせである．ここで，

$$\mathrm{Pin}(2) = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\} \coprod \{zj | z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} \subset \mathbb{H}$$

である． 四元数体 $\mathbb{H}$ を自然に Pin(2) 表現空間とみなし，$\tilde{\mathbb{R}}$ を Pin(2) の非自明な実１次元表現とする．$z \in S^1, x \in \tilde{\mathbb{R}}$ に対して，

$$z \cdot x = x,\ j \cdot x = -x$$

次の Borsuk-Ulam 型定理が成り立つ.

定理 3 ([Fur01])**.** $b > 0$ とする．Pin(2) 同変写像

$$f : (\mathbb{H}^{m+a} \oplus \tilde{\mathbb{R}}^n)^+ \to (\mathbb{H}^m \oplus \tilde{\mathbb{R}}^{n+b})^+$$

が存在するならば,

$$2a + 1 \leq b$$

である．$\mathbb{H}^+, \tilde{\mathbb{R}}^+$ は一点コンパクト化を表す.

$(X, \mathfrak{s})$ を滑らかな閉 *spin* ４次元多様体とする． このとき，スピノール束 $\mathbb{S}^{\pm}$ は $\mathbb{H}$ ベクトル束である．また，$\Omega^1(X), \Omega^+(X)$ に $j \in \mathrm{Pin}(2)$ 作用を -1 倍で定義すると，次の Seiberg-Witten 写像は Pin(2) 同変写像である．

$$\begin{array}{rcl} SW : L^2_k(\Gamma(\mathbb{S}^+) \oplus \operatorname{im} d^*) & \to & L^2_{k-1}(\Gamma(\mathbb{S}^-) \oplus \Omega^+(X)) \\ (\phi, a) & \mapsto & (D_{A_0+a}\phi, d^+a + q(\phi)) \end{array}$$

ここで，A_0 は固定された *spin* 接続である．

この写像は次の和に分解できる:

$$\begin{aligned} &SW = L + C, \\ &L = (D_{A_0}, d^+),\ C = SW - L. \end{aligned}$$

L の 2 つの成分はそれぞれは Fredholm 作用素で，その指数は

$$\operatorname{ind}_{\mathbb{H}} D = \frac{-\sigma(X)}{16}, \ \operatorname{ind} d^{+} = b^{+}(X)$$

で与えられる．

有限次元部分空間 $U' \subset L^2_{k-1}(\Gamma(\mathbb{S}^-) \oplus \Omega^+(X))$ をとり，

$$U = L^{-1}(U')$$

とおく．U' は $\operatorname{im} L$ と横断的で, $\dim U' \gg 0$ とする．Pin(2) 表現空間として，

$$U \cong \mathbb{H}^{m+a} \oplus \tilde{\mathbb{R}}^{n}, \quad U' \cong \mathbb{H}^{m} \oplus \tilde{\mathbb{R}}^{n+b^+(X)}$$

ここで, $a = \operatorname{ind}_{\mathbb{H}} D_{A_0} = \dfrac{-\sigma(X)}{16}$ である．$p_{U'} SW|_U$ を考えることにより，Pin(2) 同変写像

$$f : (\mathbb{H}^{m+a} \oplus \tilde{\mathbb{R}}^{n})^+ \to (\mathbb{H}^{m} \oplus \tilde{\mathbb{R}}^{n+b^+(X)})^+$$

を得る．一点コンパクト化に写像が伸びることは，Seiberg-Witten 写像のコンパクト性を用いる．この写像に定理 3 を適用すれば,

$$-\frac{\sigma(X)}{8} + 1 \le b^+(X)$$

を得る．簡単な計算により，この不等式が定理 2 と同値である．

このような Seiberg-Witten 方程式の応用を境界付き 4 次元多様体へ拡張するとき，Floer 理論が必要になる．

4 Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型

$(Y, \mathfrak{t})$ を $spin^c$ 閉 3 次元多様体とする．4 次元多様体 $Y \times \mathbb{R}$ 上の Seiberg-Wittten 方程式は, 無限次元多様体 $\mathcal{E}$ 内の曲線

$$\gamma = (\phi, a) : \mathbb{R} \to \mathcal{E}$$

に対する方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = D_{A_0 + a}\phi \\ \dfrac{\partial a}{\partial t} = *F_{A_0+a} + q(\phi) \end{cases}$$

