ある分布型の時間遅れをもつ
微分方程式の対称的な周期解について

青山学院大学理工学部　中田行彦 *
Yukihiko Nakata
College of Science and Engineering, Aoyama Gakuin University

1　はじめに

時間遅れをもつ微分方程式は，工学や生物学でのモデリングに現れ，前世紀より定性的な性質が調べられてきた．特に，特に解の振動や周期挙動は，遅延微分方程式（Delay Differential Equations）がもつ特徴的なダイナミクスとして，多くの研究が行われてきた [9]．本稿では，遅延微分方程式の周期解について，線形微分方程式に関するよく知られた結果から，非線形の方程式に関する結果を述べる．1974 年に，Kaplan&Yorke[11] はある種の非線形遅延微分方程式とハミルトン系常微分方程式が共通の周期解を持つという対応関係があることを示した．この関係は，[5, 6, 3, 4, 23, 28] などにおいて，活発に調べられてきたが，主な結果は離散遅れをもつ遅延微分方程式に限られていた．著者は，より一般的な分布型の時間遅れをもつ微分方程式に対しても，同様の対応関係が存在すると考えている．本稿では，最近得られている遅延微分方程式周期解に関する結果も述べる．

まず，以下の時間遅れをもつ線形微分方程式について考えよう．

$$x'(t) = -x(t-\tau). \tag{1.1}$$

ここで，$\tau \geq 0$ は時間遅れを表すパラメータである．$\tau = 0$ のとき，(1.1) の一般解は，任意定数 C を用いて，$x(t) = Ce^{-t}$ と表され，全ての解は単調に零解に収束する．$\tau > 0$ のとき，(1.1) の解として，$x(t) = Ce^{\lambda t}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ の形の解を考える．ここで $\lambda \in \mathbb{C}$ は，以下の特性方程式の根として定められる：

$$\lambda = -e^{-\lambda\tau}. \tag{1.2}$$

特性方程式 (1.2) は，λ に関する超越方程式であり，その解は無数に存在する．特性方程式 (1.2) の性質はこれまで様々な文献で考察されている [2, 9, 12]．$\tau = \pi/2$ のとき，特性方程式 (1.2) は $\lambda = \pm i$ を解としてもつことから，(1.1) に対して，次の周期解が存在する：

$$x(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}. \tag{1.3}$$

ここで c_1, c_2 は任意定数である．従って，$\tau = \pi/2$ のとき，(1.1) に対して，周期が 2π の周期解 (1.3) が存在する．ここで，時間遅れ $\tau = \pi/2$ の 4 倍の長さが周期解の周期であることに注意しておこう．時間

* ynakata@math.aoyama.ac.jp

遅れに対して周期が 4 倍の周期解は，第 2 節で後に非線形な遅延微分方程式において現れる．一般的に，$\tau = \pi/2 + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$ のとき，(1.1) に対して，周期解 (1.3) が存在する．

特性方程式 (1.2) の解は，パラメータ τ に対して，連続的に変化する ([2, 9])．特性方程式 (1.2) の解の振る舞いから，$\tau < \pi/2$ が，(1.1) の自明解が漸近安定である必要十分条件であることがよく知られている．$\tau = \pi/2$ のとき，特性方程式 (1.2) の特性根 $\lambda = \pm i$ と対応して，(1.1) に対して，周期解 (1.3) が現れる．さらに τ の値を大きくすると，$\mathrm{Re}\lambda > 0$ の領域に特性根が現れ，自明解は不安定となる．より一般の線形遅延微分方程式に対しても，特性方程式の根の分布が調べられている．遅延微分方程式の特性方程式の解析については [12, 19] が詳しい．

