ある線形遅延微分方程式における
ネットワーク構造の固有値への影響について

静岡大学総合科学技術研究科/大阪大学基礎工学研究科　宮崎 倫子

Rinko Miyazaki

Graduate School of Integrated Sciences and Technology,

Shizuoka University

Graduate School of Engomeering Science, Osaka University

1　序論

各要素が互いに遅延を含む相互作用を有する線形システムにおいて，要素の連結の仕方（ネットワーク構造）が解の挙動に与える影響について考察する．線形方程式において解の挙動を決定づけるものは，実部が最大，あるいはそれに準ずる固有値と考えられる．本研究では，これらが大きさがネットワーク構造によってどのような影響を受けるかに着目する．

次の遅延項を持つ n 次線形微分方程式系を考える．

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + \beta B x(t-\tau) \tag{1}$$

ここで，$x = \mathrm{col}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ とし，$\dot{x}(t)$ は $x(t)$ の t に関する微分を表すものとする．方程式 (1) において，α, β は実数の定数とし，$\alpha > \beta > 0$ を仮定する．τ は遅延の大きさを表し，$\tau \geq 0$ とする．$B = (b_{ij})$ は，n 次正方行列であり，$i, j = 1, 2, \cdots, n$ に対して，

$$b_{ij} = \frac{q_{ij}}{\hat{b}_i}, \quad q_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \hat{b}_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}$$

とする．行列 B は，x の要素間の相互作用を表す行列と考えることができる．例えば，$n = 3$ の場合，次の 3 つの行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

が表す相互作用は，それぞれ，以下の 3 頂点からなる有向グラフとしてあらわすことがでる．本研究では，このような相互作用を表す有向グラフをネットワーク構造とよぶ．

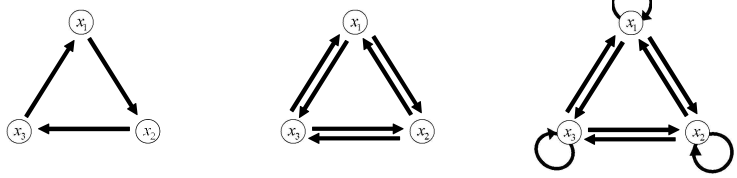

図 1.　$n = 3$ のときのネットワーク構造の例

福井ら [2] は，これら 3 つのケースについて，式 (1) の固有値および固有空間についての解析を詳細に行い，解の漸近挙動を明らかにしている．

本研究の目的は，一般の n 次方程式に対して，固有値の解析により解の漸近挙動を明らかにすることである．

2　支配的固有値

式 (1) の特性方程式は，

$$P(\lambda) = \det[(\lambda + \alpha)I - \beta e^{-\lambda\tau} B]$$

で与えられる．式 (1) の解の漸近的挙動を支配するのは，固有値，すなわち $P(\lambda) = 0$ の解のうち，実部が最大となるものである．本研究では，そのような固有値のことを，式 (1) の**支配的固有値**とよぶこととする．すなわち，λ_0 が支配的固有値であるとは，$P(\lambda) = 0$ をみたす任意の λ に対して，$\mathrm{Re}\,\lambda \leq \mathrm{Re}\,\lambda_0$ が成り立つときにいう．さらに，$\mathrm{Re}\,\lambda < \lambda_0$ が成り立つときには，**狭義の支配的固有値**という．

式 (1) の固有値の性質について考えるまえに，行列 B について考えよう．B の異なる固有値を μ_j，その代数的重複度を r_j ($j = 0, 1, \cdots m,\ r_0 + r_1 + \cdots + r_m = n$) とする．さらに，$\mu_j$ の一般固有空間を G_j とする．このとき，G_j の次元は r_j 次元であり，

$$\mathbb{C}^n = G_0 \oplus G_1 \oplus \cdots \oplus G_{m-1}$$

と直和分解できることに注意しよう．行列 B について成り立つ性質を以下の補題としてまとめておく．

補題 2.1. 行列 B について以下の性質が成り立つ．

(i) 行列 B は固有値 $\mu_0 = 1$ をもつ．
(ii) ベクトル $v_0 = \mathrm{col}(1, 1, \cdots, 1)$ は，行列 B の μ_0 に属する（右）固有ベクトルである．
(iii) 行列 B のスペクトル半径を $\rho(B)$ とすると，$\rho(B) = 1$ である．
(iv) 行列 B が既約であれば，固有値 $\mu_0 = 1$ の重複度は $r_0 = 1$ である．

