時間非整数階拡散方程式とその逆問題について

北海道大学電子科学研究所　劉 逸侃 *
Yikan Liu
Research Institute for Electronic Science, Hokkaido University

概 要

本稿は非局所モデルの一つである非整数階微分をもつ偏微分方程式を対象に，特に 1 回以下の時間微分をもつ拡散方程式に焦点を当て，その初期値境界値問題をサーベイする．まずは Caputo 微分 ∂_t^α の定義および分数べき Sobolev 空間 $H_\alpha(0,T)$ における再定義を述べ，非整数階拡散方程式の初期値境界値問題の定式化を与える．つぎに今まで得られた解の表示や適切性・漸近挙動・最大値原理・一意接続性などの基本性質を解説し，通常の拡散方程式と比較する．それらの性質の応用として，関連する逆問題の重要な結果と最新の進展をいくつか紹介する．

1　はじめに

近年，分数階微積分学（fractional calculus）に基づく非局所モデル（nonlocal models）が様々な背景から提起され，数学者および関連分野の研究者の間で人気が高くなっている．例えば，$(-\triangle)^{1/2}$ のような分数べき楕円型作用素については，Caffarelli らの先駆的な仕事 [3] で Dirichlet-to-Neumann 写像によって定式化され，特に理論研究が進んでいる．また，Du, Gunzburger ら [4] は nonlocal vector calculus の理論を提案し，体積制約付き問題に対する数値計算に応用されている．一方，偏微分方程式の基本といえる楕円型・放物型・双曲型方程式の時間微分回数はそれぞれ $0, 1, 2$ であるが，それらの間に 0.5 回，1.5 回時間微分をもつような方程式について，理論と応用の双方から自然に興味が湧いてくる．

実際，不均質媒質における粒子の異常拡散や粘弾性体など，通常の発展方程式で記述できない現象がしばしば現れる．例えば，全空間における移流拡散方程式の代表的な特徴として，解は時間方向に指数減衰し，空間方向には正規分布であることが知られている．これに反して，土壌などにおけるフィルド実験では，遅い減衰およびロングテール分布が報告される（ [8] など）．これらの現象に対して，時間方向に非局所性をもつようなモデルも数多く提唱されてきた．特に $(\partial_t^\alpha - \triangle)u = F$ のような，のちに第 2 節で定義する時間方向の Caputo 微分 ∂_t^α $(0 < \alpha < 2)$ をもつ時間非整数階偏微分方程式（time-fractional partial differential equations）は時間メモリー効果を表すことができ，数学と諸科学で注目を浴びている．この方程式に関連する数理モデルとして，ほかにも連続時間ランダムワークやフラクタル上の拡散（ [1] など），地質学における輸送プロセス（ [30] など），粘弾性体の運動を記述する spring-pot モデル（ [2] など）が挙げられる．

非整数階微分の概念は Leibniz にまで遡るが，10 数年前までは主に東欧諸国の工学や応用科学で盛んに発展されてきたため，特殊関数や関数変換などによって厳密解・近似解を構成

* 〒 060-0812 札幌市北区北 12 条西 7 丁目，E-mail: ykliu@es.hokudai.ac.jp

する研究が主流であった．最近になって，ようやく近代的な数学道具を駆使し，適切な関数空間で解を捉え始めるようになり，時間非整数階偏微分方程式に関する文献は指数的に増えてきた[1]．近年，その基礎理論が整備され，関連する数値解析と逆問題も盛んに発展してきた．本稿では主に，時間微分回数 α を $(0,1)$ に限定した下記の時間非整数階拡散方程式

$$(\partial_t^\alpha+\mathcal{L})u=F \quad \text{in } \Omega\times(0,T)$$

の初期値境界値問題に焦点を絞り，今まで得られた解の基本性質（一意存在性・漸近挙動など）を解説する．さらに関連するいくつかの逆問題の定式化を紹介し，上述の性質の応用として，逆問題を解く方針をサーベイする．

本稿の続きは以下のように構成される．まず第 2 節では，本稿で取り扱う非整数階微分を導入し，その古典的な定義および再定義を論じる．それを踏まえ，第 3 節で解の適切性および最大値原理・一意接続性など重要な性質に関する結果を述べる．応用として，第 4 節では関連する逆問題を 3 つほど紹介する．最後に第 5 節で本稿をまとめ，関連問題および今後の課題を言及する．

2　非整数階微分の定義

通常の 1 回，2 回微分から派生した非整数階微分は一通りではなく，見方によって多種多様な定義が散見する．例えば [15] でラプラシアンの分数べき $(-\triangle)^s$ の 10 種類の同値な定義をまとめたが，ほかには人気を乗じて，そもそも整数回微分と整合しない定義も乱立し，まさにカオス状態である．よって非整数階微分を定義し使用する際，細心な注意を払う必要がある．

本稿は，整数回の微分と非整数階の積分の合成によって 2 種類の時間非整数階微分を導入する（詳細は [29] を参照）．まず $f\in C[0,T]$ に対して，1 回積分する操作を意味する積分作用素 J をつぎのように定める：

$$Jf(t):=\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

このとき，任意の自然数 n に対して，f の n 回積分 $J^n f$ は,

$$J^n f(t)=\int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

で表されることは直ちに示される．ここで階乗 $(n-1)!$ をガンマ関数 $\Gamma(n)$ とみなせば，上記の $n\in\mathbb{N}$ を任意の $\beta>0$ に一般化することによって，つぎの Riemann-Liouville 積分作用素 J^β が自然に定義できることに気づく：

$$J^\beta f(t):=\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{2.1}$$

J^β を用いて，非整数階時間微分の代表例である Caputo 微分 ∂_t^α と Riemann-Liouville 微分 D_t^α $(\alpha>0)$ をつぎの通り定義する：

$$\partial_t^\alpha:=J^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}\circ\frac{\mathrm{d}^{\lceil\alpha\rceil}}{\mathrm{d}t^{\lceil\alpha\rceil}},\quad D_t^\alpha:=\frac{\mathrm{d}^{\lceil\alpha\rceil}}{\mathrm{d}t^{\lceil\alpha\rceil}}\circ J^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}.$$

[1] Web of Science のデータによる「fractional equation」をトピックに含む論文数：2010 年 =940 本，2015 年 =2053 本，2020 年 =4759 本.