次の遅延微分方程式は，時間遅れをもつロジスティック方程式や Hutchinson-Wright 方程式と呼ばれ，非線形な遅延微分方程式のプロトタイプとして，これまでに数多く研究されてきた [7, 9, 12]:

$$x'(t) = rx(t)(1 - x(t-\tau)). \tag{1.4}$$

ここで r は正のパラメータである．Hutchinson は，(1.4) を用いて，時間遅れの影響を含んだ個体群動態のモデリングを行った [10]．Wright は素数分布の研究を動機として，同等の微分方程式を考察している [26]．(1.4) の解に対して，$x \mapsto \log x$ の変数変換を行うと，次の時間遅れをもつ微分方程式を得る：

$$x'(t) = -f(x(t-\tau)),\ f(x) = r(e^x - 1). \tag{1.5}$$

Wright は，$r\tau \leq 3/2$ のとき，(1.5) の任意の解は，自明解に収束することを示した [12, 26]．一方で，Jones は，$r\tau > \pi/2$ のとき，(1.5) に対して，隣接する零点同士の幅が τ よりも大きい非自明な周期解が少なくとも 1 つ存在することを示している．このような周期解は，“Slowly Oscillating Periodic Solutions” と呼ばれ，(1.5) を含む広いクラスの遅延微分方程式に対して，以後も研究されている [15]．[14] では，Hutchinson-Wright 方程式の “Slowly Oscillating Periodic Solutions” の一意性がこれまで不明であったパラメータに対して，計算機を援用した解析手法によって，一意性が示された．

2 Kaplan&Yorke の周期解

Kaplan&Yorke は，論文 [11] にて，以下の遅延微分方程式に対して，ある常微分方程式系を用いて周期解を構成している．

$$x'(t) = -f(x(t-1)). \tag{2.1}$$

ここでは，時間遅れのパラメータが 1 に正規化されている．さらに，関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は，以下の条件を満たすリプシッツ連続な連続関数であるとする．

(H1) $\quad xf(x) > 0 \ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

(H2) $\quad f(x) = f(-x) \ \ (x \in \mathbb{R})$

条件 (H1), (H2) は，方程式 (2.1) に「時間遅れの負のフィードバック（delayed negative feedback）」を与える．(1.5) の例においても，条件 (H1) は満たされていることに注意する．多くの遅延微分方程式において，時間遅れの負のフィードバックによって，周期解が出現する現象が見られる．条件 (H2) は，f が奇関数であることを要請している．この条件は，Hutchinson-Wright 方程式 (1.5) では満たされていない．従って，以下の議論は Hutchinson-Wright 方程式 (1.5) については直接成り立たない．非線形関数の対称性は，以下で見る通り，(2.1) の周期解の形状に大きく関係している．

Kaplan&Yorke は，遅延微分方程式 (2.1) に対して，

$$x(t) = -x(t-2) \tag{2.2}$$

を満たす周期 4 の解について，以下のように考察した．(2.2) を満たす最小周期が 4 の周期解は，後に特別対称周期解（Special Symmetric Periodic Solutions, SSPS）と呼ばれている [3, 4].

微分方程式 (2.1) の SSPS を $x(t)$ で表し，$y(t) = x(t-1)$ とおく．このとき，条件 (H1), (H2) と (2.2) から，$y(t)$ は次の微分方程式を満たす：

$$\begin{aligned} y'(t) &= x'(t-1) \\ &= -f(x(t-2)) \\ &= f(-x(t-2)) \\ &= f(x(t)). \end{aligned}$$

従って，

$$(x(t), y(t)) = (x(t), x(t-1))$$

は，次の常微分方程式系を満たす．

$$x'(t) = -f(y(t)), \tag{2.3a}$$
$$y'(t) = f(x(t)). \tag{2.3b}$$

初期条件 $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ を通る常微分方程式 (2.3) の解は

$$\int_{x_0}^{x(t)} f(\xi) d\xi + \int_{y_0}^{y(t)} f(\xi) d\xi = 0$$

を満たす．常微分方程式 (2.3) は保存量をもつハミルトン系の常微分方程式であり，その解挙動については古くから調べられている [25]．(2.3) の周期 4 の解について，その第 1 成分 $x(t)$ は遅延微分方程式 (2.1) を満たすことが示される．次の結果が成り立つ．