補題 2.1 の証明． (i, ii) 行列 B の各行の和は 1，すなわち，

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \frac{1}{\hat{b}_1} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} = 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

に注意すると，

$$Bv_0 = v_0$$

が成り立つことから B は固有値 1 をもち，固有ベクトルとして v_0 を取ることができる．

(iii) B の任意の固有値 μ に対して，左固有ベクトル u の成分のうち，絶対値が最大となるものを

u_m とする．このとき，$u_m \neq 0$ である．$uB = \mu B$ であるから，uB の第 m 成分について，

$$\mu u_m = (uB)_m = \sum_{i=1}^{n} u_i b_{im}$$

が成り立つので，

$$|\mu||u_m| = \left|\sum_{i=1}^{n} u_i b_{im}\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |u_i| b_{im} \leq \|u_m| \sum_{i=1}^{n} b_{im} = |u_m|$$

を得る．これより，$|\mu| \leq 1 = \mu_0$ であることがわかる．

(iv) Perron の定理（cf. [1]）より明らか． □

式 (1) の特性方程式は，行列 B の固有値とその代数的重複度を用いて，

$$P(\lambda) = \{p_0(\lambda)\}^{r_0}\{p_1(\lambda)\}^{r_1}\cdots\{p_m(\lambda)\}^{r_m}$$
$$p_j(\lambda) := \lambda + \alpha - \beta e^{-\lambda\tau}\mu_j$$

と因数分解できる．行列 B の固有値について，代数的重複度と幾何学的重複度が等しい場合（すなわち，一般固有空間が固有空間で与えられる場合）について，式 (1) の固有関数を次の補題にて与える．

補題 2.2. 行列 B の固有値 μ_j $(\mu_j \neq 0)$ について，代数的重複度と幾何学的重複度が等しいとする．このとき，因数 $p_j(\lambda) = 0$ から得られる式 (1) の任意の固有値 λ の代数的重複度および λ に属する固有関数は，$v_j \in G_j$ $(v_j \neq 0)$ に対して，以下の通り与えられる：

(i) $\beta\tau e^{\alpha\tau+1}\mu_j \neq -1$ のとき，λ の代数的重複度は r_j であり，固有関数は $e^{\lambda s}v_j$ $(-\tau \leq s \leq 0)$ である．

(ii) $\beta\tau e^{\alpha\tau+1}\mu_j = -1$ かつ $\lambda \neq -\alpha - \frac{1}{\tau}$ のとき，λ の代数的重複度は r_j であり，固有関数は $e^{\lambda s}v_j$ $(-\tau \leq s \leq 0)$ である．

(iii) $\beta\tau e^{\alpha\tau+1}\mu_j = -1$ かつ $\lambda = -\alpha - \frac{1}{\tau}$ のとき，λ の代数的重複度は $2r_j$ であり，固有関数は $e^{\lambda s}v_j$ と $se^{\lambda s}v_j$ $(-\tau \leq s \leq 0)$ である．

証明. $\mu_i \neq \mu_j$ のとき，$p_i(\lambda) = 0$ と $p_j(\lambda) = 0$ は共通の解 λ をもつと仮定すると

$$\lambda + \alpha - \beta e^{-\lambda\tau}\mu_i = \lambda + \alpha - \beta e^{-\lambda\tau}\mu_j$$

より，$\mu_i = \mu_j$ となり矛盾．したがって，$i \neq j$ のとき，$p_i(\lambda) = 0$ と $p_j(\lambda) = 0$ は共通の解をもたない．ゆえに，λ の代数的重複度は $p_j(\lambda) = 0$ の根としての重複度の r_j を乗ずることで得られる．