ただし，$\lceil\cdot\rceil$ と $\circ$ はそれぞれ天井関数と合成を表す．すなわち，二つの非整数階微分は，通常の微分作用素と Riemann-Liouville 積分作用素の合成によって定義されるが，微積分のかける順番が逆である．また $\alpha\notin\mathbb{N}$ のとき $0<\lceil\alpha\rceil-\alpha<1$ なので，(2.1) から $J^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}$ は常に弱い特異性をもつことに注意されたい．以降，特に断りのない限り，常に $0<\alpha<1$ とする．また，本稿を通して主に Caputo 微分 ∂_t^α を取り扱う．

例 2.1. Caputo 微分 ∂_t^α と Riemann-Liouville 微分 D_t^α は以下のように書き表される：

$$\partial_t^\alpha f(t)=\int_0^t\frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}f'(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\quad D_t^\alpha f(t)=\left(\int_0^t\frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)'. \tag{2.2}$$

上記からすぐ分かるように，両者は共に f の $(0,t)$ における時間履歴に関わり，過去のメモリーは現在の非整数階微分の値に影響を及ぼす．このような非局所性は，局所作用素である通常の微分と根本的に異なる．

∂_t^α と D_t^α は，残念ながら通常の微分がもつ性質をほとんど継承せず，非整数階方程式の解析に大きな困難をもたらす．例えば定数関数 $f(t)\equiv 1$ に対しても，(2.2) より

$$0=\partial_t^\alpha 1\neq D_t^\alpha 1=\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

が異なり，特に定数の Riemann-Liouville 微分は 0 でないことは常識を逸する．また，微分の交換律と結合律および部分積分も成り立たない：

$$\partial_t^\alpha\partial_t^\beta f\neq\partial_t^\beta\partial_t^\alpha f\neq\partial_t^{\alpha+\beta}f,\quad\int_0^T(\partial_t^\alpha f)g\,\mathrm{d}t\neq-\int_0^T f(\partial_t^\alpha g)\,\mathrm{d}t\ (f,g\in C_0^1[0,T]).$$

このように基本的な道具が使えない一方，非整数階微分は特殊関数および Laplace 変換と相性がよい一面もあり，解析において多用されている．例えば，$\alpha>0,\beta\in\mathbb{R}$ をパラメーターとする Mittag-Leffler 関数 $E_{\alpha,\beta}(z)$ を

$$E_{\alpha,\beta}(z):=\sum_{k=0}^\infty\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\quad(z\in\mathbb{C}) \tag{2.3}$$

と定めると，定数 $\lambda\in\mathbb{R}$ に対して，非整数階常微分方程式

$$\begin{cases}\partial_t^\alpha u(t)=\lambda u(t)\quad(t>0),\\ u(0)=1\end{cases} \tag{2.4}$$

の解は $u(t)=E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)$ と表される．また，Laplace 変換を $\widehat{f}(z):=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-zt}f(t)\,\mathrm{d}t$ と表すと，つぎの公式が知られている：

$$\widehat{\partial_t^\alpha f}(z)=z^\alpha\widehat{f}(z)-z^{\alpha-1}f(0).$$

つぎに，Caputo 微分 ∂_t^α の離散化について少し触れる．区間 $[0,T]$ を M 等分し，$\Delta t=T/M$, $t_m=m\Delta t$ とすると，L1 近似と呼ばれる以下の差分法が提案される：

$$\begin{aligned}\partial_t^\alpha f(t_m)&=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{j=1}^m\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{f'(\tau)}{(t_m-\tau)^\alpha}\,\mathrm{d}\tau\approx\sum_{j=1}^m\frac{f(t_j)-f(t_{j-1})}{\Gamma(1-\alpha)\Delta t}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(t_m-\tau)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Delta t^\alpha}\sum_{j=0}^m\gamma_j\,f(t_{m-j}).\end{aligned}$$

ただし，

$$\gamma_j := \begin{cases} 1 & (j=0), \\ (j+1)^{1-\alpha} - 2j^{1-\alpha} + (j-1)^{1-\alpha} & (j=1,\dots,m-1), \\ (m-1)^{1-\alpha} - m^{1-\alpha} & (j=m). \end{cases}$$

L1 近似は，$f \in C^2[0,T]$ に対して $O(\Delta t^{2-\alpha})$ の精度をもつことが知られている（ [22]）.

さて，Caputo 微分 $\partial_t^\alpha f = J^{1-\alpha}(f')$ は well-defined に見えるが，1 回未満の微分をとるのに 1 回微分にアクセスしていることに注意する．実際，上記 (2.4) の解 $u(t) = E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)$ すら C^1 級ではないので，特に正則性が低い関数に対して定義 (2.2) は破綻する．よって，適切な関数空間で ∂_t^α を再定義する必要がある.

Gorenflo ら [7] は，分数べき Sobolev 空間で ∂_t^α を Riemann-Liouville 積分作用素 J^α の逆作用素として定義した．具体的には，J^α の定義域 $D(J^\alpha)$ を $L^2(0,T)$ とした上，その値域 $R(J^\alpha)$ はつぎのような特徴づけられた：

$$\begin{aligned} R(J^\alpha) = H_\alpha(0,T) &:= \overline{\{f \in C^1[0,T] \mid f(0)=0\}}^{H^\alpha(0,T)} \\ &= \begin{cases} H^\alpha(0,T) & (0<\alpha<1/2), \\ \left\{ f \in H^{1/2}(0,T) \,\middle|\, \displaystyle\int_0^T \frac{f^2(t)}{t}\,\mathrm{d}t < \infty \right\} & (\alpha = 1/2), \\ \{f \in H^\alpha(0,T) \mid f(0)=0\} & (1/2<\alpha<1). \end{cases} \end{aligned}$$

ただし，$H^\alpha(0,T)$ は Sobolev-Slobodeckij 空間である．さらに，$J^\alpha : L^2(0,T) \longrightarrow H_\alpha(0,T)$ は全単射であることが示されたので，Caputo 微分 ∂_t^α を

$$\partial_t^\alpha := (J^\alpha)^{-1} : H_\alpha(0,T) \longrightarrow L^2(0,T)$$

と定められた．特に埋め込み定理より，$1/2 < \alpha < 1$ のとき $H_\alpha(0,T) \subset \{f \in C[0,T] \mid f(0) = 0\}$ なので，$f(0) \neq 0$ ならば $\partial_t^\alpha f$ は定義されない．逆に $0 < \alpha \le 1/2$ のとき，$H_\alpha(0,T)$ は各点で意味をもたないため，初期値の解釈が難しくなる．これは，初期値を捉えるのに L^2 の枠組みでは不十分で，さらに L^p 理論を整備すべきことを示唆している.

3 時間非整数階拡散方程式の順問題

準備が整ったので，Caputo 時間微分をもつ拡散方程式の初期値境界値問題の定式化を与える．$L^2(\Omega)$ の内積を $(\cdot\,,\cdot)$ と記し，$H_0^1(\Omega), H^2(\Omega)$ などは Sobolev 空間を表す．$\alpha \in (0,1)$, $T > 0$ を定数とし，$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ を滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域とする．非整数階 Caputo 時間微分をもつ拡散方程式の初期値境界値問題

$$\begin{cases} (\partial_t^\alpha + \mathcal{L})u = F & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u = a & \text{in } \Omega \times \{0\}, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{3.1}$$

を考える．ただし，$\mathcal{L}$ は 2 階線形楕円型作用素

$$\mathcal{L}f := -\mathrm{div}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\nabla f) + c(\boldsymbol{x})f \quad (f \in D(\mathcal{L}) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

を表し，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{1\le i,j\le d}\in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^{d\times d}_{\mathrm{sym}})$ を $\overline{\Omega}$ 上で一様正定値とし，$0\le c\in C(\overline{\Omega})$ とする．初期値 $a(\boldsymbol{x})$ と源泉項 $F(\boldsymbol{x},t)$ の条件はのちに指定する．

本稿は簡単のために，定式化を (3.1) に限定するが，境界条件は斉次 Dirichlet 条件のほか，Neumann や Robin 条件，さらに非斉次境界条件も考えられる．また $\partial_t^\alpha u$ の代わりに，複数の Caputo 微分の線型結合 $\sum_{j=1}^m q_j\partial_t^{\alpha_j}u$ や，$(0,1)$ 区間に連続に階数をとる分布型 $\int_0^1\mu(\alpha)\partial_t^\alpha u\,\mathrm{d}\alpha$ などの定式化もある．さらに近年は上記の $\mathcal{L}$ を一般化し，

$$\mathcal{L}(t)f:=-\mathrm{div}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\nabla f)+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla f+c(\boldsymbol{x},t)f$$