定理 1. *([11, 23])* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は，*(H1), (H2)* を満たすリプシッツ連続な連続関数とする．以下が成り立つ．

- 遅延微分方程式 *(2.1)* の，*(2.2)* を満たす最小周期 4 の周期解 $x(t)$ に対して，

  $$(x(t), y(t)) = (x(t), x(t-1))$$

  は，常微分方程式系 *(2.3)* の周期 4 の周期解である．
- 常微分方程式系 *(2.3)* の周期 4 の周期解 $(x(t), y(t))$ に対して，$x(t)$ は遅延微分方程式 *(2.1)* の，*(2.2)* を満たす周期 4 の周期解である．

この結果は，ハミルトン系常微分方程式 (2.3) の周期解と遅延微分方程式 (2.1) の周期解を関連付け，共通の周期解が存在することを示している．Dormayer&Ivanov は，Kaplan&Yorke の結果を次の微分方程式に一般化している [3, 4].

$$x'(t) = -g(x(t), x(t-1)). \tag{2.4}$$

彼らも，関数 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して適当な対称性を仮定し，特別対称周期解の存在について結果を得ている．遅延微分方程式 (2.4) の特別対称周期解が満たす常微分方程式系は，ハミルトン系の常微分方程式ではない．また彼らは，周期解の安定性についても解析を行っている．[1] では，Kaplan&Yorke の結果を用いて，積分方程式の周期解の存在を遅延微分方程式 (2.1) の周期解と関連付けている．

3 複数の時間遅れをもつ微分方程式

Kaplan&Yorke は同じ論文 [11] にて，複数の時間遅れをもつ遅延微分方程式に対しても，同様の対称性をもつ周期解が存在することを予想し，部分的な結果を得ている．Kaplan&Yorke は，2 つの時間遅れをもつ微分方程式

$$x'(t) = -f(x(t-1)) - f(x(t-2))$$

に対して，周期 6 の周期解が存在することを示している．この場合は，

$$x(t) = -x(t-3)$$

を満たす周期解の探索において，以下の 3 次元のハミルトン系常微分方程式が現れる．

$$\begin{aligned} x' &= -f(y) - f(z), \\ y' &= -f(z) + f(x), \\ z' &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

初期条件 $(x(t), y(t), z(t)) = (x_0, y_0, z_0)$ を通る常微分方程式 (3.1) の解は

$$\int_{x_0}^{x(t)} f(\xi)d\xi + \int_{y_0}^{y(t)} f(\xi)d\xi + \int_{z_0}^{z(t)} f(\xi)d\xi = 0$$

と共に，

$$x(t) - y(t) + z(t) = x_0 - y_0 + z_0$$

を満たす．このことから，(3.1) に対して，2 次元の平面上で周期解を捕まえることが可能である．

ハミルトン系常微分方程式の周期解については，これまでに数多くの研究がある（[24] やその参考文献を参照のこと）．ただし，上記のような遅延微分方程式に対して，対応するハミルトン系常微分方程式の周期解が全て，遅延微分方程式の周期解となるかについては吟味が必要である．Fei は，[5, 6] で，変分法を用いて，高次元のハミルトン系常微分方程式の対称的な周期解の存在を調べた．n を 2 以上の整数として，以下の複数の時間遅れをもつ遅延微分方程式を考える．

$$x'(t) = -\sum_{k=1}^{n-1} f(x(t-k)). \tag{3.2}$$

ここでも，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は (H1), (H2) を満たすとする．遅延微分方程式 (3.2) について，

$$x(t) = -x(t-n) \tag{3.3}$$

を満たす周期解を考えよう．(3.3) を満たす，遅延微分方程式 (2.1) の周期解 $x(t)$ に対して，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\ &= (x(t), x(t-1), \ldots, x(t-n+1)) \end{aligned} \tag{3.4}$$