固有値 λ の代数的重複度を調べよう．

$$p_j'(\lambda) = 1 + \beta\tau e^{-\lambda\tau}\mu_j$$

において，$\lambda + \alpha = \beta e^{-\lambda\tau}\mu_j$ とすると，

$$p_j'(\lambda) = 1 + \tau(\lambda + \alpha)$$

となるので，λ の $p_j(\lambda)=0$ の根としての重複度が 2 以上となるのは，

$$\lambda=-\alpha-\frac{1}{\tau}$$

のときで，このような λ が存在するのは，$p_j(-\alpha-\frac{1}{\tau})=0$ が成り立つとき，すなわち，

$$\beta\tau e^{\alpha\tau+1}\mu_j=1$$

が成り立つときである．したがって，補題の (iii) のケースのみである．また，このとき，

$$p_j''(\lambda)=-\beta\tau^2e^{-\lambda\tau}\mu_j\neq 0$$

より，重複度は高々 2 である．

$\varphi_j(t)=e^{\lambda t}v_j$ とおく．このとき，$\varphi_j(t)$ が式 (1) の解である．なぜなら，

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_j(t)&=\lambda e^{\lambda t}v_j\\&=(-\alpha+\beta e^{-\lambda\tau}\mu_j)e^{\lambda t}v_j\\&=-\alpha e^{\lambda t}v_j+\beta e^{-\lambda(t-\tau)}Bv_j\\&=-\alpha\varphi_j(t)+\beta B\varphi_j(t-\tau).\end{aligned}$$

次に，(iii) のケースにおいて，$\varphi_j^1(t)=te^{\lambda t}v_j$ とおき，これが (1) の解であることは以下の計算によって確かめられる．

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_j^1(t)&=e^{\lambda t}v_j+\lambda te^{\lambda t}v_j\\&=e^{\lambda t}v_j+\left(-\alpha-\frac{1}{\tau}\right)te^{\lambda t}v_j\\&=e^{\lambda t}v_j-\alpha\varphi_j^1(t)-\frac{1}{\tau}te^{\lambda t}v_j\\&=-\alpha\varphi_j^1(t)-\frac{1}{\tau}(t-\tau)e^{\lambda t}v_j\\&=-\alpha\varphi_j^1(t)-\frac{1}{\tau}(t-\tau)e^{\lambda(t-\tau)}e^{\lambda\tau}v_j\\&=-\alpha\varphi_j^1(t)-\frac{1}{\tau}(t-\tau)e^{\lambda(t-\tau)}e^{-\alpha\tau-1}v_j\\&=-\alpha\varphi_j^1(t)+\beta\tau(t-\tau)e^{\lambda(t-\tau)}\mu_jv_j\\&=-\alpha\varphi_j^1(t)+\beta\tau(t-\tau)e^{\lambda(t-\tau)}Bv_j\\&=-\alpha\varphi_j^1(t)+\beta B\varphi_j^1(t-\tau).\end{aligned}$$

□

注意 2.1. $\mu_j=0$ の場合には，$p_j(\lambda)=0$ から得られる固有値は $-\alpha$ のみであり，代数的重複度は r_j である，固有関数は，$e^{-\alpha s}v_j$ $(-\tau\leq s\leq 0)$ で与えられる．

行列 B が既約である場合には，式 (1) の支配的固有値について以下の定理が得られる．

定理 1. 行列 B が既約であるとする．このとき，因数 $p_0(\lambda)=0$ からは，実固有値 λ_0 が唯一つ得られ，以下の性質をみたす．

(i) λ_0 は式 (1) の狭義の支配的固有値であり，$-\alpha<\lambda_0<0$ をみたす．

(ii) λ_0 の重複度は 1 である．

(iii) 固有値 λ_0 に属する固有関数は，$v_0=\mathrm{col}(1,1,\cdots)$ に対して，$e^{\lambda_0 s}v_0$ $(-\tau\le s\le 0)$ で与えられる．

