MIXED EULERIAN NUMBER と PETERSON SCHUBERT CALCULUS の関係

宇部工業高等専門学校　堀口　達也
TATSUYA HORIGUCHI
NATIONAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY, UBE COLLEGE

1. 序文

mixed Eulerian number は [15] で Postnikov により導入されたもので，カタラン数や二項係数，Eulerian number といった古典的な組合せ数を含むものである．mixed Eulerian number の組合せ的な公式は [7, 13, 15] などで与えられている．近年，mixed Eulerian number は色んな観点から研究されている ([5, 14])．特に，[5] では A 型において mixed Eulerian number の単純な計算方法を与えた．本稿では，任意の Lie type の mixed Eulerian number の単純な計算方法を Peterson Schubert calculus と関連付けて解説する．本稿は [9] の結果の概説である．(本稿で扱うコホモロジーの係数は，特に明示されていない場合は $\mathbb{R}$ を表す．)

2. Permutohedron

n を正の整数とし，$[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ とおく．集合 $[n]$ 上の置換群 S_n は座標の入替により，$\mathbb{R}^n$ に作用する．点 $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ を取り，点 a の S_n-軌道の点たちの convex hull を *permutohedron* といい，$P_n(a)$ と書く．

$$P_n(a) := \mathrm{ConvexHull}\{(a_{w(1)}, \ldots, a_{w(n)}) \in \mathbb{R}^n \mid w \in S_n\}.$$

permutohedron $P_n(a)$ は超平面 $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n a_i\}$ の中にいる．$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ と仮定しても一般性を失わない．

例 2.1. (1) $a = (1, 0, \ldots, 0)$ とすると，$\Rightarrow P_n(a)$ は *simplex.*

(2) $1 \leq k \leq n-1$ に対し，$a = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k})$ とおく．このとき，$P_n(a)$ を $\Delta_{k,n}$ と書き，*hypersimplex* と呼ぶ.

$a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ $(a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n)$ に対し，

$$u_1 = a_1 - a_2, u_2 = a_2 - a_3, \ldots, u_{n-1} = a_{n-1} - a_n$$

とおく．このとき，

$$P_n(a) = u_1\Delta_{1,n} + u_2\Delta_{2,n} + \cdots + u_{n-1}\Delta_{n-1,n}$$

と書けることが知られている．ここで，右辺は Minkowski 和を表す．Postnikov は [15] において，$c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で $c_1 + \cdots + c_{n-1} = n-1$ を満たすものに対し，*mixed*

Eulerian number $A_{c_1,\ldots,c_{n-1}}$ を次で定義した．

$$\mathrm{Vol}(P_n(a)) = \sum_{\substack{(c_1,\ldots,c_{n-1})\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}\\ c_1+\cdots+c_{n-1}=n-1}} A_{c_1,\ldots,c_{n-1}} \frac{u_1^{c_1}}{c_1!}\cdots\frac{u_{n-1}^{c_{n-1}}}{c_{n-1}!}.$$

つまり，permutohedron $P_n(a)$ の volume を $u_1,\ldots,u_{n-1}$ の多項式で表したときの単項式 $\frac{u_1^{c_1}}{c_1!}\cdots\frac{u_{n-1}^{c_{n-1}}}{c_{n-1}!}$ の係数で mixed Eulerian number $A_{c_1,\ldots,c_{n-1}}$ を定義した．言い換えると，mixed Eulerian number は hypersimplex $\Delta_{k,n}$ たちの mixed volume に $(n-1)!$ 倍したものを表している．Postnikov は permutohedron $P_n(a)$ の体積公式を与えた．

定理 2.2. ([15, Theorem 3.1]) $t_1,\ldots,t_n\in\mathbb{R}$ を相異なる実数とする．$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$ とする．このとき，*permutohedron* $P_n(a)$ の体積は

$$\mathrm{Vol}(P_n(a)) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{w\in S_n}\frac{(a_1t_{w(1)}+\cdots+a_nt_{w(n)})^{n-1}}{(t_{w(1)}-t_{w(2)})(t_{w(2)}-t_{w(3)})\cdots(t_{w(n-1)}-t_{w(n)})} \tag{2.1}$$