とおく．このとき，

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= -\sum_{k=2}^{n} f(x_k(t)),\\
x_2'(t) &= -\sum_{k=1}^{n-1} f(x_2(t-k))\\
&= -f(x_3(t)) - f(x_4(t)) - \cdots + f(x_2(t+1))\\
&= -\sum_{k=3}^{n} f(x_k(t)) + f(x_1(t)),\\
&\vdots\\
x_i'(t) &= -\sum_{k=1}^{n-1} f(x_i(t-k))\\
&= -f(x_{i+1}(t)) - f(x_{i+2}(t)) - \cdots + f(x_1(t)) \cdots + f(x_{i-1}(t))\\
&= -\sum_{k=i+1}^{n} f(x_k(t)) + \sum_{k=1}^{i-1} f(x_k(t))\ (i = 2, 3, \ldots, n-1),\\
x_n'(t) &= -\sum_{k=1}^{n-1} f(x_n(t-k))\\
&= f(x_1(t)) + \cdots + f(x_{n-1}(t))\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k(t))
\end{aligned}
$$

より，(3.4) は，次の常微分方程式系の解であることがわかる．

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\Psi(\boldsymbol{x}(t)), \tag{3.5}$$

ここで

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \Psi(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}
$$

である．

Fei は，[5, 6] で，変分法によって (3.5) の対称性 (3.3) を満たす周期解を求めた．(3.5) の周期解は，あるヒルベルト空間上のある汎関数の臨界点として得られる．ハミルトン系常微分方程式の周期解は，必ずしも対称性 (3.3) を満たすわけではない．このことから，対称性 (3.3) を満たす関数空間において，汎関数の臨界点の存在を調べることが重要である．

定理 2. *([5, 6])* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は，*(H1), (H2)* を満たすリプシッツ連続な連続関数とする．以下が成り立つ．

- 遅延微分方程式 *(3.2)* の，*(3.3)* を満たす最小周期 $2n$ の周期解 $x(t)$ に対して，

  $$\boldsymbol{x}(t) = (x(t), x(t-1), \ldots, x(t-n+1))$$

  は，常微分方程式系 *(2.3)* の周期 $2n$ の周期解である．

- 常微分方程式系 *(2.3)* の周期 $2n$ の周期解

$$\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

  に対して，$x_1(t)$ は遅延微分方程式 *(3.2)* の，*(3.3)* を満たす周期 $2n$ の周期解である．

(3.3) を満たす周期 $2n$ の周期解について，$f(x(t)) = -f(x(t-n))$ が成り立つことから，この周期解は,

$$x'(t) = -\sum_{k=0}^{n} f(x(t-k)) \tag{3.6}$$

の周期解でもある．このとき，最大の時間遅れ n に対して，周期がその 2 倍の周期解が存在する．

Fei による結果は，様々な拡張が行われ，複数の離散遅れをもつ連立遅延微分方程式に対しても同様の結果が得られている [8, 28].

複数の時間遅れをもつ遅延微分方程式 (3.6) に対して，$\tilde{x}(t) = x(nt)$ なる変換を施し，$n \to \infty$ とすると，極限方程式として，次の分布型の遅延微分方程式（Distributed Delay Differential Equations）を得る：

$$x'(t) = -\int_0^1 f(x(t-s))ds. \tag{3.7}$$

この遅延微分方程式 (3.7) について，同様の対称性を満たす周期 2 の解が存在することを，初等的に調べることが可能である．詳しくは，論文 [21] を参照されたい．(3.7) に対して,

$$x(t) = -x(t-1) \tag{3.8}$$

を満たす周期解を考えよう．この時，(3.8) を満たす，遅延微分方程式 (2.1) の周期解 $x(t)$ に対して,

$$\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) \\ y'(t) &= 2f(x(t)). \end{aligned}$$

微分方程式 (3.7) の特別対称周期解は，ハミルトン系常微分方程式 (3.9) の最小周期 2 の周期解と関連づけられる：

定理 3. *([21])* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は，*(H1), (H2)* を満たすリプシッツ連続な連続関数とする．以下が成り立つ．

