連続関数環の LÖWENHEIM-SKOLEM-TARSKI の性質

早稲田大学基幹理工学部数学科 薄葉季路
Toshimichi Usuba
School of Fundamental Science and Engineering,
Waseda University

1. 導入

一般的な位相空間は複雑な構造を持ち非常に解析が難しいが, その理由について数理論理学的には, 位相というものが台集合の部分集合の集まりであり, したがって位相空間が**二階の構造**になっていることに由来する. 一階構造ならば数理論理学のコンパクト性や Löwenheim-Skolem-Tarski の定理等が使えるが, 二階の構造ではそのような手法が使えない. それゆえに二個の位相空間の積を取って積空間を作ると元の空間よりもはるかに複雑になりえるし, よい部分空間を取る操作も簡単にはいかない.

そのような複雑な対象を調べるために, 各位相空間に対応する**一階の代数構造**を元の空間の代替物として調べる研究がなされている. 例として Henson-Jocksch-Rubel-Takeuti [7] の研究を紹介する. 位相空間 X に対応する代数構造として, 彼らは X の閉集合全体からなる束構造 $L(X)$ と, X から実数体 $\mathbb{R}$ への連続関数全体からなる構造 $C(X)$ をモデル論的観点から調べている. $L(X)$ は, 補集合を考えることで開集合からなる束を考えることと同じであるが, 開集合全体は Hyting 代数をなすことから $L(X)$ の研究は実質的に Hyting 代数の研究とみなせる. 一方, $C(X)$ は自然な和 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, 積 $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$, スカラー倍 $(rf)(x)=rf(x)$ を入れることで環構造, あるいはベクトル空間となり, この観点での $C(X)$ の研究は代数, 位相空間論などにおいて幅広く行われている. $C(X)$ の代数的, 位相空間的な研究については, Gilman-Jerison [6], Weir [17] が基本文献である. また, Vechtomov [16] のサーベイは $C(X)$ についての様々な結果を大量に載せており参考になる.

本論文では, $C(X)$ を和 $+$, 積 $\cdot$, および和に関する単位元 0, 積に関する単位元 1 を持つ, 言語 $\{+,\cdot,0,1\}$ の一階環構造とみなすことにする. 例によって $f\cdot g$ を単に fg と表し, ff を f^2 で表す. また, 差 $-$ はこの構造で定義可能な演算であることから自由に使っていくことにする.

注意 1.1. 今後, 位相空間は **Tychonoff 空間**であることを仮定する, すなわち位相空間 X は以下の Tychonoff 分離公理を常に満たすとする:

(1) 各 $x\in X$ に対して一点集合 $\{x\}$ は X の閉集合である.

(2) 各閉集合 $C \subseteq X$ と $x \in X \setminus C$ に対して, 連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ で $f(x) = 0$, $f``C = \{1\}$ を満たすものが存在する.

Tychonoff でない場合は $C(X)$ があまり良い振る舞いをしないことから, $C(X)$ の研究においては通常 X が Tychonoff 空間であることが仮定される.

$C(X)$ が元の空間の性質をどの程度反映しているかについて, いくつか紹介しておく. まず, X の位相空間としてのいくつかの性質が $C(X)$ の一階の言明として表す事が可能である.

Fact 1.2. (1) X が連結空間
$\iff C(X) \models \forall f(f(1-f) = 0 \to f = 0 \vee f = 1))$.
(2) (例えば [6]) X が P-space, すなわち任意の G_δ-集合が開集合になる
$\iff C(X) \models \forall f \exists g(fgf = f)$.

X がコンパクトならば $C(X)$ の構造から X が復元される事が知られている:

定理 1.3 (Gelfand-Kolmogorov, 証明は [6] を参照のこと)**.** X, Y をコンパクト空間とする. もし $C(X)$ と $C(Y)$ が環として同型ならば, X と Y は同相である.

自然数全体 ω は可算無限離散空間とみなし, また $\beta\omega$ を ω の Stone-Čech コンパクト化, $\alpha\omega$ を一点コンパクト化とする. コンパクト空間のクラス内において, $\beta\omega$ や $\alpha\omega$ は次の意味で $C(X)$ の一階の性質として完全に記述可能である.

Fact 1.4 ([7])**.** 次を満たす環の文 σ_0, σ_1 が存在する: 任意のコンパクト空間 X に対して,
(1) $C(X) \models \sigma_0 \iff X$ は $\beta\omega$ と同相.
(2) $C(X) \models \sigma_1 \iff X$ は $\alpha\omega$ と同相.

$C(X)$ の一階の構造が X の構造をそれなりに反映していることから, $C(X)$ と $C(Y)$ が初等的同値であれば X と Y は似た性質を持つ空間とみなすことができる. さらに環の間の初等的埋め込み $j : C(Y) \to C(X)$ が存在するならば Y は X の性質を非常によく反映した空間とみなす事ができる. このように考えると**連続関数環に関しての Löwenheim-Skolem-Tarski の性質**, すなわち, 与えられた空間 X に対して, X に比べて小さな空間 Y で初等的埋め込み $j : C(Y) \to C(X)$ を持つものが存在するとき, これは**位相空間に関しての Löwenheim-Skolem-Tarski の性質**とみなすことができる. このアイディアのもと, "どのくらい小さい空間がとれるか" の指標となる次のような基数を考えてみる. ここで位相空間の濃度は, その台集合の濃度を指す.

定義 1.5. Γ を位相空間のクラスとする (例えばコンパクト空間全体のクラス). クラス Γ の **Löwenheim-Skolem-Tarski number** $\mathrm{LST}(\Gamma)$ を次を満

たす最小の基数とする: 任意の $X \in \Gamma$ に対して, $Y \in \Gamma$ で $|Y| < \kappa$ かつ初等的埋め込み $j : C(Y) \to C(X)$ を持つものが存在する.

注意しておくと Löwenheim-Skolem-Tarski number が定義される, すなわち上のような基数 κ が存在するかどうかは定義から保証されるわけではない. 実際, 一階構造についてのこのような Löwenheim-Skolem-Tarski の性質は巨大基数的性質となることが知られている.

Fact 1.6 (Magidor [9], Bagaria [2])**.** 基数 κ に対して次は同値である:

(1) κ は最小の超コンパクト基数.
(2) κ は次を満たす最小の基数: 集合論の言語で Σ_2-定義可能な一階構造のクラス Γ と $\mathcal{M} \in \Gamma$ に対して, $\mathcal{N} \in \Gamma$ で $|\mathcal{N}| < \kappa$ かつ初等的埋め込み $j : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ を持つものが存在する.

自然な位相空間のクラスは基本的に Σ_2-定義可能である: 例えば, X がコンパクトであることは $\alpha > \mathrm{rank}(X)$ で $V_\alpha \models$“X はコンパクト” となる順序数 α が存在する事と同値である. このような α の存在は Σ_2 で書ける. 同様な理由により, 自然な位相空間のクラス Γ に対してクラス $\{C(X) \mid X \in \Gamma\}$ も Σ_2-定義可能なクラスとなる. これにより, 少なくとも巨大基数の下では $\mathrm{LST}(\Gamma)$ の存在が保証されることになる.