のような，t にも依存する非対称の線形楕円型作用素に対して，通常の放物型方程式と同等の線形理論も整備されてきた（例えば [14]）．しかし，本稿の定式化 (3.1) は重要な性質を解説するのに十分である．

他方，第 2 節で述べた分数べき Sobolev 空間の観点より，本来ならば (3.1) を

$$\begin{cases}\partial_t^\alpha(u-a)+\mathcal{L}u=F & \text{in } \Omega\times(0,T),\\ (u-a)(\boldsymbol{x},\,\cdot\,)\in H_\alpha(0,T) & \text{a.e. } \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ u=0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,T)\end{cases}$$

のように記述したほうが正確であるが，理解しやすいために (3.1) と書くことにしよう．

作用素 $\partial_t^\alpha+\mathcal{L}$ に関する先行研究はとても列挙しきれず，例えば [5–7,14,21,26,28] に留まるが，ここではマイルストーンと称される Sakamoto, Yamamoto [28] に沿って解説する．

解を表示し評価するため，楕円型作用素 $\mathcal{L}$ の固有システム $\{(\lambda_n,\varphi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ を導入する．すなわち，(λ_n,φ_n) は

$$\begin{cases}\mathcal{L}\varphi_n=\lambda_n\varphi_n & \text{in } \Omega,\\ \varphi_n=0 & \text{on } \partial\Omega,\end{cases}\qquad 0<\lambda_1<\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n\longrightarrow+\infty$$

をみたし，$\{\varphi_n\}\subset D(\mathcal{L})$ は $L^2(\Omega)$ の完全正規直交系である．固有システムを用いて，$\mathcal{L}$ の分数べき $\mathcal{L}^\gamma$ $(\gamma\ge0)$ と空間 $D(\mathcal{L}^\gamma)$ をつぎのように定める：

$$\mathcal{L}^\gamma f:=\sum_{n=1}^\infty\lambda_n^\gamma(f,\varphi_n)\varphi_n,\quad f\in D(\mathcal{L}^\gamma):=\{f\in L^2(\Omega)\mid\|f\|_{D(\mathcal{L}^\gamma)}:=\|\mathcal{L}^\gamma f\|_{L^2(\Omega)}<+\infty\}.$$

$D(\mathcal{L}^\gamma)$ は Hilbert 空間であり，$D(\mathcal{L}^\gamma)\subset H^{2\gamma}(\Omega)$，特に $D(\mathcal{L}^{1/2})=H_0^1(\Omega)$ は知られている．

さて，$a\in L^2(\Omega),F\in L^2(\Omega\times(0,T))$ として，まず問題 (3.1) の解の表示について解析しよう．$\alpha=1$ の場合に対する変数分離法と同様に，(2.3) で導入した Mittag-Leffler 関数を用いると，(3.1) の厳密解はつぎのように表される：

$$u(\,\cdot\,,t)=\sum_{n=1}^\infty\left\{E_{\alpha,1}(-\lambda_nt^\alpha)(a,\varphi_n)+\int_0^t\tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n\tau^\alpha)(F(\,\cdot\,,t-\tau),\varphi_n)\,\mathrm{d}\tau\right\}\varphi_n.$$

ここで，重ね合わせの原理より，上式の右辺第 1 項は初期値 a，第 2 項は源泉項 F から由来することは明らか．特に $\alpha=1$ のとき，$E_{\alpha,1}(-\lambda_nt^\alpha)=t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_nt^\alpha)=\mathrm{e}^{-\lambda_nt}$ であるから，上式はよく知られているフーリエの方法による拡散方程式の厳密解ほかならない．$0<\alpha<1$ のとき，厳密解で初期値 a と源泉項 F に関わる t の関数は異なることに注意されたい．

注 3.1. $\Omega=\mathbb{R}^d$，すなわち (3.1) の Cauchy 問題版に対しても，類似した厳密解が知られている（[5]）：

$$u(\boldsymbol{x},t)=\int_{\mathbb{R}^d}G_\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)a(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}+\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}^d}K_\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-\tau)F(\boldsymbol{y},\tau)\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}\tau.$$

ただし，G_α,K_α は Fox の H-関数と呼ばれる特殊関数であり，特に $\alpha=1$ のとき両者は共に熱核 $G(\boldsymbol{x},t)=(4\pi t)^{-d/2}\exp(-|\boldsymbol{x}|^2/(4t))$ に帰着する．

非斉次の線形発展方程式に対して，解を斉次方程式の積分で表示する Duhamel の原理が普遍的に成り立つが，この原理は (3.1) に対しても微修正のうえ通用する．実際，$a=0$ のとき，(3.1) の解はつぎのように表される：

$$J^{1-\alpha}u(\,\cdot\,,t)=\int_0^t v(\,\cdot\,,t;\tau)\,\mathrm{d}\tau\quad(0<t<T).\tag{3.2}$$

ただし，$v(\,\cdot\,,\,\cdot\,;\tau)$ は $\tau\in(0,T)$ を初期時刻としたつぎの斉次問題の解である：

$$\begin{cases}(\partial_t^\alpha+\mathcal{L})v=0 & \text{in }\Omega\times(\tau,T),\\ v=F(\,\cdot\,,\tau) & \text{in }\Omega\times\{\tau\},\\ v=0 & \text{on }\partial\Omega\times(\tau,T).\end{cases}$$

ここで，解 u に Riemann-Liouville 積分作用素 $J^{1-\alpha}$ が掛かっていることに注意されたい．

上記の非整数階 Duhamel の原理により，まずは (3.1) の斉次問題の解，すなわち

$$u(\,\cdot\,,t)=\sum_{n=1}^\infty E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha)(a,\varphi_n)\varphi_n\tag{3.3}$$

を調べればよい．Mittag-Leffler 関数の性質を活用すると，つぎが直ちに示される．

定理 3.2 (解の適切性，[14,17])**.** $a\in L^2(\Omega)$，$F=0$ とする．このとき，問題 (3.1) にただ一つの解 (3.3) が存在し，つぎをみたす．

(1) $u\in\bigcap_{0\le\gamma\le1}L^{1/\gamma}(0,T;D(\mathcal{L}^\gamma))$（$1/0=\infty$ とみなす），$\lim_{t\to0}\|u(\,\cdot\,,t)-a\|_{L^2(\Omega)}=0$.