- 遅延微分方程式 *(3.7)* の，*(3.8)* を満たす最小周期 2 の周期解 $x(t)$ に対して,

$$(x(t), y(t)) = \left(x(t), \int_0^1 f(x(t-s))ds\right)$$

  は，常微分方程式系 *(3.9)* の周期 2 の周期解である．

- 常微分方程式系 *(3.9)* の周期 $2n$ の周期解 $(x(t), y(t))$ に対して，$x(t)$ は遅延微分方程式 *(3.7)* の，*(3.8)* を満たす周期 2 の周期解である．

証明. $x(t)$ を (3.7) の SSPS とする．$y(t) = \int_0^1 f(x(t-s))ds$ に対して,

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(x(t)) - f(x(t-1)) \\ &= f(x(t)) - f(-x(t)) \\ &= 2f(x(t)) \end{aligned}$$

を得る．従って，(3.7) の SSPS は，(3.9) を満たす周期 2 の解であることがわかる．

次に，$(x(t), y(t))$ を (3.9) の周期 2 の周期解とする．このとき，以下を示す．

$$x(t) = -x(t-1),$$
$$y(t) = \int_{t-1}^{t} f(x(s))ds.$$

$\{(-x(t), -y(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ も同じ解軌道を表すことから，

$$(x(t+1), y(t+1)) = (-x(t), -y(t)),\ t \in \mathbb{R}.$$

$x(t)$ の周期は 2 なので，$x(t-1) = -x(t)$ が成り立つ．従って

$$y'(t) = 2f(x(t)) = f(x(t)) - f(x(t-1)),$$

が成り立ち，このことから $y(t) = \int_{t-1}^{t} f(x(s))ds + \mathrm{Const}$ と表される．積分定数が 0 であることを示す．$x(\frac{1}{2}) = 0$, $y(\frac{1}{2}) > 0$ を満たす周期 2 の解軌道を考える．$(x, y) = (-x(-t), y(-t))$ もまた，(3.9) の解であるから，解の一意性より，$\left(x\left(\frac{1}{2}+t\right), y\left(\frac{1}{2}+t\right)\right) = \left(-x\left(\frac{1}{2}-t\right), y\left(\frac{1}{2}-t\right)\right)$．このことから x は $t = 1/2$ に関する奇関数である．即ち $x(t+\frac{1}{2}) = -x(t-\frac{1}{2})$ が成り立つ．従って

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} f(x(s))ds$$

を得る．このことから，$x(t)$ は，(3.7) の SSPS である． □

4 時間遅れの対称性

遅延微分方程式 (2.1) について，もう一度見てみよう．Kaplan&Yorke によって構成された SSPS は，(2.2) を満たすことから，

$$f(x(t)) + f(x(t-2)) = 0,\ t \in \mathbb{R}$$

が成り立っている．このことから，(2.1) の SSPS は，次の遅延微分方程式の SSPS でもある．

$$x'(t) = -f(x(t)) - f(x(t-1)) - f(x(t-2)).$$

より一般に，時間遅れの分布が一様でないような「重み付き」の微分方程式を考えることも可能である．

$$x'(t) = -cf(x(t)) - f(x(t-1)) - cf(x(t-2)). \tag{4.1}$$

ここで $c \in \mathbb{R}$．以下が成り立つ．

命題 4. *(2.1) の SSPS は，(4.1) の SSPS であり，(4.1) の SSPS は，(2.1) の SSPS である．*

$r = f'(0)$ とおく．(2.1) の自明解は

$$r > \frac{\pi}{2}$$

のとき不安定であり，$r < \dfrac{\pi}{2}$ のとき漸近安定である．(4.1) の零解の安定性条件も，複数遅れがあるにも関わらず，同様である．

より一般的に，[18] によって，以下の分布型の時間遅れをもつ線形微分方程式の安定性条件が調べられている．

$$x'(t) = -r\int_0^1 x(t-s)d\eta(s). \tag{4.2}$$

ここで，r は正の実数のパラメータ，$\eta : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ は正規化された有界変動関数である．