で与えられる．ここで，右辺の t_i たちはキャンセルすることに注意．

(2.1) における右辺の式は Atiyah–Bott–Berline–Vergne formula の形をしている．そこで，mixed Eulerian number $A_{c_1,\ldots,c_{n-1}}$ をトポロジーの観点から調べてみようと思ったのが，[9] の motivation である．

3. PERMUTOHEDRAL VARIETY

旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n) := \{V_\bullet := (V_1\subset V_2\subset\cdots\subset V_n=\mathbb{C}^n) \mid \dim_{\mathbb{C}} V_i = i,\ 1\leq i\leq n\}$ の部分多様体 X_n を次で定義する．行列 S を相異なる固有値を持つ対角行列

$$S = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\quad \lambda_i\neq\lambda_j\ (i\neq j)$$

とし，

$$X_n := \{V_\bullet\in Fl(\mathbb{C}^n) \mid SV_i\subset V_{i+1},\ 1\leq i\leq n-1\}$$

と定める．このとき，X_n は $a_1>a_2>\cdots>a_n$ とする permutohedron $P_n(a)$ に付随する滑らかな toric 多様体であり，$\dim_{\mathbb{C}} X_n = n-1$ である ([8])．この X_n は permutohedral variety と呼ばれている．B を一般線形群 $GL_n(\mathbb{C})$ の上三角行列全体とすると，よく知られているように自然に $Fl(\mathbb{C}^n)\cong GL_n(\mathbb{C})/B$ と同一視される．$GL_n(\mathbb{C})$ の中の対角行列全体を T とおくと，T は旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)\cong GL_n(\mathbb{C})/B$ 上に自然に作用するが，この T-作用は X_n を保つ．permutohedral variety の T-固定点集合 X_n^T は旗多様体の T-固定点集合 $Fl(\mathbb{C}^n)^T$ と一致し，$Fl(\mathbb{C}^n)^T$ は permutation flag 全体からなるため，$X_n^T\cong S_n$ と自然に同一視される．

旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ 上の tautological vector bundles $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n$ は $E_i := \{(V_\bullet,z)\in Fl(\mathbb{C}^n)\times\mathbb{C} \mid z\in V_i\}$ $(1\leq i\leq n)$ により定義される．これらの商 E_i/E_{i-1} を取ることにより，line bundle が得られるが，この dual $(E_i/E_{i-1})^*$ を取ったものの

T-equivariant first Chern class を $\tilde{\tau}_i \in H^2_T(Fl(\mathbb{C}^n))$，(ordinary) first Chern class を $\tau_i \in H^2(Fl(\mathbb{C}^n))$ とおく．$\mathbb{C}_i$ を次で定義される T の 1 次元表現とする．

$$g = \mathrm{diag}(g_1, \dots, g_n) \in T \text{ と } z \in \mathbb{C}_i \text{に対して，} g \cdot z = g_i z.$$

$\mathbb{C}_i$ の双対表現 $(\mathbb{C}_i)^*$ の T-equivariant first Chern class を $t_i \in H^2_T(\mathrm{pt})$ とおく．このとき，$H^*_T(\mathrm{pt}) = \mathbb{R}[t_1, \dots, t_n]$ であり，よく知られているように旗多様体の (同変) コホモロジー環は

$$H^*_T(F\ell(\mathbb{C}^n)) \cong \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n]/(e_i(x) - e_i(t) \mid 1 \le i \le n): \ x_i \mapsto \tilde{\tau}_i, \ t_i \mapsto t_i$$
$$H^*(F\ell(\mathbb{C}^n)) \cong \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/(e_i(x) \mid 1 \le i \le n): \ x_i \mapsto \tau_i$$