命題 1.7. Γ を自然な位相空間のクラス[1]とする. もし超コンパクト基数が存在するならば $\mathrm{LST}(\Gamma)$ も存在し, さらに次の不等式が成り立つ:

$$\mathrm{LST}(\Gamma) \leq \text{最小の超コンパクト基数}.$$

本論文では, 様々な位相空間のクラスについてその Löwenheim-Skolem-Tarski number がどのような値になるか, またはどのような上限, 下限を持つかについて, 現時点で判明していることを紹介する. さらにこの Löwenheim-Skolem-Tarski number と巨大基数との関係についてもいくつの結果を紹介する. これらの結果は Usuba [15] でより詳しく扱われる予定である.

記法や定義についての注意をいくつかしておく. まず, 位相空間における基本事項は Engelking [5] を参照のこと. 単に空間といった場合はそれは (Tychonoff) 位相空間を指すことにし, Γ は位相空間のクラスを表すことにする. 単に論理式や文といった場合は, それは環の言語 $\{+, \cdot, 0, 1\}$ による論理式や文とする. $C(X)$ の常に値 0 をとる定数関数と値 1 をとる定数関数もそれぞれ 0, 1 で表すことにする.

空間 X と $f \in C(X)$ に対して, $Z(f)$, $CZ(f)$ をそれぞれ集合 $\{x \in X \mid f(x) = 0\}$, $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ とする. $Z(f)$ は閉集合, $CZ(f)$ は開集合である. $Z(f)$ の形の閉集合を**ゼロ集合**, $CZ(f)$ の形の開集合を**コゼロ集合**と呼ぶ. Tychonoff 分離公理を満たすことからコゼロ集合全体は X の開基となる. 可算個のゼロ集合の共通部分はゼロ集合になる.

[1] ここで**自然なクラス**とは, 集合論の Σ_2-論理式で定義可能なクラスとする.

2. 自然な下限

まず, 基数 $(2^\omega)^+$ が $\mathrm{LST}(\Gamma)$ の自然な下限になることを紹介する:

命題 2.1 (Stonestrom [13])**.** Γ が $\mathbb{R}$ または単位閉区間 $[0,1]$ を含むならば $\mathrm{LST}(\Gamma) \geq (2^\omega)^+$.

証明. Fact 1.2 より, 文 σ で

$$X \text{ が連結} \iff C(X) \models \sigma$$

となるものが取れる. また θ を文 $\exists f(f \neq 0 \wedge \neg\exists g(fg = 1))$ とする.

$$C(X) \models \theta \iff X \text{ は少なくとも 2 点を持つ}$$

となる事が容易にわかる. 明らかに X が $\mathbb{R}$ または $[0,1]$ の時は $C(X) \models \sigma \wedge \theta$ である. 一方, $C(Y) \models \sigma \wedge \theta$ とすると Y は連結で少なくとも異なる 2 点 $a, b \in Y$ を持つ. Tychonoff 分離公理より $f \in C(Y)$ で $f(a) = 0$, $f(b) = 1$ となるものが取れる. Y が連結なので $f``Y$ は $\mathbb{R}$ の少なくとも 2 点を持つ連結集合であるが, この時 $f``Y$ は自明でない区間を含むので $|f``Y| \geq 2^\omega$, よって $|Y| \geq 2^\omega$ である. □

3. c.c.c. 空間

復習すると, 基数 κ に対して空間 X が κ-**c.c.** を満たすとは, X の互いに素な開集合の族の濃度が常に κ 未満になることである. $\kappa = \omega_1$ の時は **c.c.c.** と呼ぶ. 可分な空間は c.c.c. を満たす. また, 可分空間の濃度は 2^{2^ω} 以下であるが, c.c.c. 空間の濃度の上限は存在しない.

κ-c.c. 空間全体の Löwenheim-Skolem-Tarski number は次のような上限を持つ事が判明している.

定理 3.1. κ を基数とする. Γ が κ-c.c. 空間全体のクラスならば

$$\mathrm{LST}(\Gamma) \leq (\kappa^{<\kappa})^+.$$

この定理を使うと c.c.c. 空間全体のクラスの Löwenheim-Skolem-Tarski number は次のように決定できる.

定理 3.2. $\mathsf{C.C.C.}$ を c.c.c. 空間全体のクラスとすると

$$\mathrm{LST}(\mathsf{C.C.C}) = (2^\omega)^+.$$

証明. 定理 3.1 より $\mathrm{LST}(\mathsf{C.C.C}) \leq (\omega_1^{<\omega_1})^+ = (2^\omega)^+$ である. $\mathbb{R}$ は c.c.c. 空間なので命題 2.1 より $\mathrm{LST}(\mathsf{C.C.C}) \geq (2^\omega)^+$ となる. □

定理 3.1 は次の定理より直ちに従う:

定理 3.3. κ を基数, X を κ-c.c. 空間とする. この時 κ-c.c. 空間 Y で $|Y| \leq \kappa^{<\kappa}$ かつ初等的埋め込み $j : C(Y) \to C(X)$ を持つものが存在する.

定理 3.3 の証明のために Junqueira-Tall [8] で導入された, 初等的部分構造を用いた空間の構成法を使う. 非可算正則基数 θ に対して, H_θ を推移閉包の濃度が θ 未満の集合全体とする. H_θ は ZFC からべき集合公理を除いた理論の推移的モデルになる.

定義 3.4 ([8])**.** X を位相空間, θ を十分大きい正則基数, $M \prec H_\theta$ を $X \in M$ となる H_θ の初等的部分構造とする. この時空間 X_M を次のように定める:

(1) X_M の台集合は $X \cap M$.
(2) X_M の位相は族 $\{O \cap M \mid O \in M$ は X の開集合 $\}$ から生成された位相.

この X_M は次を満たす事が容易にわかる:

補題 3.5. (1) X_M は Tychonoff 空間である.
(2) $|X_M| \leq |M|$.
(3) $f \in C(X) \cap M$ に対して $f \restriction (X \cap M)$ は X_M から $\mathbb{R}$ への連続関数である.

定理 3.3 の証明. X を κ-c.c. 空間とする. 十分大きい正則基数 θ をとり, $M \prec H_\theta$ を $X \in M$, $|M| = \kappa^{<\kappa}$, $[M]^{<\kappa} \subseteq M$ となるようにとる. 空間 $Y = X_M$ が求めるものであることを見ていく.

まず M の初等性より, $O, V \in M$ が X の開集合ならば $O \cap V = \emptyset \iff (O \cap M) \cap (V \cap M) = \emptyset$ となることがわかる. これにより Y は κ-c.c. を満たす.

$C(X) \cap M$ は M の初等性より $C(X)$ の初等的部分構造である. さらに $|Y| \leq |M| \leq \kappa^{<\kappa}$ である. 従って, 定理を示すためには $C(Y)$ が $C(X) \cap M$ と環として同型であればよいことになる. そのために次の Claim を示す:

Claim 3.6. 勝手な $g \in C(Y)$ に対して, $f \in C(X) \cap M$ で $f \restriction (X \cap M) = g$ となるものが存在する.

証明. $g \in C(Y)$ を固定する. 有理数の組 $p < q$ に対して, $g^{-1}``(p, q)$ は Y の開集合である. $\mathcal{T}$ を X の開集合全体とすると, Y の位相の定義より $\mathcal{O}_{p,q} \subseteq M \cap \mathcal{T}$ で次を満たす極大なものが取れる:

(1) $\mathcal{O}_{p,q}$ は互いに素な開集合の集まり.
(2) $\bigcup \{O \cap M \mid O \in \mathcal{O}_{p,q}\} \subseteq g^{-1}``(p, q)$.