(2) T に依存する定数 $C_T>0$ が存在し，つぎの評価が成り立つ：

$$\|u(\,\cdot\,,t)\|_{D(\mathcal{L}^\gamma)}\le C_T\|a\|_{L^2(\Omega)}t^{-\alpha\gamma}\quad(0<t<T,\ 0\le\gamma\le1).\tag{3.4}$$

(3) T に依存しない定数 $C>0$ が存在し，つぎの漸近挙動が成り立つ：

$$\left\|u(\,\cdot\,,t)-\frac{\mathcal{L}^{-1}a}{\Gamma(1-\alpha)\,t^\alpha}\right\|_{D(\mathcal{L})}\le\frac{C\|a\|_{L^2(\Omega)}}{t^{2\alpha}}\quad(t\to+\infty).\tag{3.5}$$

(4) 写像 $u:(0,+\infty)\longrightarrow D(\mathcal{L})$ は解析的である．

定理 3.2 は解 (3.3) に関する基本的な性質をまとめている．まず解の滑らかさについて，定理 3.2(1) は時間正則性 $L^{1/\gamma}(0,T)$ と空間正則性 $D(L^\gamma)$ のバランスを表している．特に $\gamma=0,1/2,1$ のとき，

$$u\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^1(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$$

であるから，解の空間微分可能性は初期値 $a \in L^2(\Omega)$ から最大 2 回までしか持ち上がらないことが分かる．通常の拡散方程式の解の滑らかさと比べて，(3.1) の平滑化効果は非常に限定的といえる．

つぎに，評価 (3.4) と (3.5) はそれぞれ解の短時間と長時間の漸近挙動を表している．前者より，$\gamma > 0$ のとき $\|u(\,\cdot\,, t)\|_{D(\mathcal{L}^\gamma)}$ は $t = 0$ で弱い特異性をもち，しかも γ が大きいほど特異性が強い．一方後者より，$t \to +\infty$ のとき u の 0 への減衰率は $t^{-\alpha}$，極限パターン $\frac{\mathcal{L}^{-1}a}{\Gamma(1-\alpha)\,t^\alpha}$ へ収束率は $t^{-2\alpha}$ である．ただし，$\mathcal{L}^{-1}a$ は楕円型方程式の境界値問題

$$\begin{cases} \mathcal{L}b = a & \text{in } \Omega, \\ b = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の解 b のことである．特に (3.5) から，u の減衰速度 $t^{-\alpha}$ は sharp であることも読みとれる．よって，(3.1) は確かに遅い減衰を表現することができ，これは通常の拡散方程式の解が示す指数減衰との根本的な違いである．

最後に定理 3.2(4) より，解 (3.3) は時間方向に解析性であるが，通常の拡散方程式の場合と違って $t = 0$ のみ解析的ではないことに注意してほしい．

上記より，(3.1) で $\alpha < 1$ と $\alpha = 1$ の場合の類似性と差異が見えてきたが，続いて「最大値原理」と「一意接続性」の観点から解析を進める．

通常の拡散方程式において，最大値原理（maximum principle）はもっとも特徴的な性質の一つといえよう．例えば $\alpha = 1$，$F = 0$ のときの (3.1) に限っていうと，

- 弱最大値原理：$a \ge 0$ ならば，解 $u \ge 0$；
- 強最大値原理：$a \ge 0, \not\equiv 0$ ならば，$\Omega \times (0, +\infty)$ で解 $u > 0$

が成り立つ．このとき，自然に $\alpha < 1$ の場合に対しても同じ結論が成り立つかを問いかけたい．しかし通常の最大値原理は，滑らかな関数は極値をとるとき 1 回微分が 0 である事実に基づくが，その α 回微分は時間履歴の影響で 0 とは限らない．そのため，$\alpha < 1$ の場合に対する最大値原理の解析は難しいが，Luchko [26] はつぎを示した．

補題 3.3. (1) (極値原理) $f \in C^1[0, T]$ が $t_0 \in (0, T]$ で最大値をとれば，$\partial_t^\alpha f(t_0) \ge 0$ が成り立つ．

(2) (弱最大値原理) 十分滑らかな関数 u が $\overline{\Omega} \times [0, T]$ 上で $(\partial_t^\alpha + \mathcal{L})u \le 0$ ならば，

$$u \le \max\left\{0, \max_{(\overline{\Omega}\times\{0\})\cup(\partial\Omega\times[0,T])} u\right\} \quad \text{on } \overline{\Omega} \times [0, T].$$

が成り立つ．すなわち，u は 0 以下か，境界あるいは初期時刻で正の最大値をもつ．

補題 3.3(2) より，(3.1) の古典解に関するアプリオリ評価と一意性・安定性は直ちに示せる．さらに比較原理も従うので，準線形の時間非整数階拡散方程式を解析するための道具が整備された．一方，(3.1) に対する強最大値原理には，$\alpha = 1$ の場合の方法は通用しない．筆者ら [25] が補題 3.3(2) に基づき，定理 3.2(3)–(4) を活用してつぎを示した．

定理 3.4 (強正値原理)**.** 空間次元 $d = 1, 2, 3$ とし，$L^2(\Omega) \ni a \ge 0, \not\equiv 0$，$F = 0$ とする．このとき，(3.1) の解 u と $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega$ に対して，集合 $\mathcal{E}_{\boldsymbol{x}} := \{t > 0 \mid u(\boldsymbol{x}, t) \le 0\}$ は高々有限個の元をもつ．すなわち，$\Omega \times (0, +\infty)$ のほとんど至るところで $u > 0$ が成り立つ．

上記の定理は $\boldsymbol{x} \in \Omega$ を任意に固定されたとき，条件をみたす $u(\boldsymbol{x},t)$ は t の関数として有限個のゼロ点を排除できなかったが，のちに [27] は弱 Harnack の不等式を用いて $\alpha = 1$ の場合と同等の強最大値原理（すなわち $\mathcal{E}_{\boldsymbol{x}} = \emptyset$）を示した．

最後に，(3.1) の一意接続性（unique continuation）に触れる．偏微分方程式一意接続性とは，斉次方程式の解が局所的に 0 のとき，大域的に 0 かどうかに関する性質である．例えば，楕円型と放物型方程式は強い一意接続性をもつが，双曲型方程式は有限伝播性によって一意接続性が弱いことが知られている．$\alpha \in (0,1)$ の場合の (3.1) は楕円型と放物型の中間に位置するから，強い一意接続性が期待されるが，非局所性がもたらす技術上の問題で解析が難しい．筆者ら [11] は Laplace 変換と楕円型方程式の一意接続性を用いて，つぎの結論を示した．

定理 3.5 (弱い一意接続性)**.** $a \in L^2(\Omega)$，$F = 0$ とし，$\omega \subset \Omega$ を部分領域，$I \subset (0,+\infty)$ を区間とする．このとき，$\omega \times I$ で (3.1) の解 $u = 0$ ならば，u は $\Omega \times (0,+\infty)$ で恒等的に 0 である．

上記の定理を弱い一意接続性と呼ぶのは，隠れたデータとして斉次 Dirichlet 境界条件を使ったからである．[21] などは擬微分作用素を駆使して類似した一意接続性を確立したが，係数を C^∞ 級と仮定した．一方，[19] は $d = 1$ かつ $\mathcal{L} = -\partial_x^2 + c(x)$ の場合に $\alpha = 1$ のと同じ一意接続性を示したが，一般の場合は未だに不明である．

上記一連の結果は，非整数階拡散方程式の基礎理論を構築し，解の主な性質を解明した．通常の拡散方程式と比べると，$t \to +\infty$ における漸近挙動で現れる減衰速度は根本的に異なるが，ほかの側面においては定性的に類似する性質が多い．これらの結論自体は重要でありながら，応用として関連する逆問題の解析にも非常に役立つ．