で与えられる．ここで，e_i は i 次基本対称式を表す．

記号の乱用ではあるが, 制限写像 $H^*_T(Fl(\mathbb{C}^n)) \to H^*_T(X_n)$ と $H^*(Fl(\mathbb{C}^n)) \to H^*(X_n)$ による $\tilde{\tau}_i \in H^2_T(Fl(\mathbb{C}^n))$ と $\tau_i \in H^2(Fl(\mathbb{C}^n))$ の像をそれぞれ同じ記号 $\tilde{\tau}_i, \tau_i$ で表すことにする．$\tilde{\tau}_i \in H^2_T(Fl(\mathbb{C}^n))$ を固定点 $w \in S_n \cong Fl(\mathbb{C}^n)^T$ に制限すると，$\tilde{\tau}_i|_w = t_{w(i)}$ であるので，包含写像から誘導される可換図式

$$\begin{array}{ccc}
H^*_T(Fl(\mathbb{C}^n)) & \xrightarrow{\text{injective}} & H^*_T(Fl(\mathbb{C}^n)^T) \cong \bigoplus_{w \in S_n} \mathbb{R}[t_1, \dots, t_n] \\
\downarrow & & \downarrow \text{identity map} \\
H^*_T(X_n) & \xrightarrow{\text{injective}} & H^*_T(X_n^T) \cong \bigoplus_{w \in S_n} \mathbb{R}[t_1, \dots, t_n]
\end{array}$$

より，$\tilde{\tau}_i \in H^2_T(X_n)$ に対しても，固定点 $w \in S_n \cong X_n^T$ に制限すると，

$$\tilde{\tau}_i|_w = t_{w(i)}$$

が成立．Atiyah–Bott–Berline–Vergne formula [4, 6] より，equivariant Gysin map $\mathrm{pr}^T_! : H^*_T(X_n) \to H^{*-2(n-1)}_T(\mathrm{pt})$ による $(a_1\tilde{\tau}_1 + \cdots + a_n\tilde{\tau}_n)^{n-1}$ の像は次のように計算される．

$$\mathrm{pr}^T_!\left((a_1\tilde{\tau}_1 + \cdots + a_n\tilde{\tau}_n)^{n-1}\right) = \sum_{w \in S_n} \frac{(a_1\tilde{\tau}_1 + \cdots + a_n\tilde{\tau}_n)^{n-1}|_w}{e_w}.$$

ここで，e_w は固定点 $w \in S_n \cong \mathrm{X}_n^T$ の normal bundle の T-equivariant Euler class を表す．[8, Lemma 7] から $e_w = (t_{w(1)} - t_{w(2)})(t_{w(2)} - t_{w(3)}) \cdots (t_{w(n-1)} - t_{w(n)})$ が分かるので，次を得る．

(3.1)

$$\mathrm{pr}^T_!\left((a_1\tilde{\tau}_1 + \cdots + a_n\tilde{\tau}_n)^{n-1}\right) = \sum_{w \in S_n} \frac{(a_1 t_{w(1)} + \cdots + a_n t_{w(n)})^{n-1}}{(t_{w(1)} - t_{w(2)})(t_{w(2)} - t_{w(3)}) \cdots (t_{w(n-1)} - t_{w(n)})}.$$

この式の右辺は，(2.1) の右辺の式の $(n-1)!$ 倍である．一方，(ordinary) Gysin map $\mathrm{pr}_! : H^*(X_n) \to H^{*-2(n-1)}(\mathrm{pt})$ との可換図式

$$\begin{array}{ccc} H_T^*(X_n) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_!^T} & H_T^{*-2(n-1)}(\mathrm{pt}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(X_n) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_!} & H^{*-2(n-1)}(\mathrm{pt}) \end{array}$$

より，

(3.2)

$$\mathrm{pr}_!^T\big((a_1\tilde{\tau}_1 + \cdots + a_n\tilde{\tau}_n)^{n-1}\big) = \mathrm{pr}_!\big((a_1\tau_1 + \cdots + a_n\tau_n)^{n-1}\big) = \int_{X_n} (a_1\tau_1 + \cdots + a_n\tau_n)^{n-1}$$