X が κ-c.c. を満たすことから $|\mathcal{O}_{p,q}| < \kappa$ であり, $[M]^{<\kappa} \subseteq M$ であることから $\mathcal{O}_{p,q} \in M$ となる. 従って $\{\mathcal{O}_{p,q} \mid p, q \in \mathbb{Q}, p < q\} \subseteq M$ であり, 再び M の closure property より $\{\mathcal{O}_{p,q} \mid p, q \in \mathbb{Q}, p < q\} \in M$ となる.

ここで, 勝手な $x \in X \cap M$ と $r \in \mathbb{R}$ に対して次が同値になる事を示す:

- $g(x) = r$
- 有理数 p, q で $p < r < q$ なるものに対して $x \in \overline{\bigcup \mathcal{O}_{p,q}}$ となる.

ここで $\overline{\bigcup \mathcal{O}_{p,q}}$ は $\bigcup \mathcal{O}_{p,q}$ の X の意味での閉包である．

最初に $g(x) = r$ を仮定する．有理数 $p < r < q$ をとる．もし $x \notin \overline{\bigcup \mathcal{O}_{p,q}}$ ならば，$x, \mathcal{O}_{p,q} \in M$ であることから開集合 $V \in \mathcal{T} \cap M$ で $x \in V$ かつ $V \cap \bigcup \mathcal{O}_{p,q} = \emptyset$ となるものがとれる．$x \in g^{-1}``(p,q)$ であることから $V \cap M \subseteq g^{-1}``(p,q)$ としてよい．この時 $\mathcal{O}_{p,q} \cup \{V\}$ は互いに素な開集合の族で $\bigcup\{O \cap M \mid O \in \mathcal{O}_{p,q}\} \cup (V \cap M) \subseteq g^{-1}``(p,q)$ となり，$\mathcal{O}_{p,q}$ の極大性に反する．よって $x \in \overline{\bigcup \mathcal{O}_{p,q}}$ となる．

逆に $g(x) \neq r$ とする．$g(x) < r$ と仮定するが，$g(x) > r$ についても同様に証明できる．有理数 p, q で $g(x) < p < r < q$ となるものを取る．$g^{-1}``[p,q]$ が $X_M$ の閉集合で $x \notin g^{-1}``[p,q]$ なので，$V \in M \cap \mathcal{T}$ で $x \in V$ かつ $(V \cap M) \cap g^{-1}``[p,q] = \emptyset$ となるものが取れる．ここで $\bigcup\{O \cap M \mid O \in \mathcal{O}_{p,q}\} \subseteq g^{-1}``(p,q) \subseteq g^{-1}``[p,q]$ なので，$V \cap \bigcup \mathcal{O}_{p,q} = \emptyset$ となり，よって $x \notin \overline{\bigcup \mathcal{O}_{p,q}}$ である．

以上により，各 $x \in X \cap M$ に対して，$r_x \in \mathbb{R}$ で次を満たすものがただ一つ定まる：任意の有理数 p, q で $p < r_x < q$ となるものに対して $x \in \overline{\bigcup \mathcal{O}_{p,q}}$．$\{\mathcal{O}_{p,q} \mid p, q \in \mathbb{Q}, p < q\} \in M$ なので，M の初等性より全ての $x \in X$ に対して上を満たす $r_x \in \mathbb{R}$ が存在することがわかる．よって，$f(x) = r_x$ で定まる X 上の関数は M の中で定義可能，特に $f \in M$ である．明らかに $f \upharpoonright (X \cap M) = g$ であり，さらに g が連続であることと M の初等性より f は X 上の連続関数となる事が容易にわかる． □

先の Claim より $j : C(Y) \to C(X) \cap M$ で $j(g) \upharpoonright (X \cap M) = g$ と j を定めることができる．この j は全単射であり，また M の初等性より演算を保つことも容易にわかる．従ってこの j が $C(Y)$ から $C(X) \cap M$ への同型写像となる． □

4. コンパクト空間と Lindelöf 空間

空間 X がコンパクトであるとは，任意の解被覆が有限部分被覆を持つことであった．コンパクトを弱めた性質として **Lindelöf の性質**と呼ばれるものがある：

定義 4.1. 空間 X が **Lindelöf** とは，任意の解被覆が高々可算な部分被覆を持つことである．

Lindelöf 空間もコンパクト空間と同様に非常に良い空間である一方，"有限" を "可算無限" に弱めたことにより集合論的位相空間の観点から多くの未解決問題が多く残されている．これについては Tall [14] を参照のこと．

コンパクト空間全体のクラスを Comp, Lindelöf 空間全体のクラスを Lind で表すことにする．Comp, Lind の Löwenheim-Skolem-Tarski number は次のような上限を持つ：

定理 4.2. $\mathrm{LST}(\mathsf{Comp}) \leq (2^{2^\omega})^+$，かつ $\mathrm{LST}(\mathsf{Lind}) \leq (2^{2^\omega})^+$.

実際のところ $(2^{2^\omega})^+$ がこの二つの number とちょうど一致することを後で見る.

定理 4.2 をより一般的に述べるために次を定義する.

定義 4.3. κ, λ を基数とする. X が $[\kappa, \lambda]$**-コンパクト**とは, X の開被覆で濃度 λ 以下のものは濃度 $< \kappa$ の部分被覆を持つことである.

従って X がコンパクトであることは $[\omega, |X|]$-コンパクトと同値であり, X が Lindelöf であることは $[\omega_1, |X|]$-コンパクトと同値になる. また X が可算コンパクトであることは $[\omega, \omega]$-コンパクトであることである.

$[\kappa, \lambda]$-コンパクト空間の閉部分空間と連続像もまた $[\kappa, \lambda]$-コンパクトになることは容易にわかる.

定理 4.4. κ を基数, X を $[\kappa, \kappa^{<\kappa}]$-コンパクト空間とする. この時空間 Y で $|Y| \leq 2^{\kappa^{<\kappa}}$ で, Y が X の連続像であり, かつ初等的埋め込み $j : C(Y) \to C(X)$ を持つものが存在する.

定理 4.2 はこの定理より直ちに従う.

定理 4.4 の証明のために, Junqueira-Tall [8] と Bandlow [3] で導入された, 初等的部分構造による商空間もどきの構成法を使う.

定義 4.5 ([8], [3])**.** X を空間, θ を十分大きい正則基数, $M \prec H_\theta$ を $X \in M$ なる初等的部分構造とする. X 上の同値関係 $\simeq$ を

$$x \simeq y \iff f(x) = f(y) \text{ for all } f \in C(X) \cap M$$

と定める. $[x]$ を x のこの同値関係に関しての同値類とし, X/M を同値類全体, $\pi : X \to X/M$ を $\pi(x) = [x]$ で定まる自然な射影とする.

次が成り立つことは容易にわかる:

(1) $|X/M| \leq 2^{|M|}$.
(2) $x \in X$ とコゼロ集合 $O \in M$ に対して, $x \in O \iff \pi(x) \in \pi``O$.
(3) 任意のコゼロ集合 $O \in M$ に対して $\pi^{-1}``(\pi``O) = O$.
(4) コゼロ集合 $O, V \in M$ に対して $O \cap V = \emptyset \iff \pi``O \cap \pi``V = \emptyset$.

以上を踏まえて空間 X/M に次のように位相を入れる.