証明. (i) λ_0 の存在を示そう．$p_0(\lambda)=\lambda+\alpha-\beta e^{-\lambda\tau}=0$ を考える．$p_0(0)=\alpha-\beta>0$ であることと，

$$p_0(0)=\alpha-\beta>0 \quad \text{かつ} \quad p_0(-\alpha)=-\beta e^{\alpha\tau}<0$$

より，$p_0(\lambda)=0$ は，区間 $(-\alpha,0)$ の間に実数解を少なくとも一つもつ．また，

$$p_0'(\lambda)=1+\beta\tau e^{-\lambda\tau}>0$$

であることから，$p_0(\lambda)=0$ は実数解をただ一つもち，重複度は 1 である．

$p_j(\lambda)=\lambda+\alpha-\beta e^{-\lambda\tau}\mu_j=0$ の任意の解 $\lambda=u+iv$ に対して，

$$\lambda-\lambda_0=-\alpha+\beta e^{-\lambda\tau}\mu_i-\{-\alpha+\beta e^{-\lambda_0\tau}\}=\beta(e^{-\lambda\tau}\mu_i-e^{-\lambda_0\tau}) \tag{2}$$

が成り立つ．

$j=0$ のとき，$\mu_0=1$ であるから，(2) より，

$$\begin{cases} u-\lambda_0=\beta(e^{-u\tau}\cos(v\tau)-e^{-\lambda_0\tau}) \\ v=-\beta e^{-u\tau}\sin(v\tau) \end{cases}$$

が成り立つ．$\cos(v\tau)=1$ とすると，$\sin(v\tau)=0$ であるから $v=0$ となり，λ_0 が $p_0(\lambda)=0$ の唯一の実数解であることに矛盾する．ゆえに，$\cos(v\tau)<1$ である．したがって，

$$u-\lambda_0<\beta(e^{-u\tau}-e^{-\lambda_0\tau}).$$

$u\ge\lambda_0$ と仮定すると，

$$0\le u-\lambda_0<\beta(e^{-u\tau}-e^{-\lambda_0\tau})\le 0$$

となり矛盾．ゆえに $u<\lambda_0$ である．

$j\ne 0$ のとき．$\mu_j=|\mu_j|e^{i\theta_j}$ とおくと，(2) より，

$$\begin{cases} u-\lambda_0=\beta\{e^{-u\tau}|\mu_j|\cos(-v\tau+\theta_j)-e^{-\lambda_0\tau}\} \\ v=\beta e^{-u\tau}|\mu_j|\sin(-v\tau+\theta_j) \end{cases}$$

が成り立つ．$\cos(-v\tau+\theta_j)\ne 1$ のとき，補題 2.1 より，$\rho(B)=1$ であることに注意すると，

$$u-\lambda_0<\beta\{e^{-u\tau}|\mu_j|-e^{-\lambda_0\tau}\}\le\beta(e^{-u\tau}-e^{-\lambda_0\tau}).$$

$u\ge\lambda_0$ と仮定すると，

$$0\le u-\lambda_0<\beta(e^{-u\tau}-e^{-\lambda_0\tau})\le 0$$

となり矛盾．ゆえに $u < \lambda_0$ である．

$\cos(-v\tau + \theta_j) = 1$ のとき，$\sin(-v\tau + \theta_j) = 0$ となるから $v = 0$ である．ゆえに，$\cos\theta_j = 1$，すなわち μ_j は正の実数．一方で，$\mu_j \neq \mu_0 = 1$ であることと，$\rho(B) \leq 1$ より，$\mu_j = |\mu_j| < 1$ である．したがって，

$$u - \lambda_0 = \beta(e^{-u\tau}|\mu_j| - e^{-\lambda_0\tau}) < \beta(e^{-u\tau} - e^{-\lambda_0\tau})$$