を得る．(2.1), (3.1), (3.2) より，$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ に対して，

$$\mathrm{Vol}(P_n(a)) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{X_n} (a_1\tau_1 + \cdots + a_n\tau_n)^{n-1} \tag{3.3}$$

が得られる．次に $1 \leq i \leq n-1$ に対して，$\varpi_i := \tau_1 + \cdots + \tau_i \in H^2(X_n)$ とおくと，

(3.4)

$$\begin{aligned} a_1\tau_1 + \cdots + a_n\tau_n &= a_1\varpi_1 + a_2(\varpi_2 - \varpi_1) + \cdots + a_{n-1}(\varpi_{n-1} - \varpi_{n-2}) + a_n(-\varpi_{n-1}) \\ &= u_1\varpi_1 + \cdots + u_{n-1}\varpi_{n-1}. \end{aligned}$$

ここで，最初の等号は $H^*(Fl(\mathbb{C}^n))$ の関係式から来る $\tau_1 + \cdots + \tau_n = 0$ を用いた．(3.3) と (3.4) より，

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(P_n(a)) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_{X_n} (u_1\varpi_1 + \cdots + u_{n-1}\varpi_{n-1})^{n-1} \\ &= \sum_{\substack{(c_1,\ldots,c_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1} \\ c_1 + \cdots + c_{n-1} = n-1}} \left(\int_{X_n} \varpi_1^{c_1}\varpi_2^{c_2}\cdots\varpi_{n-1}^{c_{n-1}}\right) \frac{u_1^{c_1}}{c_1!}\cdots\frac{u_{n-1}^{c_{n-1}}}{c_{n-1}!} \end{aligned}$$

が得られるので，mixed Eulerian number $A_{c_1,\ldots,c_{n-1}}$ の定義から次の等式が得られる．

$$A_{c_1,\ldots,c_{n-1}} = \int_{X_n} \varpi_1^{c_1}\varpi_2^{c_2}\cdots\varpi_{n-1}^{c_{n-1}}. \tag{3.5}$$

注意 3.1. 上の公式 (3.5) は既に様々な観点から証明されている ([5, 14])．ただし，[5, 14] においては A 型に限った議論であるが，上記の議論は任意の *Lie type* でも通用する ([9] 参照).

4. Peterson Schubert calculus との関係

行列 N をジョルダンブロックが唯一つの冪零行列

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

とする．(簡単のためジョルダン標準形に取っておく．) Peterson variety は

$$\mathrm{Pet}_n := \{V_\bullet \in Fl(\mathbb{C}^n) \mid NV_i \subset V_{i+1},\ 1 \leq i \leq n-1\}$$

で定義され，$n \geq 3$ のとき特異点を持ち ([11, 12])，$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Pet}_n = n-1$ である ([12])．permutohedral variety X_n と Peterson variety Pet_n はともに旗多様体の既約な部分代数多様体であるので，これらは $H^*(Fl(\mathbb{C}^n))$ のコホモロジー類を定めるが，実はこれらが等しいことが [1] の結果から分かる．(任意の Lie type の場合は，[2] の結果より分かる．[1, 2] では，より一般の Hessenberg variety について議論している．) したがって，(3.5) は次のように書き直せる．

$$A_{c_1,\ldots,c_{n-1}} = \int_{\mathrm{Pet}_n} \varpi_1^{c_1}\varpi_2^{c_2}\cdots\varpi_{n-1}^{c_{n-1}}. \tag{4.1}$$

ここで，再び記号の乱用ではあるが，上記の式に現れる ϖ_i は制限写像 $H^*(Fl(\mathbb{C}^n)) \to H^*(\mathrm{Pet}_n)$ による $\tau_1 + \cdots + \tau_i \in H^2(Fl(\mathbb{C}^n))$ の像を表す．(4.1) の右辺が Peterson Schubert calculus を表している．詳細については [3]．少しだけ述べると，[3] では，$\mathbb{Z}$ 係数コホモロジー $H^*(\mathrm{Pet}_n;\mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$-基底 $\{\varpi_J \mid J \subset [n-1]\}$ を構成した．この基底 $\{\varpi_J \mid J \subset [n-1]\}$ は，Peterson variety と opposite Schubert variety の交わりを反映するようなものであり，通常の旗多様体上の Schubert calculus と似た振舞をする．ϖ_J は $\prod_{j\in J}\varpi_j$ にある有理数 $\frac{1}{m_J}$ をかけたものと一致することに注意しておく．この基底に関する構造定数，すなわち

$$\varpi_J \cdot \varpi_K = \sum_{L\subset[n-1]} d_{JK}^L \varpi_L \quad \text{in } H^*(\mathrm{Pet}_n;\mathbb{Z})$$