定義 4.6 ([8], [3])**.** 空間 X/M を, X/M に $\{\pi``O \mid O \in \mathcal{M}$ は X のコゼロ集合$\}$ から生成される位相を入れた空間とする.

次は定義より簡単にわかる:

補題 4.7. (1) X/M は Tychonoff 空間である.
(2) $\pi : X \to X/M$ は連続全射, したがって X/M は X の連続像である.

次は明らかではないが, やはり定義より確かめることができる:

補題 4.8. $f \in C(X) \cap M$ に対して $g : X/M \to \mathbb{R}$ を $g(\pi(X)) = f(x)$ で定めると, g は連続関数である.

空間 X/M を用いて定理 4.4 の証明を行う．

定理 4.4 の証明. X を $[\kappa, \kappa^{<\kappa}]$-コンパクト空間とする．十分大きい正則基数 θ をとり，$M \prec H_\theta$ で $X \in M$, $|M| \leq \kappa^{<\kappa}$, $[M]^{<\kappa} \subseteq M$ となるものをとる．Y を X/M とすると，$|Y| \leq 2^{|M|} \leq 2^{\kappa^{<\kappa}}$ である．また Y は X の連続像であることから Y もまた $[\kappa, \kappa^{<\kappa}]$-コンパクトとなる．

Claim 4.9. 任意の $g \in C(Y)$ に対して，$f \in C(X) \cap M$ で $f = g \circ \pi$ となるものが存在する．

証明. $\langle p_n, q_n \mid n < \omega \rangle \in M$ を有理数の組 (p, q) で $p < q$ となるもの全体の enumeration として固定する．

$g \in C(Y)$ をとる．各 $n < \omega$ に対して $\mathcal{O}_n$ を次のように定める: $g^{-1}``[p_n, q_n]$ は $Y$ の閉集合であり，$Y$ は $[\kappa, \kappa^{<\kappa}]$-コンパクトなので $g^{-1}``[p_n, q_n]$ も $[\kappa, \kappa^{<\kappa}]$-コンパクトである．また $\{\pi``O \mid O \in M$ はコゼロ集合, $\pi``O \subseteq g^{-1}``(p_n - 2^{-n}, q_n + 2^{-n})\}$ は $g^{-1}``[p_n, q_n]$ の開被覆でその濃度は高々 $\kappa^{<\kappa}$．よってコゼロ集合の族 $\mathcal{O}_n \subseteq M$ で濃度が $< \kappa$, かつ

$$g^{-1}``[p_n, q_n] \subseteq \bigcup \{\pi``O \mid O \in \mathcal{O}_n\} \subseteq g^{-1}``(p_n - 2^{-n}, q_n + 2^{-n})$$

となるものが取れる．M の closure property より $\mathcal{O}_n \in M$, よって $\{\mathcal{O}_n \mid n < \omega\} \in M$ となる．

ここで次を示す: 任意の $x \in X$ と $r \in \mathbb{R}$ に対して次は同値:

- $g(\pi(x)) = r$.
- $n < \omega$ で $p_n < r < q_n$ となるものに対して $x \in \bigcup \mathcal{O}_n$.

最初に $g(\pi(x)) = r$ と仮定する．$n < \omega$ で $p_n < r < q_n$ となるものをとる．この時 $\pi(x) \in g^{-1}``[p_n, q_n] \subseteq \bigcup \{\pi``O \mid O \in \mathcal{O}_n\}$ なので，$O \in \mathcal{O}_n$ で $x \in O$ となるものがある．

次に $g(\pi(x)) < r$ とする．十分大きな n で $g(\pi(x)) < p_n - 2^{-n} < p_n < r < q_n$ となるものをとる．$\pi(x) \notin g^{-1}``(p_n - 2^{-n}, q_n + 2^{-n})$ であり $\bigcup \{\pi``O \mid O \in \mathcal{O}_n\} \subseteq g^{-1}``(p_n - 2^{-n}, q_n + 2^{-n})$ なので全ての $O \in \mathcal{O}_n$ に対して $x \notin O$ である．

以上により，すべての $x \in X$ に対して実数 $r_x \in \mathbb{R}$ で，すべての $n < \omega$ で $p_n < r_x < q_n$ となるものについて $x \in \bigcup \mathcal{O}_n$ となるものがただ一つとれる．$\{\mathcal{O}_n \mid n < \omega\} \in M$ なので，対応 $f(x) = r_x$ は M で定義可能な関数である．明らかに $f = g \circ \pi$ であり，g, π が連続なので f も連続，よって $f \in C(X) \cap M$ である． □

最後に，$j : C(Y) \to C(X) \cap M$ を $j(g) = g \circ \pi$ で定めると，上の事より j は全単射になる．また，この j が演算を保つことも容易にチェックできるので j は $C(Y)$ から $C(X) \cap M$ への同型写像である．$C(X) \cap M$ は $C(X)$ の初等的部分構造なので，この j が求める初等的埋め込みになる． □

Fact 1.4 と定理 4.4 を合わせることで, Comp の Löwenheim-Skolem-Tarski number がちょうど $(2^{2^\omega})^+$ となることがわかるが, このこと自体は [7] で既に指摘されている.

定理 4.10 ([7])**.** $\mathrm{LST}(\mathsf{Comp}) = (2^{2^\omega})^+$.

5. 線形順序空間

線形順序集合 $X = (X, \leq)$ について, その順序による開区間 (a, b), $(-\infty, b)$, (a, ∞) から生成される位相を考えることができる. X をこの位相を持つ位相空間してとらえたとき, 空間 X を **LOTS** (linearly ordered topological space) と呼ぶ. LOTS は正規空間であり, 特に Tychonoff 空間になることが知られている. LOTS X が**デデキンド完備**とは, 任意の空でない部分集合 $A \subseteq X$ に対して, A が上界を持てば最小上界を持つことである. よく知られているように LOTS X がコンパクトであることは X がデデキンド完備, かつ最大元と最小元を持つことである.

デデキンド完備な LOTS に対しても, 定理 3.3, 4.4 に対応する次のような定理が成り立つ.

定理 5.1. X をデデキンド完備な LOTS とする. この時デデキンド完備 LOTS Y で $|Y| \leq 2^{2^\omega}$ かつ初等的埋め込み $j : C(Y) \to C(X)$ を持つものが存在する.

証明は定理 4.4 と同じように行われるが, X/M の位相を生成する完備な線形順序を作る必要があることから非常に面倒なものになる. 詳細は省略する.

定理 5.2. デデキンド完備な LOTS 全体のクラスを $\mathsf{Ded.LOTS}$ とすると,

$$\mathrm{LST}(\mathsf{Ded.LOTS}) \leq (2^{2^\omega})^+.$$

連結な LOTS はデデキンド完備であり, さらに連結性は $C(X)$ の文として表せることから次も言える.

定理 5.3. 連結な LOTS 全体のクラスを $\mathsf{Conn.LOTS}$ とすると,

$$\mathrm{LST}(\mathsf{Conn.LOTS}) \leq (2^{2^\omega})^+.$$

上限については $(2^{2^\omega})^+$ が得られたが, 下限については現在よくわかっていない.

Question 5.4. $\mathrm{LST}(\mathsf{Ded.LOTS}) = (2^{2^\omega})^+$ か? また, $\mathrm{LST}(\mathsf{Conn.LOTS}) = (2^{2^\omega})^+$ か?

また, 次も不明である.