4　時間非整数階拡散方程式の逆問題

前節で得られた結論を踏まえ，本節は時間非整数階拡散方程式に関する様々な逆問題をサーベイする．初期値境界値問題 (3.1) に限って，初期値 a や源泉項 F などの各要素が与えられたとき，偏微分方程式の解 u を求めることを順問題と呼ぶが，u の欠落データから a, F などの未知の要素を探すことを逆問題という．一つの順問題に対して，いろんな逆問題が挙げられるが，本稿は簡単のため，つぎの定式化に焦点を当てる：

$$\begin{cases}(\partial_t^\alpha + \mathcal{L})u(\boldsymbol{x},t) = F(\boldsymbol{x},t) = \rho(t)g(\boldsymbol{x}) & ((\boldsymbol{x},t) \in \Omega \times (0,T)),\\ u(\boldsymbol{x},0) = a(\boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{x} \in \Omega),\\ u(\boldsymbol{x},t) = \Phi(\boldsymbol{x},t) & ((\boldsymbol{x},t) \in \partial\Omega \times (0,T)).\end{cases} \tag{4.1}$$

すなわち (3.1) において，源泉項 $F(\boldsymbol{x},t)$ を変数分離の形 $\rho(t)g(\boldsymbol{x})$ に限定する．問題 (4.1) に対して，つぎの 3 種類の典型的な逆問題を考える：

1. パラメーター決定逆問題：Caputo 微分回数の $\alpha \in (0,1)$ を決定する．
2. 源泉項決定逆問題：源泉項の時間成分 $\rho(t)$ あるいは空間成分 $g(\boldsymbol{x})$ を決定する．
3. 係数決定逆問題：$\mathcal{L} = -\triangle + c(\boldsymbol{x})$ と仮定したとき，階数 α と係数 $c(\boldsymbol{x})$ を同時に決定する．

それぞれの逆問題において，決定すべき要素を未知とし，ほかの要素は基本既知とする．また，問題ごとの特性によって，必要とする観測データは異なる．なお，関連する逆問題は上記の 3 種類とは限らず，例えば初期値 a を決定する backward 問題などもあるが，ここで割愛する．

順問題と同様に，時間非整数階拡散方程式の逆問題に関する文献も数えきれないほど現存する．上記の 3 種類の逆問題について，サーベイ論文 [24]，[18] と [20] はそれぞれ 2019 年までの主要結果を総説したので，興味のある読者は参考されたい．以下，特に重要と思われる結果およびその周辺を解説しつつ，2019 年以降の最新の進展をいくつかピックアップして紹介する．

4.1 パラメーター決定逆問題

前述の通り，非整数階と通常の拡散方程式の最大の違いは Caputo 微分の回数 α にあり，しかも応用問題において α は媒質の性質を反映している．よって，(4.1) に関する逆問題において，パラメーター決定逆問題はいち早く研究されてきた．

定理 3.2(2)–(3) を思い出すと，α の情報は解の短時間および長時間の漸近挙動に内蔵されているので，自然に漸近挙動を利用して α を決定することに気がつく．実際，[9] は α に関するつぎの公式を得た．

補題 4.1. $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ を任意にとり，$F = \Phi = 0$，$C_0^\infty(\Omega) \ni a \ge 0, \not\equiv 0$ とし，u を (4.1) の解とする．このとき，つぎの公式が成り立つ：

$$\alpha = -\lim_{t\to+\infty} \frac{t\,\partial_t u(\boldsymbol{x}_0, t)}{u(\boldsymbol{x}_0, t)} = \lim_{t\to 0} \frac{t\,\partial_t u(\boldsymbol{x}_0, t)}{u(\boldsymbol{x}_0, t) - a(\boldsymbol{x}_0)}.$$

上式は，厳密解 (3.3) からも直ちに従う．また $t \to +\infty$ の漸近挙動に関しては，定理 3.2(4) が示した解の解析性に基づくと，有界区間 $(0, T)$ で空間一点 $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ における観測データから得られる．

(4.1) の一般化として，$\partial_t^\alpha u$ の代わりに線型結合 $\sum_{j=1}^m q_j \partial_t^{\alpha_j} u$ の定式化もある．個数 m，回数 α_j と係数 q_j $(j = 1, \dots, m)$ を同時に決定する逆問題についても，同様な観測データを用いた一意性が示されている．さらに分布型 $\int_0^1 \mu(\alpha) \partial_t^\alpha u \, \mathrm{d}\alpha$ の定式化で重み $\mu(\alpha)$ の決定にも，同じく一意性の結果がある（詳細は [18] を参照）．

上記すべての先行研究においては，データが一致すれば未知数が一致するという一意性が得られたが，最新の進展としてデータにある程度の誤差があっても一意性が成り立つことを示した．

定理 4.2 (不正確なデータによる一意性)**.** $\alpha, \beta \in (0, 1)$，$a, b \in D(\mathcal{L}^\gamma)$ $(\gamma > 1 + d/4)$ とし，u, v をそれぞれ

$$\begin{cases} (\partial_t^\alpha + \mathcal{L})u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u = a & \text{in } \Omega \times \{0\}, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \qquad \begin{cases} (\partial_t^\beta + \mathcal{L})v = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ v = b & \text{in } \Omega \times \{0\}, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}$$

の解とする．$\mathcal{L}a(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, $\mathcal{L}b(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$ をみたす $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ をに任意にとる．このとき，定数 $C > 0$，$\tau > 0$ と $\nu > \min\{\alpha, \beta\}$ が存在し，

$$|u(\boldsymbol{x}_0, t) - v(\boldsymbol{x}_0, t)| \le C\, t^\nu \quad (0 \le t \le \nu) \tag{4.2}$$

が成り立てば，$\alpha = \beta$ が成り立つ．

条件 (4.2) は不正確なデータを表し，観測時間 τ も任意に小さくとれるゆえ，$u(\boldsymbol{x}_0, t) = v(\boldsymbol{x}_0, t)$ を仮定したすべての先行研究より本質的に弱い．さらに，初期値に関する仮定は $a(\boldsymbol{x}_0) = b(\boldsymbol{x}_0)$ と $La(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, $Lb(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$ に留まるので，Ω で $a \equiv b$ を仮定したほとんどの先行研究と比べて遥かに弱い．一般論として，本来 (4.2) のような条件は安定性しか導けないが，この問題に限って一意性がいえて，微分回数 α は方程式に対して支配的であることが窺える．

定理 4.2 が述べた一意性は，線型結合 $\sum_{j=1}^{m} q_j \partial_t^{\alpha_j} u$ の場合まで一般化でき，さらに特殊な条件下で初期値の一意性（すなわち $a \equiv b$）も示せるが，ここで詳細を略す．

4.2 源泉項決定逆問題

続いて，(4.1) において源泉項が $F(\boldsymbol{x}, t) = \rho(t) g(\boldsymbol{x})$ のような変数分離の形をしたとき，時間成分 $\rho(t)$ あるいは空間成分 $g(\boldsymbol{x})$ の決定を考えよう．(4.1) を汚染物質の拡散モデルとしたとき，$\rho(t)$ と $g(\boldsymbol{x})$ はそれぞれ汚染物質の時間発展と空間分布を表す．よって $\rho(t)$ の決定は，例えばチェルノブイリや福島原発事故のように，汚染源の位置が既知のうえ，その減衰パターンを同定する問題と直結する．一方 $g(\boldsymbol{x})$ の決定は，未知の汚染源の位置を特定する問題に関係する．