とかける．A_0 は固定された $spin^c$ 接続である．これは Chern-Simons-Dirac 汎関数 $CSD : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ の勾配曲線の方程式と見ることができる．形式的には, Seiberg-Witten 方程式は流れ

$$\varphi^{SW} : \mathcal{E} \times \mathbb{R} \to \mathcal{E}$$

定めているといえる．Manolescu [Man03] は Kronheimer-Mrowka [KM07] の Seiberg-Witten Floer ホモロジーを精密化する Seberg-Witten Floer 安定ホモトピー型という不変量を定義した．その構成は $b_1(Y) = 0$ の場合に限られていた．$b_1(Y) > 0$ の場合へ拡張するのは，困難があり容易ではないが，最近，Lin-Khandhawit-笹平 [KLS18a, KLS18b]， 笹平-Stoffregen [SS21] によってなされている．Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型は, 流れ φ^{SW} に Conley の指数理論 [Con78] を適用して定義される．

Conley の指数理論について簡単に説明する．有限次元多様体 M 上に流れ

$$\varphi : M \times \mathbb{R} \to M$$

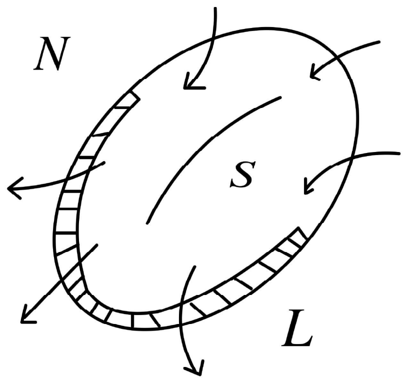
があったとする．$A \subset M$ に対して

$$\mathrm{Inv}(A) = \{x \in A | \varphi(x, \mathbb{R}) \subset A\}$$

とかくことにする． S をコンパクトな φ の不変集合とする． S のコンパクトな近傍 A があって，$S = \mathrm{Inv}(A)$ となるとき，S を孤立不変集合といい，S の Conley 指数

$$I(S) = [N/L]$$

が定義される．N, L は A のコンパクトな部分集合で, $L \subset N \subset A$, $S \subset N \setminus L$ を満たし, L は N の出口集合と呼ばれる．$[N/L]$ は商集合 N/L の基点付き空間としてのホモトピー型である．下の図を参照:



L は左下の射線部で，流れが N から出ていく部分である．(N, L) の選び方は一通りではないが, 基点付きホモトピー型 $[N/L]$ はただ一つに決まる．

無限次元の流れ φ^{SW} に，直接 Conley の理論は適用できないため，φ^{SW} を有限次元近似して，適用する．その際，Seiberg-Witten 方程式のよいコンパクト性を壊さないように，有限次元近似をとる必要があるが，$b_1(Y) > 0$ の場合はそれが難しく困難になっていた． [KLS18a, KLS18b, SS21] では，その困難を解決し，$b_1(Y) > 0$ の場合に Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型 $\mathbb{SWF}(Y, \mathfrak{t})$ を定義した． $(Y, \mathfrak{t})$ が *spin* のときは，$\mathbb{SWF}(Y, \mathfrak{t})$ は $\mathrm{Pin}(2)$ 同変安定ホモトピー型として定義される．また, [SS21] の構成は $spin^c$ 3次元多様体の族 $(Y, \mathfrak{t}) \to E \to B$ にも適用でき，族の Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型 $\mathbb{SWF}(E)$ も定義できる．

$(X, \mathfrak{s})$ がコンパクトな *spin* 4次元多様体で境界を $(Y, \mathfrak{t})$ とする．X 上の Seiberg-Witten 方程式を有限次元近似して, $\mathrm{Pin}(2)$ 写像

$$f : (\mathbb{H}^{m+a} \oplus \tilde{\mathbb{R}}^n)^+ \to (\mathbb{H}^m \oplus \tilde{\mathbb{R}}^{n+b^+(X)})^+ \wedge \mathbb{SWF}(Y, \mathfrak{t})$$

が得られる． この f に対して，定理 3 のある一般化を適用して，次を得る．

定理 4 ([Man14, SS21])**.** $(X, \mathfrak{s})$ をコンパクト *spin* 4次元多様体で, 境界を $(Y, \mathfrak{s})$ とする．$b_1(Y) > 0$ のときは，$Pic(Y) = H^1(Y; \mathbb{R})/H^1(Y; \mathbb{Z})$ でパラメータ付けらる *Dirac* 作用素の族の指数 $\mathrm{Ind}\, D$ が $K^1(Pic(Y))$ の中で 0 とする．$b^+(X) > 0$ なら

$$-\frac{\sigma(X)}{8} + 1 \leq b^+(X) + \kappa(Y, \mathfrak{s})$$

となる．$\kappa(Y, \mathfrak{s}) \in \frac{1}{8}\mathbb{Z}$ は, $\mathrm{Pin}(2)$ 同変 K 理論 $K_{\mathrm{Pin}(2)}(\mathbb{SWF}(Y, \mathfrak{t}))$ を用いて定義される不変量である．