Question 5.5. LOTS を LOTS 全体のクラスとする. $\mathrm{LST}(\mathsf{LOTS})$ の値はどれくらいか?

6. 擬コンパクト空間

定義 6.1. 空間 X が**擬コンパクト** (pseudocompact) とは, 任意の $f \in C(X)$ が有界関数になることである.

可算コンパクト空間は擬コンパクトであるが, 逆は成立しない.

$C^*(X)$ を X 上の有界連続関数全体からなる $C(X)$ の部分環とする. 明らかに X が擬コンパクトならば $C^*(X)$ は $C(X)$ と一致する.

空間 X に対して βX を Stone-Čech コンパクト化とする. この時 X 上の有界連続関数は βX 上に連続的に拡張可能であることから $C^*(X)$ は $C^*(\beta X)$ と同型であり, βX はコンパクトなので $C^*(\beta X) = C(\beta X)$ である. よって X が擬コンパクトならば $C(X)$ は $C(\beta X)$ と同型になる. これにより:

定理 6.2. $\mathsf{PseudoComp}$ を擬コンパクト空間全体のクラスとすると,

$$\mathrm{LST}(\mathsf{PseudoComp}) \leq (2^{2^\omega})^+.$$

証明. 擬コンパクト空間 X の Stone-Čech コンパクト化 βX を考える. 定理 4.4 より, $|Y| \leq 2^{2^\omega}$ で Y は βX の連続像, かつ初等的埋め込み $j : C(Y) \to C(\beta X)$ を持つものが取れる. Y が βX の連続像なのでコンパクト, したがって擬コンパクトであり, また $C(X)$ と $C(\beta X)$ は同型となる. $\square$

同様な議論で次も成り立つ:

定理 6.3. $\mathsf{CtbleComp}$ を可算コンパクト空間全体のクラスとすると,

$$\mathrm{LST}(\mathsf{CtbleComp}) \leq (2^{2^\omega})^+.$$

一方で $\mathrm{LST}(\mathsf{PseudoComp})$, $\mathrm{LST}(\mathsf{CtbleComp})$ が $(2^{2^\omega})^+$ と一致するかは不明である.

Question 6.4. $\mathrm{LST}(\mathsf{PseudoComp}) = (2^{2^\omega})^+$ か? $\mathrm{LST}(\mathsf{CtbleComp}) = (2^{2^\omega})^+$ か?

7. リアルコンパクト空間と一般的な空間

c.c.c. 空間, コンパクト空間, LOTS, 擬コンパクト空間のように, よい性質を持つ空間のクラスについてはLöwenheim-Skolem-Tarski number の存在が示され, それほど大きくない上限を持つ事を見てきた. それではその他のクラス, 例えば (Tychonoff) 空間全体のクラスの Löwenheim-Skolem-Tarski number についてはどうなるのかを見ていく.

この目的のために**リアルコンパクト空間**の概念を使う. リアルコンパクト空間は $C(X)$ の研究において非常に重要な役割を果たす.

定義 7.1. X が**リアルコンパクト** (realcompact) とは, ある基数 λ が存在して, X が $\mathbb{R}$ の Tychonoff 積 $\mathbb{R}^\lambda$ のある閉部分集合と同相になることである.

リアルコンパクト性は様々な同値な性質を持つ. 詳細は [6], [17] を参照のこと.

Fact 7.2. 空間 X に対して, 次は同値:

(1) X はリアルコンパクト.
(2) 次をみたす空間 $\tilde{X}$ は X のみである: $\tilde{X}$ は X を稠密部分空間として持ち, かつ全ての $f \in C(X)$ は $\tilde{X}$ 上に連続的に拡張可能である, すなわち $\tilde{f} \in C(\tilde{X})$ で $\tilde{f} \restriction X = f$ となるものが (一意に) 存在する.
(3) 任意の全射環準同型 $h : C(X) \to \mathbb{R}$ に対して, $x \in X$ で $\ker(h) = \{f \in C(X) \mid f(x) = 0\}$ となるものが一意に存在する.
(4) 任意の σ-完備 $\mathcal{Z}$-ウルトラフィルター $\mathcal{U}$ に対して, その共通部分 $\bigcap\mathcal{U}$ が空でない. ここで $\mathcal{Z}$-ウルトラフィルターとは, ゼロ集合全体上の極大フィルターの事である.

(4) より, Lindelöf 空間はリアルコンパクトになる (補題 9.8 を参照のこと).
離散空間がリアルコンパクトであるかどうかについては, 次のような形で可測基数の存在と密接につながっている. 証明は [6] を見よ.

Fact 7.3. D を離散空間とする.

(1) D の濃度以下の可測基数が存在しないならば D はリアルコンパクトである.
(2) D の濃度以下の可測基数が存在するならば D はリアルコンパクトではない.

また, リアルコンパクト空間については次の重要な事実が知られている.

Fact 7.4. 任意の空間 X に対して, 次を満たすリアルコンパクト空間 υX が (同相を除いて) 一意に存在する:

(1) υX は X を稠密部分集合として持つ.
(2) 任意の $f \in C(X)$ に対して, f は υX 上に連続的に拡張可能である.

υX を X の **Hewitt リアルコンパクト化**と呼ぶ.

(1), (2) により $C(X)$ と $C(\upsilon X)$ は環として同型である. よって $C(X)$ の構造を調べるときには X はリアルコンパクトと仮定できる. また, Hewitt リアルコンパクト化の一意性より X がリアルコンパクトならば X と υX は同相である.
$C(X)$ でのリアルコンパクト空間の重要性は次の定理から伺える:

Fact 7.5 (Hewitt, 証明は [6] を参照のこと)**.** X, Y を空間とする.

(1) X, Y がリアルコンパクトで $C(X)$ と $C(Y)$ が同型ならば X と Y は同相である.
(2) よって $C(X)$ と $C(Y)$ が同型になる必要十分条件は, それらの Hewitt リアルコンパクト化が同相であることである.

リアルコンパクト性を使うと, 可測基数の存在の下で, 一般の Tychonoff 空間の Löwenheim-Skolem-Tarski number の上限が次のように与えられる:

定理 7.6. κ を可測基数とする．任意の空間 X に対して, 空間 Y で $|Y| \le 2^\kappa$ かつ初等的埋め込み $j : C(Y) \to C(X)$ を持つものが存在する．

この定理のために次の補題を用いる:

補題 7.7. κ を可測基数とする．この時任意の基数 λ に対して $\mathbb{R}^\lambda$ は $[\kappa,\kappa]$-コンパクトである．特に任意のリアルコンパクト空間は $[\kappa,\kappa]$-コンパクトである．