本節は以下，常に (4.1) で $a = \Phi = 0$ とする．源泉項が変数分離の形をしているため，非整数階 Duhamel の原理 (3.2) はつぎに帰着する：

$$J^{1-\alpha} u(\boldsymbol{x}, t) = (\rho * v(\boldsymbol{x}, \cdot))(t) = \int_0^t \rho(t - \tau) v(\boldsymbol{x}, \tau) \, \mathrm{d}\tau. \tag{4.3}$$

ただし，$*$ は畳み込みを表し，v はつぎの斉次問題の解である：

$$\begin{cases} (\partial_t^\alpha + \mathcal{L}) v = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ v = g & \text{in } \Omega \times \{0\}, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \tag{4.4}$$

(4.3) は畳み込みの形をしており，2 種類の源泉項決定逆問題の共通の出発点である．

まず，$\rho(t)$ を決定する逆問題を考える．ρ は t の関数なので，前節のような空間一点における観測 $u|_{\{\boldsymbol{x}_0\} \times (0,T)}$ が合理的である．しかし，観測点 $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ の位置によって問題の難易度は大きく異なる．実際，$\boldsymbol{x}_0 \in \operatorname{supp} g$（例えば $g(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$）のとき，$\rho$ を $\partial_t^\alpha u(\boldsymbol{x}_0, \cdot)$ で評価する Lipschitz 安定性は簡単に示せる（ [28] など）．しかしこの場合は，汚染源の内部で観測することを意味するので，モデルによって危険性を伴うことで現実的ではない．一方，汚染源から離れる場所，すなわち $\boldsymbol{x}_0 \notin \operatorname{supp} g$ で観測するのは望ましいが，この条件下の逆問題は $\alpha = 1$ の場合でも難しい．ここで，定理 3.4 で示した強正値原理を応用すれば，ρ に関する下記の一意性は直ちに従う（ [25]）．

定理 4.3. $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ を任意にとり，$\rho \in L^2(0, T)$，$L^2(\Omega) \ni g \geq 0, \neq 0$ とし，u を (4.1) の解とする．このとき，$\{\boldsymbol{x}_0\} \times (0, T)$ で $u = 0$ ならば，$(0, T)$ で $\rho = 0$ が成り立つ．

上記の定理は観測点 $\boldsymbol{x}_0$ に条件を課さず，一般性が高い結果である．既知の空間成分 g に課す条件 $g \ge 0, \not\equiv 0$ も応用において合理的であるが，この条件を外すと一意性が成り立たない反例は作れる．

証明の概略を述べる．$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ を (4.3) に代入すると，条件より

$$0 = J^{1-\alpha} u(\boldsymbol{x}_0, \cdot\,) = \rho * v(\boldsymbol{x}_0, \cdot\,) \quad \text{in } (0, T)$$

が成り立つ．Titchmarsh の畳み込みの定理より，$T_1 + T_2 \ge T$ をみたす定数 $T_1, T_2 \ge 0$ が存在し，$(0, T_1)$ で $\rho = 0$，$(0, T_2)$ で $v(\boldsymbol{x}_0, \cdot\,) = 0$ が成り立つ．一方，定理 3.4 より $(0, T)$ で $v(\boldsymbol{x}_0, \cdot\,) > 0$ なので，$T_2 = 0$ でなければならない．ゆえに $T_1 = T$，すなわち $(0, T)$ で $\rho = 0$ が示された．

つぎに，(4.1) における源泉項の空間成分 $g(\boldsymbol{x})$ を決定する逆問題を考える．g は $\boldsymbol{x}$ の関数なので，部分領域 $\omega \subset \Omega$ における観測 $u|_{\omega \times (0,T)}$ が妥当である．上記と並行のように，ここで定理 3.5 で示した弱一意接続性を応用すれば，g に関する下記の一意性は得られる（[11]）．

定理 4.4. 空でない部分領域 $\omega \subset \Omega$ を任意にとり，$g \in L^2(\Omega)$，$\rho \in C^1[0, T]$，$\rho(0) \ne 0$ とし，u を (4.1) の解とする．このとき，$\omega \times (0, T)$ で $u = 0$ ならば，Ω で $g = 0$ が成り立つ．

証明の概略を述べる．条件 $u|_{\omega \times (0,T)} = 0$ を (4.3) に代入すると，

$$0 = J^{1-\alpha} u = \rho * v \quad \text{in } \omega \times (0, T)$$

であるから，両辺を t について微分すると

$$\rho(0) v + \rho' * v = 0 \quad \text{in } \omega \times (0, T)$$

が得られる．$\rho(0) \ne 0$ なので，Grönwall の不等式より $\omega \times (0, T)$ で $v = 0$ が成り立つ．定理 3.5 を用いると，$\Omega \times (0, +\infty)$ で $v = 0$ なので，Ω で $g = \lim_{t \to 0} v(\,\cdot\,, 0) = 0$ が導かれた．

上記の 2 種類の逆問題に対する数値解析および異なる問題設定に関する源泉項決定逆問題について，詳細は [24] およびその参考文献を参考されたい．

続いて，非整数階拡散方程式の源泉項決定逆問題に関する最新の進展を三つ紹介する．まず，(4.1) のような変数分離の源泉項ではなく，移動する物体を表す源泉項を考える：

$$(\partial_t^\alpha + \mathcal{L}) u(\boldsymbol{x}, t) = F(\boldsymbol{x}, t) = g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\zeta}(t)).$$

ただし，$\boldsymbol{\zeta} : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ は物体の軌道，$g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ は物体の形状を表す．このとき，軌道 $\boldsymbol{\zeta}$ と形状 g を決定する 2 種類の逆問題が考えられるが，[10] では前者に対して，複数の点における観測データによる局所安定性を示した．一方，物体が平行移動，すなわち $\boldsymbol{\zeta}'' \equiv \mathbf{0}$ の場合に限って，[23] は後者に対して，部分領域における観測データによる一意性を示した．

残り二つの進展は，定式化を (4.1) のような変数分離の源泉項のままに，理論と応用双方のニーズから観測データの削減に関する研究である．第一に，定理 4.4 を振り返ると，証明は弱一意接続性（定理 3.5）に基づくので，部分領域 $\omega \times (0, T)$ における観測データのみならず，隠れたデータとして斉次 Dirichlet 境界条件もアクセスしている．境界データを使わず，しかも領域内部における観測も可能な限り減らすのに，定理 3.5 より強い一意接続性が必要であるが，一般の場合に対して極めて難しい．[13] では，空間次元 $d = 1$ かつ $\mathcal{L} = -\partial_x^2 + c(x)$

の場合に限って，境界条件なしの斉次問題 (4.4) の Cauchy データによる一意接続性を確立した．すなわち，v が

$$\begin{cases}(\partial_t^\alpha - \partial_x^2 + c(x))v = 0 & \text{in } \Omega \times (0,T),\\ v = v_x = 0 & \text{at } \{x_0\} \times (0,T)\end{cases}$$

をみたせば，$\Omega \times (0,T)$ で $v=0$ が成り立つ．この結果に基づき，定理 4.4 の証明と同じ論法を用いれば，Cauchy データ $(u,u_x)|_{\{x_0\}\times(0,T)}$ による源泉項の空間成分 $g(x)$ の一意性が示せる．このデータ量は，定理 4.4 のと比べて本質的に少ない．