における係数 d_{JK}^L の計算方法を与えることを Peterson Schubert calculus という．[3] では，この構造定数 d_{JK}^L の組合せ的な計算方法も与えた．その鍵となったのが，次の公式である ([3, Proposition 4.10 and Lemma 5.1])．

(1) $1 \leq a \leq i \leq b \leq n-1$ に対して

$$\varpi_a\cdots\varpi_i^2\cdots\varpi_b = \frac{b-i+1}{b-a+2}\varpi_{a-1}\varpi_a\cdots\varpi_b + \frac{i-a+1}{b-a+2}\varpi_a\cdots\varpi_b\varpi_{b+1}. \tag{4.2}$$

(2) 次が成立．

$$\int_{\mathrm{Pet}_n} \varpi_1\varpi_2\cdots\varpi_{n-1} = (n-1)!. \tag{4.3}$$

mixed Eulerian number の話に戻ると， mixed Eulerian number $A_{c_1,\ldots,c_{n-1}}$ は (4.1) で与えられ，(4.1) の右辺で ϖ_i^2 が現れたら (4.2) を用いて square free monomial の一次結合として書ける．この操作を繰り返し行うと，最終的に積分の中身は $\varpi_1\varpi_2\cdots\varpi_{n-1}$

のスカラー倍で明示的に表せるが，(4.3) を用いて mixed Eulerian number $A_{c_1,\dots,c_{n-1}}$ が計算できる．なお，[3] で導入した組合せ的なゲーム (left-right diagram) を用いた $A_{c_1,\dots,c_{n-1}}$ の記述もできる ([9] 参照).

注意 4.1. *mixed Eulerian number* の上記の計算方法は，任意の *Lie type* に拡張できる ([9])．また，[5] において *Peterson Schubert calculus* の言葉では述べられていないが，本質的には上記の計算方法と同じものが A 型に限って既に与えられていることに注意.

5. 任意の Lie type の結果

最後に，ここまで議論した内容の任意の Lie type バージョンを解説する．Φ を rank n の既約なルート系，Λ を weight lattice とし，$\Lambda_{\mathbb{R}} = \Lambda \otimes \mathbb{R}$ とおく．点 $\chi \in \Lambda_{\mathbb{R}}$ の Weyl 群 W による軌道の点たちの convex hull を *weight polytope* といい， $P_\Phi(\chi)$ と書く.

$$P_\Phi(\chi) := \mathrm{ConvexHull}\{w(\chi) \in \Lambda_{\mathbb{R}} \mid w \in W\}.$$

simple root たちからなる集合 $\Sigma := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \Phi$ を一つ取る．$\Lambda_{\mathbb{R}}$ 上の volume form を，simple root $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ たちで生成される平行四辺形の volume を 1 として定める．$\{\varpi_1, \dots, \varpi_n\}$ を fundamental weight たちからなる集合とすると，これらは $\Lambda_{\mathbb{R}}$ の基底をなすので，$\chi = u_1\varpi_1 + \cdots + u_n\varpi_n$ と書ける．weight polytope $P_\Phi(\chi)$ の volume は $u_1, \dots, u_n$ を変数とする次数 n の斉次多項式であり，単項式 $\frac{u_1^{c_1}}{c_1!} \cdots \frac{u_n^{c_n}}{c_n!}$ の係数を mixed Φ-Eulerian number といい，$A^\Phi_{c_1,\dots,c_n}$ と書く ([15]).