証明. 濃度 κ の X の開被覆 $\mathcal{O} = \{O_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ をとる．κ が可測基数なので, 推移的な ZFC のモデル N と critical point κ を持つ初等的埋め込み $j : V \to N$ が取れる (ここで V は集合全てからなるクラスである)．$j(\mathcal{O}) = \{O'_\alpha \mid \alpha < j(\kappa)\}$ を考える．もし $\{O'_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ が $j(\mathbb{R}^\lambda)$ を覆わないならば, $f \in j(\mathbb{R}^\lambda)$ で $f \notin \bigcup_{\alpha<\kappa} O'_\alpha$ となるものが取れる．ここで $g : \lambda \to \mathbb{R}$ を $g(\xi) = f(j(\xi))$ で定める．$\alpha < \kappa$ で $g \in O_\alpha$ となるものがあるので, 有限な $a \subseteq \lambda$ で $g \in \{h \in \mathbb{R}^\lambda \mid g \restriction a = h \restriction a\} \subseteq O_\alpha$ となるものが取れる．このとき $j(g) \restriction j(a) = f \restriction j(a)$ なので, $f \in \{h \in j(\mathbb{R}^\lambda) \mid j(g) \restriction j(a) = h \restriction j(a)\} \subseteq j(O_\alpha) = O'_\alpha$ となり矛盾．よって $\{O'_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ が $j(\mathbb{R}^\lambda)$ を覆うので, 初等性より $\kappa' < \kappa$ で $\{O_\alpha \mid \alpha < \kappa'\}$ が $\mathbb{R}^\lambda$ を覆うものが存在する． □

注意 7.8. 先の補題で可測基数の仮定は外すことができない．実際, 基数 κ で, すべての λ に対して $\mathbb{R}^\lambda$ が $[\kappa,\kappa]$-コンパクトになるものがあるとする．そのような κ の中で最小の基数をとると, それは最小の可測基数と一致する．

定理 *7.6* の証明. 空間 X をとる．Hewitt リアルコンパクト化を考える事で X はリアルコンパクトとしてよい．補題 7.7 より X は $[\kappa,\kappa]$-コンパクトであり, さらに $\kappa^{<\kappa} = \kappa$ なので定理 4.4 を適用することで求める空間 Y が得られる． □

実際のところ定理 7.6 は次のように強められる．詳細は省略する．

定理 7.9. κ を可測基数とする．任意の空間 X に対して, 空間 Y で $|Y| < \kappa$ かつ初等的埋め込み $j : C(Y) \to C(X)$ を持つものが存在する．さらに X がリアルコンパクトならば Y は X の連続像として取れる．

以上をまとめると, 次のような一般的な結果が得られる:

定理 7.10. Γ を次を満たす位相空間のクラスとする:
(1) $X \in \Gamma$ ならば $\upsilon X \in \Gamma$.
(2) $X \in \Gamma$ で Y が X の連続像ならば $Y \in \Gamma$.
この時
$$\mathrm{LST}(\Gamma) \le \text{最小の可測基数}.$$

証明. $X \in \Gamma$ を勝手にとると $\upsilon X \in \Gamma$ である．υX はリアルコンパクトなので, 定理 7.9 より υX の連続像 Y で $|Y| < \kappa$ かつ初等的埋め込み $j : C(Y) \to C(\upsilon X) \simeq C(X)$ を持つものが取れるが, 仮定より $Y \in \Gamma$ である． □

定理 7.11. Top を (Tychonoff) 空間全体のクラスとすると,

$$\mathrm{LST}(\mathsf{Top}) \leq \text{最小の可測基数}.$$

RealComp をリアルコンパクト空間全体のクラスとする. リアルコンパクト空間の連続像はリアルコンパクトになるとは限らないので先の定理は RealComp に直接は適用できない. 一方で υX は X を稠密部分空間に持つことから $|\upsilon X| \leq 2^{2^{|X|}}$ となる. これにより次が得られる:

定理 7.12. $\mathrm{LST}(\mathsf{RealComp}) \leq$ 最小の可測基数.

最小の可測基数が Top, RealComp の Löwenheim-Skolem-Tarski number と一致するかどうかが自然な疑問として生じるが, 残念ならがその答えはいまだに不明である.

Question 7.13. LST(Top) は最小の可測基数と一致するか? また, LST(RealComp) は最小の可測基数か?

注意しておくと, Hewitt リアルコンパクト化を考えることで

$$\mathrm{LST}(\mathsf{Top}) \leq \mathrm{LST}(\mathsf{RealComp}) \leq 2^{2^{\mathrm{LST}(\mathsf{Top})}}$$

となることがわかる. 従って LST(Top) が最小の可測基数ならば LST(RealComp) も最小の可測基数となり, その逆も成り立つ.

8. いくつかのクラスの下限

空間 X と $f, g \in C(X)$ に対して, すべての $x \in X$ について $f(x) \leq g(x)$ となるとき $f \leq g$ と書くことにする

補題 8.1. $f \leq g$ は $C(X)$ で定義可能な関係である, すなわち, 論理式 $\varphi(v, w)$ で次を満たすものが存在する: 任意の $f, g \in C(X)$ に対して

$$C(X) \models \varphi(f, g) \iff f \leq g.$$

証明. $\varphi(v, w)$ を $\exists h(w - v = h^2)$ とすればよい. □

$f \leq g$ の定義可能性により, 初等的埋め込み $j : C(Y) \to C(X)$ について $f \leq g \iff j(f) \leq j(g)$ となることがわかる.

空間 X と有理数 q に対して, $c_q^X \in C(X)$ を常に値 q を取る定数関数とする. c_q^X は $C(X)$ の定義可能な元である事は容易にわかる, すなわち, 論理式 $\varphi_q(v)$ で, 全ての X と $f \in C(X)$ に対して $C(X) \models \varphi_q(f) \iff f = c_q^X$ となるものが取れる.

補題 8.2. X, Y を空間, $j : C(Y) \to C(X)$ を初等的埋め込みとする.

(1) $f \in C(Y)$ が値 r をとる定数関数 $\iff$ $j(f)$ は値 r をとる定数関数.
(2) X が擬コンパクトならば Y も擬コンパクトである.

証明. (1). $f \in C(Y)$ は値 r をとる定数関数とする. 有理数 $q \le r$ をとると, $c_q^Y \le f$ なので $c_q^X \le j(f)$ である. 同様に有理数 $q \ge r$ をとると $c_q^X \ge j(f)$ である. これより $j(f)$ は値 r をとる定数関数である. 逆も同様.

(2). $f \in C(Y)$ が非有界関数ならば, 任意の有理数 q に対して $\neg(c_q^Y \le f \le c_q^Y)$. j の初等性より $\neg(c_q^X \le j(f) \le c_q^X)$ となり, $j(f)$ も非有界関数になる. □

次はよく知られている:

補題 8.3. X がコンパクトである必要十分条件は, X がリアルコンパクトかつ擬コンパクトになることである.

証明. X が擬コンパクトであることから, 任意の $f \in C(X)$ は βX 上に連続的に拡張可能である. Hewitt リアルコンパクト化の一意性より βX は υX に同相だが, X がリアルコンパクトなので X は υX, すなわち βX と同相である. □

命題 8.4. Y をリアルコンパクト空間で初等的埋め込み $j : C(Y) \to C(\beta\omega)$ を持つものとする. この時 Y は $\beta\omega$ と同相である.

証明. 補題 8.2 より Y は擬コンパクトであるが, リアルコンパクトでもあるので Y はコンパクトになる. Fact 1.4 より Y は $\beta\omega$ と同相である. □

注意 8.5. 先の命題において Y のリアルコンパクト性を外すことはできない; $\beta\omega$ は c.c.c. 空間なので, 定理 3.1 より $|Y| \le 2^\omega$ なる空間 Y で初等的埋め込み $j : C(Y) \to C(\beta\omega)$ を持つものが取れる. $|Y| \le 2^\omega < 2^{2^\omega} = |\beta\omega|$ より Y は $\beta\omega$ と同相ではありえない.

この命題により, やや一般的なクラスでの Löwenheim-Skolem-Tarski number の下限が得られる.