有界変動関数 $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}$ は，$\eta(0) = 0$ であり，開区間 $(0,1)$ 上で右連続であるとき，すなわち，任意の点 $c \in (0,1)$ に対して，$\eta(c) = \lim_{s \to c+0} \eta(s)$ が成り立つとき，正規化された有界変動関数（Normalized Bounded Variation Function）と呼ぶ [2]．(4.2) に対して，以下の条件を満たす η を考える．

(H3)　η は閉区間 $[0,1]$ における単調増加関数で，正規化された有界変動関数である．

(H4)　$\eta(1) = 1$,

(H5)　$\eta(s) + \eta(1-s) = 1$ $a.e.$ $s \in [0,1]$（可算個の不連続点を除いて）

η は正規化された有界変動関数であるため，$\eta(0) = 0$ であり，$\eta(1) = 1$ より

$$\int_0^1 d\eta(s) = \eta(1) - \eta(0) = 1$$

が成り立つ．また最後の条件は，時間遅れの分布が $s = 1/2$ に対して対称であることを意味している．また部分積分によって，次の結果を得る．

補題 5. *(H3), (H4), (H5)* を仮定する．$0 \le \theta \le 1$ に対して，以下が成り立つ．

$$\int_0^\theta s d\eta(s) = \eta(\theta)\theta - \int_0^\theta \eta(s) ds.$$

特に，

$$\int_0^1 s d\eta(s) = 1 - \int_0^1 \eta(s) ds = \frac{1}{2}. \tag{4.3}$$

(4.3) は，時間遅れの平均が $1/2$ であることを示す．

遅延微分方程式 (4.2) に対して，$x(t) = e^{\lambda t}$ を代入し，次の特性方程式を得る．

$$\lambda = -r \int_0^1 e^{-\lambda s} d\eta(s), \ \lambda \in \mathbb{C} \tag{4.4}$$

[18] より，次の結果が成り立つ．

定理 6. *([18]) (H3), (H4), (H5)* を仮定する．微分方程式 *(4.2)* の零解が漸近安定である必要十分条件は

$$r < \frac{\pi}{\int_0^1 \sin(\pi s) \, d\eta(s)} \tag{4.5}$$

である．

注意 7. 今

$$\eta(s) = \begin{cases} 0 & 0 \le s < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} \tag{4.6}$$

とおくと，遅延微分方程式 (4.2) は，以下の定数遅れをもつ微分方程式

$$x'(t) = -rx(t - \frac{1}{2}) \tag{4.7}$$

であり，定理 6 よりよく知られた自明解の安定性条件 $\frac{1}{2} r < \frac{\pi}{2}$ を得る．また $\int_0^1 \sin(\pi s) \, d\eta(s) \le 1$ より，

$$\pi \le \frac{\pi}{\int_0^1 \sin(\pi s) \, d\eta(s)}$$

が成り立つ．このことから，(4.7) が漸近安定であるならば，(4.2) の自明解も漸近安定であることがわかる．時間遅れの分散は，安定性条件の改善に寄与する．

さらに，(4.5) において等式が成り立つクリティカルな状況では，周期 2 の解が存在し，全ての解を吸引することが示されている．

定理 8. *([18]) (H3), (H4), (H5)* を仮定する．方程式 *(4.2)* に対して，

$$r = \frac{\pi}{\int_0^1 \sin(\pi s)\, d\eta(s)} \tag{4.8}$$

のとき，特性方程式は純虚数解 $\lambda = \pm i\pi$ をもつ．従って *(4.8)* が成り立つとき，方程式 *(4.2)* は周期 2 の解 $x(t) = c_1 e^{i\pi t} + c_2 e^{-i\pi t}$ をもつ．