$$\mathrm{Vol}(P_\Phi(u_1\varpi_1 + \cdots + u_n\varpi_n)) = \sum_{\substack{(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0} \\ c_1+\cdots+c_n=n}} A^\Phi_{c_1,\dots,c_n} \frac{u_1^{c_1}}{c_1!} \cdots \frac{u_n^{c_n}}{c_n!}.$$

4 節で議論した内容が一般の Lie type でも議論できることを見ていく．G を $\mathbb{C}$ 上の単連結な半単純代数群とし[1]，そのボレル部分群 B を一つ固定する．G と B の Lie 代数をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}$ と書き，対応するルート系を Φ と書く．$N \in \mathfrak{g}$ を regular nilpotent element とする．*Peterson variety* Pet_Φ は次で定義される旗多様体 G/B の部分多様体である.

$$\mathrm{Pet}_\Phi := \left\{ gB \in G/B \mid \mathrm{Ad}(g^{-1})(N) \in \mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{g}_{-\alpha_i} \right\}.$$

ここで，$\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ は negative simple root $-\alpha_i$ に付随する root space を表す．Pet_Φ は既約で複素次元が n であることが知られている ([16])．各 weight χ に対して，$\mathbb{C}_\chi$ を自然な射影 $B \twoheadrightarrow T$ と $\chi : T \to \mathbb{C}^\times$ の合成写像 $\tilde{\chi} : B \to \mathbb{C}^\times$ によって得られる 1 次元の B-表現とする．直積 $G \times \mathbb{C}_\chi$ 上の B-作用を $(g, z) \cdot b = (gb, \tilde{\chi}(b)^{-1}z)$ $(g \in G, z \in \mathbb{C}_\chi, b \in B)$ で定め，旗多様体 G/B 上の line bundle $L_\chi = G \times_B \mathbb{C}_\chi$ を考える．記号の乱用ではあるが，各 $i \in [n]$ に対して fundamental weight $\varpi_i \in \Lambda$ に付随する line bundle L_{ϖ_i}

[1] 4 節までは $G = GL_n(\mathbb{C})$ で議論していたが，$G = SL_n(\mathbb{C})$ の場合でも同様に議論できる.

の dual $L^*_{\varpi_i}$ を Peterson variety Pet_Φ 上に制限した $L^*_{\varpi_i}|_{\mathrm{Pet}_\Phi}$ の first Chern class をまた ϖ_i と書くことにする．

$$\varpi_i := c_1(L^*_{\varpi_i}|_{\mathrm{Pet}_\Phi}) \in H^2(\mathrm{Pet}_\Phi). \tag{5.1}$$

Φ の Dynkin 図形の頂点集合と simple system $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ の間には 1 対 1 対応があることを思い出しておく．Φ の Dynkin 図形の頂点に simple root を付ける順序は [10] のものとする．$K \subset \Sigma$ が *connected* であるとは，頂点集合 K が持つ Dynkin 図形が Φ の Dynkin 図形の連結部分グラフであるときをいう．

今，mixed Φ-Eulerian numbers の単純な計算方法を紹介する．

定理 5.1. ([9, Theorem 1.1]) Φ を既約なルート系とする．$c_1, \ldots, c_n$ を非負整数で $c_1 + \cdots + c_n = n$ を満たすものとする．

(1) *mixed Φ-Eulerian number* $A^\Phi_{c_1,\ldots,c_n}$ は次で与えられる．

$$A^\Phi_{c_1,\ldots,c_n} = \int_{\mathrm{Pet}_\Phi} \varpi_1^{c_1}\varpi_2^{c_2}\cdots\varpi_n^{c_n}.$$

(2) $K \subset \Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ が *connected* かつ $K \ni \alpha_i$ のとき，

$$\varpi_i \cdot \prod_{\alpha_k \in K} \varpi_k = \sum_{\substack{J\subset\Sigma:\,\mathrm{connected} \\ J\supset K \text{ and } |J|=|K|+1}} m^J_{i,K} \prod_{\alpha_j\in J} \varpi_j \quad \textit{in } H^*(\mathrm{Pet}_\Phi)$$