命題 8.6. Γ は $\beta\omega \in \Gamma \subseteq \mathsf{RealComp}$ を満たすクラスとする. この時 $\mathrm{LST}(\Gamma) \ge (2^{2^\omega})^+$. さらに $\beta\omega \in \Gamma \subseteq \mathsf{Lind}$ かつ Γ が連続像に関して閉じているならば $\mathrm{LST}(\Gamma) = (2^{2^\omega})^+$.

定理 8.7. (1) $\mathrm{LST}(\mathsf{Lind}) \ge (2^{2^\omega})^+$, よって $\mathrm{LST}(\mathsf{Lind}) = (2^{2^\omega})^+$ である.

(2) $\mathrm{LST}(\mathsf{RealComp}) \ge (2^{2^\omega})^+$.

X が **σ-コンパクト**とは, X が可算個のコンパクト空間の和集合の形をしていることである. コンパクト空間は σ-コンパクトであり, σ-コンパクト空間は Lindelöf である. さらに σ-コンパクト空間の連続像も σ-コンパクトなので次が言える.

定理 8.8. σ-Comp を σ-コンパクト空間全体のクラスとすると $\mathrm{LST}(\sigma\text{-}\mathsf{Comp}) = (2^{2^\omega})^+$.

9. 初等的埋め込みと連続写像

$C(Y)$ から $C(X)$ への単射環準同型と X から Y への連続写像の間には次のような関係が成り立つことが知られている. 証明は [6] を参照のこと.

Fact 9.1. X を空間, Y をリアルコンパクト空間とする. この時次は同値:

(1) Y は稠密な X の連続像を含む.
(2) $C(Y)$ から $C(X)$ への単射準同型 $i : C(Y) \to C(X)$ で $i``C(Y)$ が全ての定数関数を含むものがある.

ここで, 単射環準同型を初等的埋め込みに変えた場合はどうなるかについていくつかの結果を紹介する.

そのためにまず次の結果を紹介する. 復習すると $f \in C(X)$ に対して $Z(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$, $CZ(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ であった. $X = CZ(1) = Z(0)$, $\emptyset = Z(1) = CZ(0)$ に注意.

補題 9.2 ([7])**.** 論理式 $\varphi(v, w)$ で次を満たすものが存在する: 勝手な空間 X と $f, g \in C(X)$ に対して

$$Z(f) \subseteq Z(g) \iff C(X) \models \varphi(f, g).$$

証明. $\varphi_0(f) = \exists g(fg = 1)$, $\varphi_1(f, g) = \neg\varphi_0(f^2 + g^2)$ とする. $C(X) \models \varphi_1(f, g) \iff \exists x \in X(f(x) = g(x) = 0)$ となる. $\varphi(f, g) = \forall h(\varphi_1(f, h) \to \varphi_1(g, h))$ とすれば求めるものになる. □

この Fact により, $Z(f) \subseteq Z(g)$, $Z(f) = Z(g)$ は $C(X)$ で定義可能な関係であることがわかる. また, $CZ(f) \subseteq CZ(g) \iff Z(g) \subseteq Z(f)$ なので $CZ(f) \subseteq CZ(g)$, $CZ(f) = CZ(g)$ も定義可能な関係である. さらに $CZ(f) \cap CZ(g) = CZ(fg)$, $CZ(f) \cup CZ(g) = CZ(f^2 + g^2)$ なので和集合, 共通部分なども定義可能となる. $CZ(f) \subseteq Z(g) \iff CZ(f) \cap CZ(g) = CZ(0)$ なので, 関係 $CZ(f) \subseteq Z(g)$, $Z(f) \subseteq CZ(g)$, $CZ(f) = Z(g)$ なども定義可能である.

後で使うわけではないが, この定義可能性より次が言える:

命題 9.3. X, Y を空間, $j : C(Y) \to C(X)$ を初等的埋め込み, κ を基数とする. もし X が κ-c.c. を満たせば Y も κ-c.c. を満たす.

証明. Y が κ-c.c. を満たさないならば, 互いに素な κ 個のコゼロ集合 $\{CZ(f_\alpha) \mid \alpha < \kappa\}$ が取れる. $\alpha < \beta$ の時 $CZ(f_\alpha) \cap CZ(f_\beta) = \emptyset$ だが, 先の定義可能性より $CZ(j(f_\alpha)) \cap CZ(j(f_\beta)) = \emptyset$ となり $\{CZ(j(f_\alpha)) \mid \alpha < \kappa\}$ は X の互いに素なコゼロ集合の族となる. □

定義 9.4. $D \subseteq X$ が G_δ**-稠密**とは, D が任意の空でない G_δ-集合と交わることである.

Tychonoff 空間においては, D が G_δ-稠密であることと任意の空でないゼロ集合と交わることは同値である.

初等的埋め込みを使うと Fact 9.1 は次のような形に強めることができる.

命題 9.5. X を空間, Y をリアルコンパクト空間とする. もし初等的埋め込み $j : C(Y) \to C(X)$ が存在するならば, 連続写像 $\pi : X \to Y$ で, $\pi``X$ が Y の G_δ-稠密集合, かつ $j(f) = f \circ \pi$ が全ての $f \in C(Y)$ に対して成り立つものが存在する.

証明. 各 $x \in X$ に対して環準同型 $h_x : C(Y) \to \mathbb{R}$ を $h_x(f) = j(f)(x)$ で定める. 補題 8.2 より, Y の定数関数を j で送ったものはやはり定数関数になることから, h は全射順同型である. よって Fact 7.2 より, $y \in Y$ で $\ker(h_x) = \{f \in C(Y) \mid f(y) = 0\}$ となるものがただ一つとれる. $\pi : X \to Y$ を, x に対して上のような y を対応させる写像とする. この時 $f(\pi(x)) = 0 \iff j(f)(x) = 0$ となることから, π が連続写像であることは容易にチェックできる. $\pi``X$ が Y で G_δ-稠密であることを見る. そのために $f \in C(Y)$ で $Z(f) \neq \emptyset$ となるものをとる. $C(Y)$ において $Z(f) \neq Z(1)$ なので, $C(X)$ において $Z(j(f)) \neq Z(1)$, すなわち $Z(j(f)) \neq \emptyset$ である. $j(f)(x) = 0$ なる $x \in X$ をとると, $f(\pi(x)) = j(f)(x) = 0$ なので $\pi(x) \in Z(f)$ である.

次に $j(f) = f \circ \pi$ を見るが, そのためには $j(f)(x) = f(\pi(x))$ が全ての $x \in X$ で成り立てばよい. $r = f(\pi(x))$ として, $c_r \in C(Y)$ を値 r をとる定数関数とする. $(f - c_r)(\pi(x)) = 0$ なので $j(f - c_r)(x) = 0$ だが, $j(f - c_r) = j(f) - j(c_r)$ で $j(c_r)$ も値 r をとる定数関数なので $j(f)(x) = r$ となる. □

注意 9.6. 命題 9.5 での Y のリアルコンパクトの仮定は外せない: 順序数 ω_1, $\omega_1 + 1$ を順序位相を入れた空間とみなすと, ω_1 は擬コンパクトだがリアルコンパクトでなく, ω_1 の Hewitt リアルコンパクト化はコンパクト空間 $\omega_1 + 1$ となる. $j : C(\omega_1) \to C(\omega_1 + 1)$ を自然な同型写像とする. 連続写像 $\pi : \omega_1 + 1 \to \omega_1$ が与えられたとすると, $\pi``(\omega_1 + 1)$ はコンパクトだが $\omega_1$ は非可算なコンパクト集合を持たないので $\pi``(\omega_1 + 1)$ は ω_1 の有界部分集合になり, 稠密ではない. また, $\alpha < \omega_1$ を $\pi``(\omega_1 + 1)$ の上界として $f : \omega_1 \to \{0, 1\}$ を $f``(\alpha + 1) = \{0\}$, $f``(\omega_1 \setminus \alpha + 1) = \{1\}$ と定めると $j(f) \neq f \circ \pi$ である.