線形微分方程式 (4.2) のダイナミクスを手がかりとして，次の分布型の時間遅れをもつ微分方程式について考えよう．

$$x'(t) = -\int_0^1 f(x(t-s)d\eta(s). \tag{4.9}$$

ここで，η は上記と同様の正規化された有界変動関数である．このため方程式 (4.9) の右辺における時間遅れの影響は，$s = 1/2$ に関する対称性を持つ．また f についても，条件 (H1), (H2) を課す．このとき，方程式 (4.9) に対しても，対称的な周期解が存在するであろうか？

η が (4.6) で与えられる場合は，(4.9) は $x'(t) = -f(x(t-1/2))$ となる．また，$\eta(s) = s$ のとき，(4.9) は，(3.7) となる．これらの方程式に対する同様の結果は，方程式 (4.9) に対しても成り立つだろうか？

$f(x)$ を C^1 級関数とし，

$$f(x) = r\overline{f}(x),\ r = f'(0)$$

とする．r をパラメータとみなすと，定理 6 より，

$$r > \frac{\pi}{\int_0^1 \sin(\pi s)\, d\eta(s)}$$

のとき，零解は不安定である．さらに，定理 8 より，$f(x)$ が適当な条件を満たせば，Hopf 分岐によって周期 2 の解が出現することが期待される．ここで，周期 2 の解の探索において Kaplan&Yorke が行ったような Ansatz を行っても，分布型の時間遅れのため，有限次元の連立微分方程式は現れず，無限次元の微分方程式について考えることとなる．このような状況において，周期解の存在を示すことは現在の課題となっている．

$f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ のときは，周期 2 の解を具体的に構成することが可能である．(4.9) に対して，

$$x(t) \begin{cases} < 0 & t \in [-1, 0) \\ = 0 & t = 0 \end{cases}$$

の初期条件を考える．このとき $t \leq 1$ に対して

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\int_0^t f(x(t-s))d\eta(s) - \int_t^1 f(x(t-s))d\eta(s) \\ &= -\int_0^t d\eta(s) + \int_t^1 d\eta(s) \\ &= 1 - 2\eta(t). \end{aligned}$$

ここで η の対称性より，

$$x'(t)+x'(1-t)=1-2\eta(t)-2\eta(1-t)=0, \text{a.e. } t\in[0,1]$$

が成り立つことに注意する．

$$x(t)=t-2\int_0^t \eta(s)ds$$

を得る．ここで，$x(t)\geq 0,\ t\in[0,1]$ であり，$x(1)=0$ である．同様にして，$1\leq t\leq 2$ においては，

$$x(t)=-x(t-1)$$

を満たす解を得る．このように，(4.9) に対して，

$$x(t)=x(1-t)=-x(1+t),\ t\in[0,1] \tag{4.10}$$

を満たす対称的な周期解を得る．この周期解は連続関数であるが，導関数 $x'(t)$ は必ずしも連続ではない．例えば，η を (4.6) とした特別な場合は，

$$x(t)=\begin{cases} t & 0\leq t<\frac{1}{2} \\ 1-t & \frac{1}{2}\leq t<\frac{3}{2} \\ -2+t & \frac{3}{2}\leq t\leq 2 \end{cases}$$

で表される周期解が現れる．この周期解の吸引性は，[2] の Chapter XVI で詳細に調べられている．

$f(x)$ が条件 (H1), (H2) を満たすとき，(4.9) に対して，(4.10) の対称性をもつ周期 2 の周期解が存在すると考えているが，この証明は今後の課題である．

謝辞

本研究は科研費（No. 20K03734）の助成を受けたものである．

参考文献

[1] D. Breda, O. Diekmann, D. Liessi, F. Scarabel, Numerical bifurcation analysis of a class of nonlinear renewal equations. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **65** (2016) 1–24.

[2] O. Diekmann, S.A. van Gils, S.M. Verduyn Lunel, H.-O. Walther, Delay equations. Functional, complex and nonlinear analysis, Applied Mathematical Sciences, Vol. 110, Springer Verlag, New York, 1995.

[3] P. Dormayer, A. F. Ivanov, Symmetric periodic solutions of a delay differential equation. Conf. Publ. (1998) (Special) 220–230.