一方，$g(\boldsymbol{x})$ を決定する逆問題に関するほとんどの先行研究では，観測は $t=0$ から始まり，さらに定理 4.4 のように $\rho(0) \neq 0$ を仮定した．このような設定は応用問題において，初期時刻にすでに汚染物質が漏れて，しかも同時に観測を開始することを意味する．しかし突発的な事故などの場合，事故発生から観測開始まで時間を要し，上記の設定は現実的ではない．よって，ある $T_1 \in (0,T)$ として $\omega \times (T_1,T)$ における観測データが理想的であるが，[19] はこのような観測による $g(\boldsymbol{x})$ の一意性を示した．証明は非整数階 Duhamel の原理 (4.3) と Titchmarsh の畳み込みの定理によるが，つぎの事実は肝心である：$f \in H_\alpha(0,T)$ が (T_1,T) で $f = \partial_t^\alpha f = 0$ ならば，f は $(0,T)$ で恒等的に 0 である．この事実は $\alpha = 1$ のとき当然成り立たないので，非局所性ならではの結果といえる．

4.3　係数決定逆問題

最後に，(4.1) で $\mathcal{L} = -\triangle + c(\boldsymbol{x})$ と制限した上，時間微分階数 α と係数 $c(\boldsymbol{x})$ を同時に決定する逆問題を考える．楕円型作用素 $\mathcal{L}$ に現れる係数を決定する逆問題は，EIT（electrical impedance tomography）を代表とする非破壊検査の数理モデルであり，理論と応用の重要性からよく調べられてきた．このような問題に対して，$\partial\Omega$ で与えられた Dirichlet 境界条件を入力，解の Neumann データ $\partial_{\boldsymbol{\nu}} u$（$\boldsymbol{\nu}$ は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトル）を出力として，入力を変えて無限回繰り返し観測することが一般的である．この入力と出力の対応 $\Lambda : u|_{\partial\Omega} \longmapsto \partial_{\boldsymbol{\nu}} u|_{\partial\Omega}$ を Dirichlet-to-Neumann 写像と呼ぶが，Λ は未知係数に依存するので，係数決定逆問題は Λ から係数を決定する問題として定式化される．よって，(4.1) に対する係数決定逆問題も，境界条件 $\Phi(\boldsymbol{x},t)$ を動かして Dirichlet-to-Neumann 写像を得る必要がある．

以下，(4.1) で常に $a = F = 0$ とする．[16] は，時間解析性と Laplace 変換を用いて (4.1) を楕円型方程式に変換し，後者の Dirichlet-to-Neumann 写像に関する既知の問題に帰着することによって，つぎの一意性を示した．

定理 4.5. (4.1) で $\Phi(\boldsymbol{x},t) = \psi(t)\eta(\boldsymbol{x})$ とし，ψ は解析的かつ $\psi(0)=0, \psi'(0) \neq 0$ とする．係数 α と $c(\boldsymbol{x})$ に依存する Dirichlet-to-Neumann 写像を

$$\Lambda(\alpha,c)\eta := \partial_{\boldsymbol{\nu}} u|_{\Omega\times(0,T)} \quad (\eta \in H^{3/2}(\partial\Omega))$$

と定めると，$\Lambda(\alpha_1,c_1) = \Lambda(\alpha_2,c_2)$ ならば $(\alpha_1,c_1) = (\alpha_2,c_2)$ が成り立つ．

上記の一意性は，Dirichlet 境界条件 Φ の空間成分 η を動かして，$\partial\Omega \times (0,T)$ において無限回 Neumann データを観測して得られた．しかし，(4.1) は発展方程式であり，その Dirichlet-to-Neumann 写像には楕円型方程式にない時間方向の情報が含まれているので，観測データ

を削減する可能性が十分ある．のちに，一つの時刻 t_0 における無限回の観測による一意性も示された（詳細は [20] を参照）．さらに，[12] は Dirichlet 境界条件 Φ を巧妙に設定することで，無限回だった観測をたった一回に減らして同じ一意性を証明した．

定理 4.6. $\Gamma_{\mathrm{in}}, \Gamma_{\mathrm{out}} \subset \partial\Omega$ を部分境界とし，$\Gamma_{\mathrm{in}} \cup \Gamma_{\mathrm{out}} = \Omega$，$\Gamma_{\mathrm{in}} \cap \Gamma_{\mathrm{out}} \neq \emptyset$ とし，(4.1) の境界条件をつぎのように定める：

$$\Phi(\boldsymbol{x}, t) = \chi(\boldsymbol{x}) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \psi_k(t) \eta_k(\boldsymbol{x}).$$

ただし，$\chi \in C^\infty(\partial\Omega)$ は $\operatorname{supp} \chi \subset \Gamma_{\mathrm{in}}$ をみたし，$\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は $H^{3/2}(\partial\Omega)$ で稠密である．u_1 と u_2 をそれぞれ (α_1, c_1) と (α_2, c_2) を係数とした (4.1) の解としたとき，$\Gamma_{\mathrm{out}} \times (0, T)$ で $\partial_{\boldsymbol{\nu}} u_1 = \partial_{\boldsymbol{\nu}} u_2$ ならば，$(\alpha_1, c_1) = (\alpha_2, c_2)$ が成り立つ．

上記の定理は観測回数を一回に減らしただけでなく，Dirichlet 境界条件 Φ の台を $\Gamma_{\mathrm{in}} \times [0, T]$ に，Neumann データのとれる範囲を $\Gamma_{\mathrm{out}} \times (0, T)$ に一般化した．Φ を級数の形にすることで問題を無限個のサブ問題に分解し，一回の観測は実際に無限回の観測と同等の役割を果たすことが肝心であるが，詳細は割愛する．

5 まとめ

本稿は非局所モデルの一つである非整数階微分をもつ偏微分方程式を対象に，特に時間方向に 1 回以下の Caputo 微分 ∂_t^α をもつ拡散方程式に焦点を当て，その初期値境界値問題の基本性質および関連する逆問題をサーベイした．特殊関数による厳密解の表示や非整数階 Duhamel の原理から，非整数階拡散方程式は通常の拡散方程式の自然な一般化といえる．特に斉次問題について，最大値原理や時間解析性などの性質は完全に一致する．一方，解の正則性と一意接続性に関して，前者は後者より少し結果は弱いが，定性的に類似している．しかし，通常の拡散方程式が示す指数減衰に比べて，非整数階拡散方程式の解の減衰は $t^{-\alpha}$ であり，漸近挙動の側面で両者に決定的な差異が見られる．

表 1: $(\partial_t^\alpha + \mathcal{L})u = 0$ $(0 < \alpha \le 1)$ の性質の比較.