が得られ，先の議論と同様に $u < \lambda_0$ が得られる．以上より，λ_0 は (1) の狭義の支配的固有値であることがわかる．

(ii) (iii) 補題 2.2 において $j = 0$，$\mu_0 = 1$ として考えると，$\beta\tau e^{\alpha\tau+1} > 0$ であるから，補題 lem:eigensol の (i) のケースとなる．一方，行列 B が既約であることと補題 2.1 の (iv) から，$r_0 = 1$ であることから主張が正しいことがわかる． $\square$

定理 1 から，式 (1) の解 $x(t)$ は，十分大きな t に対して，$x(t) \approx ce^{\lambda_0 s}v_0$ （c は実定数）で近似できることがわかる．すなわち，ネットワークの構造は式 (1) の解の漸近的挙動に影響を与えないことがわかる．

3　ネットワーク構造の影響

前節で提示した $n = 3$ の場合のネットワーク構造の 3 つの例（図 1）を一般の $n \geq 3$ に拡張した構造を考えよう．対応する行列は，以下の通り．

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

補題 3.1. 行列 B_1，B_2, B_3 の固有値は，それぞれ次式で与えられる．

$$\mu_j = \exp\left(-i\frac{2\pi j}{n}\right), \quad \mu_j = \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right), \quad \mu_j = \frac{1}{3}\left\{1 + 2\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right\} \qquad (j = 0, 1, \cdots, n-1)$$

また，対応する固有ベクトルは，すべて等しく，

$$v_j = \mathrm{col}(1, \omega_j, \omega_j^2, \cdots, \omega_j^{n-1}) \qquad (j = 0, 1, \cdots, n-1)$$

ここで，$\omega = \exp\left(i\frac{2\pi j}{n}\right)$ である．

補題 3.1 と，前節の補題 2.2 から，以下の定理 2〜4 が得られる．

定理 2. $B = B_1$ のとき．

(i) 実固有値が得られるのは，n が偶数で，かつ $\beta\tau e^{\alpha\tau+1} \leq 1$ のときの因数 $p_{\frac{n}{2}}(\lambda) = 0$ からである．実固有値を $\lambda_{\frac{n}{2}}$ とするとき，$\lambda_{\frac{n}{2}} < -\alpha$ であり，固有関数は，

$$e^{\lambda_{\frac{n}{2}} s}\,\mathrm{col}(1, -1, 1, \cdots, -1)$$

$(-\tau \le s \le 0)$ で与えられる．さらに，$p_{\frac{n}{2}}(\lambda) = 0$ から得られる実数ではない任意の固有値 λ に対して，$\mathrm{Re}\,\lambda < \lambda_{\frac{n}{2}}$ が成り立つ．

(ii) $p_j(\lambda) = 0$ の実数ではない固有値を $a + ib$ $(b \ne 0)$ とすると，$a - ib$ は，$p_{n-j}(\lambda) = 0$ である．これら互いに共役な固有値 $a \pm ib$ に属する固有関数は

$$e^{as}\,\mathrm{col}\left(\cos(bs), \cos\left(bs + \frac{2\pi}{n}j\right), \cos\left(bs + \frac{2\times 2\pi}{n}j\right), \cdots, \cos\left(bs + \frac{2(n-1)\pi}{n}j\right)\right)$$
$$e^{as}\,\mathrm{col}\left(\sin(bs), \sin\left(bs + \frac{2\pi}{n}j\right), \cos\left(bs + \frac{2\times 2\pi}{n}j\right), \cdots, \sin\left(bs + \frac{2(n-1)\pi}{n}j\right)\right)$$

$(-\tau \le s \le 0)$ で与えられる．

命題 3.1 (福井ら [2])**.** $n = 3$ とする．$B = B_2$ のとき．

(i) $\frac{\beta\tau}{2}e^{1+\alpha\tau} < 1$ のとき，$p_2(\lambda)p_3(\lambda) = 0$ からは相異なる 2 つの実固有値 λ_2, λ_2' が得られ $\lambda_2' < \lambda_2 (< \lambda_0)$．それ以外の複素固有値を λ とすると $Re\ \lambda < \lambda_2'$ が成り立つ．λ_2', λ_2 も含めて固有関数は $e^{\lambda s}v, (-\tau \le s \le 0)$ で与えられる．ここで v は v_1 に垂直な任意のベクトルである．