[4] P. Dormayer, A. F. Ivanov, Stability of symmetric periodic solutions with small amplitude of $x'(t)=\alpha f(x(t),x(t-1))$. Disc. Cont. Dyn. Sys. Ser. A **5** (1) (1999) 61–82.

[5] G. Fei, Multiple periodic solutions of differential delay equations via Hamiltonian systems (I) Nonlinear Anal., TMA **65** (1) (2006) 25–39.

[6] G. Fei, Multiple periodic solutions of differential delay equations via Hamiltonian systems (II). Nonlinear Anal., TMA **65** (1) (2006) 40–58.

[7] K. Gopalsamy, Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. Mathematics and Its Applications, Springer, 1992.

[8] Z. Guo and J. Yu, Multiplicity results on period solutions to higher dimensional differential equations with multiple delays. J. Dyn. Diff. Equ., **23**(4), (2011) 1029–1052.

[9] J.K. Hale, S. M. Verduyn Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, Vol. 99, Springer Verlag, New York, second edition, 1993.

[10] G.E. Hutchinson, Circular causal systems in ecology, Ann. N.Y. Acad. Sci. **50** (1948) 221–246.

[11] J.L. Kaplan, and J.A. Yorke, Ordinary differential equations which yield periodic solutions of differential delay equations. J. Math. Anal. Appl., **48** (1974) 317–324.

[12] Y. Kuang, Delay differential equations with applications in population dynamics, Dynamics in Science and Engineering, Vol. 191, Academic Press, New York, 1993.

[13] G.S. Jones, The existence of periodic solutions of $f'(x) = -\alpha f(x-1)\{1+f(x)\}$. J. Math. Anal. Appl. **5** (1962) 435–450.

[14] J. Jaquette, A proof of Jones' conjecture. J. Differential Equ. **266**(6) (2019) 3818–3859

[15] B. Kennedy, E. Stumpf, Multiple slowly oscillating periodic solutions for $x'(t) = f(x(t-1))$ with negative feedback. Ann. Pol. Math. **118** (2016) 113–140.

[16] B. Kennedy, Symmetric periodic solutions for a class of differential delay equations with distributed delay. Electron. J. Qual. Theo. Diff. Equ. **4** (2014) 1–18.

[17] K.R. Meyer, Jacobi elliptic functions from a dynamical systems point of view. Am. Math. Mon. 108.8 (2001) 729–737.

[18] R. Miyazaki, Characteristic equation and asymptotic behavior of delay-differential equation. Funkcialaj Ekvacioj, **40** (1997) 471–481.

[19] 内藤 敏機, 日野 義之, 原 惟行, 宮崎 倫子『タイムラグをもつ微分方程式–関数微分方程式入門』牧野書店 (2002)

[20] Y. Nakata, An explicit periodic solution of a delay differential equation. J. Dyn. Diff. Equ. **32**(1) (2020) 163-179.

[21] Y. Nakata, Period two solution for a class of distributed delay differential equations. arXiv:2207.13615

[22] R.D. Nussbaum, Periodic solutions of some nonlinear autonomous functional differential equations. Annali di matematica pura ed applicata **101**(1) (1974) 263–306.

[23] R.D. Nussbaum, Uniqueness and nonuniqueness for periodic solutions of $x'(t) = -g(x(t-1))$. J. Differential Equations, **34** (1979) 25–54.

[24] P.H. Rabinowitz, Minimax Method in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **65**, A.M.S., Providence, 1986.

[25] R. Schaaf, Global Solution Branches of Two Point Boundary Value Problems. In Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1990.

[26] E.M. Wright, A non-linear difference-difierential equation. J. Reine Angew. Math. **194** (1955).

[27] H.-O. Walther, Topics in Delay Differential Equations. Jahresber. Dtsch. Math. Ver. **116** (2014) 87–114

[28] B. Zheng, Z. Guo, Multiplicity results on periodic solutions to higher-dimensional differential equations with multiple delays. Rocky Mt. J. Math., **44**(5) (2014) 1715–1744.