	$\alpha = 1$	$0 < \alpha < 1$	応用
漸近挙動	$\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}$	$t^{-\alpha}$	パラメーター決定逆問題
平滑化効果	強い	限定的	初期値決定逆問題
一意接続性	強い	弱い	源泉項の空間成分を決定する逆問題
最大値原理	◯	◯	源泉項の時間成分を決定する逆問題
時間解析性	◯	◯	係数決定逆問題

最後に，関連問題および今後の課題に触れて本稿を結ぶ．上述より，非整数階拡散方程式はかなり解明されたように見えるが，未解決問題はまだ多く残っている．そもそも Caputo 微分 ∂_t^α の定義は $L^2(0, T)$ に基づく分数べき Sobolev 空間 $H_\alpha(0, T)$ でしか構築しておらず，

特に $\alpha \leq 1/2$ のときの初期値の意味付けや非線形問題のためにも，L^p 理論への一般化は喫緊である．一方，最大値原理および付随する比較原理が示した以上，例えば準線形問題

$$(\partial_t^\alpha + \mathcal{L})u = f(u)$$

に対する優解・劣解の方法や爆発問題は考えられるようになった．また，今までの解析はほとんど単独の方程式に留まるが，現存の手法を微修正すればすぐ結合系

$$\begin{cases} (\partial_t^\alpha + \mathcal{L}_1)u = a_{11}u + a_{12}v, \\ (\partial_t^\beta + \mathcal{L}_2)v = a_{21}u + a_{22}v \end{cases}$$

に適用できると思われる．さらに上記の解析が進み，両者を統合すれば，非整数階反応拡散系

$$\begin{cases} (\partial_t^\alpha + \mathcal{L}_1)u = f(u, v), \\ (\partial_t^\beta + \mathcal{L}_2)v = g(u, v) \end{cases}$$

も視野に入れられる．

他方，本稿は $\alpha < 1$ に限って論じてきたが，$1 < \alpha < 2$ のときの非整数階波動方程式についても興味深い．この場合，方程式に拡散と波動の性質が混在し，解は正値性を失いが振動し始めるが，ゼロ点の分布や形状も重要なテーマになる．また，拡散方程式が有する質量保存と波動方程式が有するエネルギー保存は共に破綻するが，解の質量とエネルギーの α に関する増減の解明および新しい保存則の発見も面白い課題である．さらに，関連する逆問題も既存の結果と比較しながら解明したい．

謝辞　本研究は，科学研究費補助金（若手研究，課題番号 20K14355, 22K13954）の助成を受けている．

参考文献

[1] M.T. Barlow, E.A. Perkins, Brownian motion on the Sierpiński gasket, *Probab. Theory Related Fields*, **79**, 1988, 543–623.

[2] T.S. Brown, S. Du, H. Eruslu, F.J. Sayas, Analysis of models for viscoelastic wave propagation, *Appl. Math. Nonlinear Sci.*, **3**, 2018, 55–96.

[3] L. Caffarelli, L. Silvestre, An extension problem related to the fractional Laplacian, *Comm. Partial Differential Equations*, **32**, 2007, 1245–1260.

[4] Q. Du, M. Gunzburger, R.B. Lehoucq, K. Zhou, A nonlocal vector calculus, nonlocal volume-constrained problems, and nonlocal balance laws, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **23**, 2013, 493–540.

[5] S.D. Eidelman, A.N. Kochubei, Cauchy problem for fractional diffusion equations, *J. Differential Equations*, **199**, 2004, 211–255.

[6] Y. Giga, T. Namba, Well-posedness of Hamilton-Jacobi equations with Caputo's time fractional derivative, *Comm. Partial Differential Equations*, **42**, 2017, 1088–1120.

[7] R. Gorenflo, Y. Luchko, M. Yamamoto, Time-fractional diffusion equation in the fractional Sobolev spaces, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **18**, 2015, 799–820.

[8] Y. Hatano, N. Hatano, Dispersive transport of ions in column experiments: an explanation of long-tailed profiles, *Water Resour. Res.*, **34**, 1998, 1027–1033.

[9] Y. Hatano, J. Nakagawa, S. Wang, M. Yamamoto, Determination of order in fractional diffusion equation, *J. Math-for-Ind.*, **5A**, 2013, 51–57.

[10] G. Hu, Y. Liu, M. Yamamoto, Inverse moving source problems for fractional diffusion(-wave) equations: Determination of orbits, Inverse Problems and Related Topics, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 310, Springer, Singapore, 2020, 81–100.

[11] D. Jiang, Z. Li, Y. Liu, M. Yamamoto, Weak unique continuation property and a related inverse source problem for time-fractional diffusion-advection equations, *Inverse Problems*, **33**, 2017, 055013.

[12] Y. Kian, Z. Li, Y. Liu, M. Yamamoto, The uniqueness of inverse problems for a fractional equation with a single measurement, *Math. Ann.*, **380**, 2021, 1465–1495.

[13] Y. Kian, Y. Liu, M. Yamamoto, Uniqueness of inverse source problems for general evolution equations, *Commun. Contemp. Math.*, accepted, 2022. arXiv:2105.11987v1

[14] A. Kubica, K. Ryszewska, M. Yamamoto, Time-Fractional Differential Equations: A Theoretical Introduction, Springer, Singapore, 2020.

[15] M. Kwaśnicki, Ten equivalent definitions of the fractional Laplace operator, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **20**, 2017, 7–51.

[16] Z. Li, O.Y. Imanuvilov, M. Yamamoto, Uniqueness in inverse boundary value problems for fractional diffusion equations, *Inverse Problems*, **32**, 2016, 015004.

[17] Z. Li, Y. Liu, M. Yamamoto, Initial-boundary value problems for multi-term time-fractional diffusion equations with positive constant coefficients, *Appl. Math. Comput.*, **257**, 2015, 381–397.

[18] Z. Li, Y. Liu, M. Yamamoto, Inverse problems of determining parameters of the fractional partial differential equations, Handbook of Fractional Calculus with Applications, Volume 2: Fractional Differential Equations, De Gruyter, Berlin, 2019, 431–442.

[19] Z. Li, Y. Liu, M. Yamamoto, Inverse source problem for a one-dimensional time-fractional diffusion equation and unique continuation for weak solutions, *Inverse Probl. Imaging*, accepted, 2022. arXiv:2112.01018v1.

[20] Z. Li, M. Yamamoto, Inverse problems of determining coefficients of the fractional partial differential equations, Handbook of Fractional Calculus with Applications, Volume 2: Fractional Differential Equations, De Gruyter, Berlin, 2019, 443–454.

[21] C.-L. Lin, G. Nakamura, Unique continuation property for anomalous slow diffusion equation, *Comm. Partial Differential Equations*, **41**, 2016, 749–758.

[22] Y. Lin, C. Xu, Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation, *J. Comput. Phys.*, **225**, 2007, 1533–1552.

[23] Y. Liu, G. Hu, M. Yamamoto, Inverse moving source problem for time-fractional evolution equations: Determination of profiles, *Inverse Problems*, **37**, 2021, 084001.

[24] Y. Liu, Z. Li and M. Yamamoto, Inverse problems of determining sources of the fractional partial differential equations, Handbook of Fractional Calculus with Applications, Volume 2: Fractional Differential Equations, De Gruyter, Berlin, 2019, 411–430.

[25] Y. Liu, W. Rundell, M. Yamamoto, Strong maximum principle for fractional diffusion equations and an application to an inverse source problem, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **19**, 2016, 888–906.

[26] Y. Luchko, Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation, *J. Math. Anal. Appl.*, **351**, 2009, 218–223.

[27] Y. Luchko, M, Yamamoto, Maximum principle for the time-fractional PDEs, Handbook of Fractional Calculus with Applications, Volume 2: Fractional Differential Equations, De Gruyter, Berlin, 2019, 299–325.

[28] K. Sakamoto, M. Yamamoto, Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems, *J. Math. Anal. Appl.*, **382**, 2011, 426–447.

[29] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[30] Y. Zhang, H. Sun, H.H. Stowell, M. Zayernouri, S.E. Hansen, A review of applications of fractional calculus in Earth system dynamics, *Chaos Solitons Fractals*, **102**, 2017, 29–46.