(ii) $\frac{\beta\tau}{2}e^{1+\alpha\tau} > 1$ のとき $p_2(\lambda)p_3(\lambda) = 0$ からは実固有値は得られない．固有関数については定理 **??**(ii) と同様である．

定理 3. $n > 4$ とする．$B = B_2$ のとき．

(i) 全ての因数 $p_j(\lambda) = 0$ から実固有値が得られる．n が偶数のときの $p_{\frac{n}{2}}(\lambda) = 0$ を除く因数から得られる実固有値を λ_* とするとき，重複度は 2 であり，固有関数は，

$$e^{\lambda_* s}\,\mathrm{col}\left(1, \cos\left(\frac{2\pi}{n}j\right), \cos\left(\frac{2\times 2\pi}{n}j\right), \cdots, \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}j\right)\right)$$
$$e^{\lambda_* s}\,\mathrm{col}\left(0, \sin\left(\frac{2\pi}{n}j\right), \cos\left(\frac{2\times 2\pi}{n}j\right), \cdots, \sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}j\right)\right)$$

$(-\tau \le s \le 0)$ で与えられる．さらに，$p_{\frac{n}{2}}(\lambda) = 0$ から得られる実数ではない任意の固有値 λ に対して，$\mathrm{Re}\,\lambda < \lambda_*$ が成り立つ．

(ii) n が偶数で，かつ $\beta\tau e^{\alpha\tau+1} \le 1$ のとき因数 $p_{\frac{n}{2}}(\lambda) = 0$ から得られる実固有値を $\lambda_{\frac{n}{2}}$ とするとき，定理 **??** (i) と同じ主張が成り立つ．

(iii) $p_j(\lambda) = 0$ の実数ではない固有値を $a + ib$ $(b \ne 0)$ とすると，$a - ib$ は，$p_{n-j}(\lambda) = 0$ である．これら互いに共役な固有値 $a \pm ib$ に属する固有関数は定理 **??**(ii) と同じ主張が成り立つ．

命題 3.2 (福井ら [2])**.** $p_2(\lambda)p_3(\lambda) = 0$ から得られる固有値は $\lambda = -\frac{1}{\epsilon}$ のみであり，固有関数は $e^{\lambda s}v_, -\tau \le s \le 0$ で与えられる．ここで v は v_1 に垂直な任意のベクトルである．

定理 4. $n \ge 4$ とする．$B = B_3$ に対しても定理 **??** と同じ主張が成り立つ．

ネットワーク構造は解の過渡的なふるまいに影響を与えると考えられるが，その影響を明らかにするためには，λ_0 以外の固有値について，実部の大きさを比較することが必要であると考えている．

なお，$\alpha = \beta$ の場合には，(1) は漸近定数問題となり，Ashizawa et al. [3,4] で，解の収束先を初期値で表現するとともに，解の収束速度をネットワーク構造の違いによって分類している．

参考文献

[1] F. R. Gantmacher, The Theory of Matrices, vol. 2, Amer. Math. Soc., 1959.

[2] 福井利彦，芦澤恵太，宮崎倫子，3ニューロンモデルにおける過渡現象への構造の影響, RIMS 講究録, 1432 (2005), 105–110.

[3] K. Ashizawa and R. Miyazaki, A Class of Adjacency Matrices in a 3-node Network, RIMS 講究録, 1474 (2006), 144–153.

[4] K. Ashizawa and R. Miyazaki, Asymptotic constancy for a linear differential system with multiple delays, Appl. Math. Lett., 19 (2006), 1390–1394.

Department of Mathematical ans Systems Engineering
Shizuoka University
Shizuoka 432-8561
JAPAN
E-mail address: miyazaki.rinko@shizuoka.ac.jp