5　4次元多様体のコルク

コルクとは三つ組 (W, Y, ι) のことである．Y はホモロジー3球面，W は Y を境界とするコンパクト，滑らかで, 可縮な4次元多様体, $\iota : Y \to Y$ は滑らかな対合で，W の微分同相へ拡張しないものである．コルクは単連結閉4次元多様体の微分構造に関して，重要な役割を果たしている [CFH96, Mat96]. コルク (やその変種) は Akubult, 安井, Gompf, Lin, Ruberman, Saveliev らによって Seiberg-Witten 理論を用いて研究されている [AY08, AY13, Gom17, LRS]．これらの研究では，コルクを適当な閉4次元多様体に埋め込み，その Seiberg-Witten 不変量を用いることでコルクを研究している．より最近では，閉4次元多様体への埋め込みでなく，Heegaard Floer ホモロジーを用いた研究が Dai-Hedden-Mallick [DHM20] によりなされている．[DHM20] では新たなコルクの例 $(W, S^3_{+1}(6_1), \iota)$ が発見されている．6_1 は S^3 の中の stevedore 結び目で, $S^3_{+1}(6_1)$ は S^3 を 6_1 に沿って $+1$ 手術した多様体である．W は $S^3_{+1}(6_1)$ を境界とする可縮な4次元多様体である．筆者と今野北斗氏は，[SS21] で定義された *spin*^{c} 3次元多様体の族 $(Y, \mathfrak{t}) \to E \to B$ に対する Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型 $\mathbb{SWF}(E)$ を用いて，次を証明した．

定理 5. $(\natural^n W, \#^n S^3_+(6_1), \#^n \iota)$ はコルクである．ここで, $W \natural W$ は境界連結和，$Y \# Y$ は連結和である．

参考文献

[AY08] Selman Akbulut and Kouichi Yasui. Corks, plugs and exotic structures. *J. Gökova Geom. Topol*, 2:40–82, 2008.

[AY13] Selman Akbulut and Kouichi Yasui. Cork twisting exotic stein 4-manifolds. *J. Differential Geom*, 93:1–36, 2013.

[CFH96] C.L. Curtis, M.H. Freedman, and W.C. Hsiang. A decomposition theorem for h-cobordant smooth simply-connected compact 4-manifolds. *Invent. Math*, 123:343–348, 1996.

[Con78] Charles Conley. *Isolated invariant sets and the Morse index*, volume 38 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978.

[DHM20] Irving Dai, Matthew Hedden, and Abhishek Mallick. Corks, involutions, and Heegaard Floer homology. *preprint, arXiv:2002.02326*, 2020.

[Fur01] M. Furuta. Monopole equation and the $\frac{11}{8}$-conjecture. *Math. Res. Lett.*, 8(3):279–291, 2001.

[Gom17] Robert Gompf. Infinite order corks. *Geom. Topol*, 21:2475–2484, 2017.

[KLS18a] Tirasan Khandhawit, Jianfeng Lin, and Hirofumi Sasahira. Unfolded Seiberg–Witten Floer spectra, i: Definition and invariance. *Geometry & Topology*, 22(4):2027–2114, 2018.

[KLS18b] Tirasan Khandhawit, Jianfeng Lin, and Hirofumi Sasahira. Unfolded Seiberg-Witten Floer spectra, ii: Relative invariants and the gluing theorem. *To appear in Journal of Differential Geometry, arXiv:1809.09151*, 2018.

[KM07] Peter B Kronheimer and Tomasz Mrowka. *Monopoles and three-manifolds*, volume 10. Cambridge University Press Cambridge, 2007.

[LRS] Jianfeng Lin, Daniel Ruberman, and Nkolai Saveliev. On the froyshov invariant and monopole lefschetz number. *arXiv:1802.07704v1.*

[Man03] Ciprian Manolescu. Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type of three-manifolds with $b_1 = 0$. *Geom. Topol.*, 7:889–932, 2003.

[Man14] Ciprian Manolescu. On the intersection forms of spin four-manifolds with boundary. *Math. Ann.*, 359(3-4):695–728, 2014.

[Mat82] Yukio Matsumoto. On the bounding genus of homology 3-spheres. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. Math*, 29:287–318, 1982.

[Mat96] Rostislav Matveyev. A decomposition of smooth simply-connected h-cobordant 4-manifolds. *J. Differential Geom*, 44:571–582, 1996.

[SS21] Hirofumi Sasahira and Matthew Stoffregen. Seiberg-Witten Floer spectra for $b_1 > 0$. *preprint, arXiv:2103.16536*, 2021.