と書ける．ここで，係数 $m^J_{i,K}$ のリストを [9, Section 7 の Table 2] で明示的に作成した．

(3) 次が成立．

$$\int_{\mathrm{Pet}_\Phi} \varpi_1\varpi_2\cdots\varpi_n = \frac{|W|}{\det(C_\Phi)}.$$

ここで，C_Φ はカルタン行列を表す．右辺については *Lie type* 毎に明示的に計算されていることに注意 ([9, Section 6 の Table 1 参照])．

定理 5.1 は mixed Φ-Eulerian number の計算方法を与えている．実際，(2) を繰り返し使うことで $\varpi_1^{c_1}\varpi_2^{c_2}\cdots\varpi_n^{c_n}$ $(c_1, \ldots, c_n \geq 0, c_1+\cdots+c_n = n)$ はある $q \in \mathbb{Q}$ を用いて単項式 $q\cdot\varpi_1\varpi_2\cdots\varpi_n$ の形に帰着される．ここで，係数 q は [9, Section 7 の Table 2] を用いることで，明示的に計算できる．この等式 $\varpi_1^{c_1}\varpi_2^{c_2}\cdots\varpi_n^{c_n} = q\cdot\varpi_1\varpi_2\cdots\varpi_n$ を Pet_Φ 上で積分することで，(1) と (3) より $A^\Phi_{c_1,\ldots,c_n} = q \cdot \frac{|W|}{\det(C_\Phi)}$ が得られる．

References

[1] H. Abe, L. DeDieu, F. Galetto, and M. Harada, *Geometry of Hessenberg varieties with applications to Newton–Okounkov bodies*, Selecta Math. (N.S.) **24** (2018), no. 3, 2129–2163.

[2] H. Abe, N. Fujita, and H. Zeng, *Geometry of regular Hessenberg varieties*, Transform. Groups **25** (2020), no. 2, 305–333.

[3] H. Abe, T. Horiguchi, H. Kuwata, and H. Zeng, *Geometry of Peterson Schubert calculus in type A and left-right diagrams*, arXiv:2104.02914.

[4] M. F. Atiyah and R. Bott, *The moment map and equivariant cohomology*, Topology. **23**, no. 1 (1984), 1–28.

[5] A. Berget, H. Spink, and D. Tseng, *Log-concavity of matroid h-vectors and mixed Eulerian numbers*, arXiv:2005.01937.

[6] N. Berline and M. Vergne, *Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **295**, no. 9 (1982), 539–541.
[7] D. Croitoru, *Mixed Volumes of Hypersimplices, Root Systems and Shifted Young Tableaux*, Thesis (Ph.D.)–Massachusetts Institute of Technology. 2010.
[8] F. De Mari, C. Procesi, and M. A. Shayman, *Hessenberg varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), no. 2, 529–534.
[9] T. Horiguchi, *Mixed Eulerian numbers and Peterson Schubert calculus*, arXiv:2104.14083.
[10] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory.* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972.
[11] E. Insko and A. Yong. *Patch ideals and Peterson varieties*, Transform. Groups 17, no. 4 (2012): 1011–1036.
[12] B. Kostant, *Flag manifold quantum cohomology, the toda lattice, and the representation with highest weight* ρ, Selecta Math. (N.S.) 2, no. 1 (1996): 43–91.
[13] G. Liu, *Mixed volumes of hypersimplices*, Electron. J. Combin. **23**, no. 3 (2016), Paper 3.19, 19 pp.
[14] P. Nadeau and V. Tewari, *The permutahedral variety, mixed Eulerian numbers, and principal specializations of Schubert polynomials*, arXiv:2005.12194.
[15] A. Postnikov, *Permutohedra, associahedra, and beyond*, Int. Math. Res. Not. IMRN., **2009**, no. 6, 1026–1106.
[16] M. Precup, *The Betti numbers of regular Hessenberg varieties are palindromic*, Transform. Groups 23 (2018), no. 2, 491–499.