初等的埋め込み $j : C(Y) \to C(X)$ が与えられてるとき, 連続写像 $\pi : X \to Y$ で $j(f) = f \circ \pi$ が全ての $f \in C(Y)$ に対して成り立つものは存在すればただ一つである事は容易に確かめられる.

定義 9.7. X を空間, Y をリアルコンパクト空間, $j : C(Y) \to C(X)$ を初等的埋め込みとする. $j(f) = f \circ \pi$ が全ての $f \in C(Y)$ に対して成り立つ連続写像 $\pi : X \to Y$ を, j **から誘導された連続写像**と呼ぶことにする.

先の命題より, π が初等的埋め込み j から誘導されるものならば $\pi``X$ は Y の G_δ-稠密集合になる. しかし π は全射になるとは限らない; X をリアルコンパクトでない空間とする. 自然な同型写像 $j : C(\upsilon X) \to C(X)$ が取れ

るので j から誘導された連続写像 $\pi : X \to \upsilon X$ が取れるが, この時 $\pi(x) = x$ が全ての $x \in X$ に対して成り立つので $\pi“X = X \neq \upsilon X$ である.

一方で, 例えば X がコンパクトの時 $\pi“X$ は Y の閉集合となるので $\pi“X = Y$ となり π は全射になる. ここで π が全射になるための十分条件をいくつか紹介する.

補題 9.8. X が Lindelöf 空間である必要十分条件は任意の閉集合の族 $\mathcal{F}$ に対して, もし $\mathcal{F}$ の可算部分族の共通部分が空でないならば $\mathcal{F}$ の共通部分も空でないことである.

命題 9.9. X を Lindelöf 空間, Y をリアルコンパクト空間, $j : C(Y) \to C(X)$ を初等的埋め込みとして $\pi : X \to Y$ を j から誘導された連続写像とする. この時 π は全射である.

証明. X が Lindelöf なので $\pi“X$ は Lindelöf 空間である. $\pi“X = Y$ を示すために, $y \in Y$ を固定する. $\mathcal{F} = \{Z \subseteq Y \mid Z$ はゼロ集合で $y \in Z\}$ とすると, $\mathcal{F}$ の共通部分は $\{y\}$ となる.

可算な部分族 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ を勝手にとる. $\mathcal{G}$ の共通部分もゼロ集合になるので $Z(g) = \bigcap \mathcal{G}$ となる $g \in C(Y)$ が取れる. $Z(g) \neq \emptyset$ であり $\pi“X$ は G_δ-稠密なので $\bigcap \mathcal{G} \cap \pi“X = Z(g) \cap \pi“X \neq \emptyset$, よって $\bigcap\{Z \cap \pi“X \mid Z \in \mathcal{G}\} \neq \emptyset$. ここで $\pi“X$ が Lindelöf であることから $\bigcap\{Z \cap \pi“X \mid Z \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$ となる. $\bigcap \mathcal{F} = \{y\}$ なので $y \in \pi“X$ である. □

系 9.10. X を Lindelöf 空間, Y を空間とする. もし初等的埋め込み $j : C(Y) \to C(X)$ が存在するならば次は同値である.

(1) Y は Lindelöf.
(2) Y はリアルコンパクト.
(3) Y は X の連続像.

初等的埋め込みから誘導される π が全射になる, 別の十分条件を紹介する.

定義 9.11. 空間 X の点 $x \in X$ が **G_δ-点**であるとは, 開集合の可算族 $\{O_n \mid n < \omega\}$ で $\bigcap_n O_n = \{x\}$ となるものが存在することである. 全ての点が G_δ-点であるとき X は**可算擬特性** (countable pseudocharacter) を持つという.

第一可算空間は可算擬特性を持つ. また Tychonoff 空間においては $x \in X$ が G_δ-点であることは $\{x\}$ がゼロ集合であることと同値である.

Y がリアルコンパクトかつ可算擬特性を持つ空間の時は, 誘導された $\pi : X \to Y$ は全単射になってくれる.

命題 9.12. X を空間, Y をリアルコンパクトかつ可算擬特性を持つ空間, $j : C(Y) \to C(X)$ を初等的埋め込みとして $\pi : X \to Y$ を j から誘導された連続写像とする. この時 π は全単射である.

証明. $\pi“X$ が G_δ-稠密で Y は可算擬特性を持つので $\pi“X = Y$ となり全射である. 単射であることを見るために, $y \in Y$ をとる. $f \in C(Y)$ で $Z(f) = \{y\}$

となるものが取れる．$Z(f)$ は空でないので，$Z(j(f))$ も空でない．ここで次のような論理式 $\varphi(f)$ を考える:

$$Z(f) \neq \emptyset \wedge \forall g (Z(g) \subseteq Z(f) \to Z(g) = Z(f) \vee Z(g) = \emptyset).$$

この論理式は $Z(f)$ が一点集合であることを表している．j の初等性より $\varphi(j(f))$ も成り立ち，$Z(j(f))$ は一点集合である．$Z(j(f)) = \{x\}$ となる $x \in X$ をとると，この x は $\pi(x) = y$ となるただ一つの点である． $\square$

Question 9.13. 初等的埋め込み $j : C(Y) \to C(X)$ から誘導される $\pi : X \to Y$ は，ほかにも位相的によい性質を持つか? 例えば:

(1) π“X 上の連続関数は X 上に連続的に拡張可能か?

(2) π を X から部分空間 π“X への連続写像と見たとき，π は商写像か?

Question 9.14. X, Y を空間，$j : C(\upsilon Y) \to C(X)$ を初等的埋め込み，$\pi : X \to \upsilon Y$ を π から誘導される連続写像とする．このとき常に π“$X \supseteq Y$ か?

連続写像 $\pi : X \to Y$ で π“X が Y で稠密になっているとき，$j : C(Y) \to C(X)$ を $j(f)(x) = f(\pi(x))$ で定めると，この j は準同型写像になる．この j を π から誘導された準同型写像と呼ぶことにする．

Question 9.15. $\pi : X \to Y$ から誘導される準同型写像 $j : C(Y) \to C(X)$ が初等的埋め込みになるための十分条件，必要十分条件を X, Y, π についての位相的な性質として記述する事は可能か?

10. 可算擬特性を持つ空間

命題 9.12 を用いて，可算擬特性を持つ空間のクラスの Löwenheim-Skolem-Tarski number の下限が非常に大きくなり，さらに巨大基数の存在を導くことを紹介する．

定理 10.1. Γ を可算擬特性を持つリアルコンパクト空間全体のクラスとする．この時 $\mathrm{LST}(\Gamma)$ は最小の可測基数と一致する．

この定理の証明のために，まず次の補題を示す．

補題 10.2. X を可算擬特性を持つリアルコンパクト空間とすると，$|X|$ 以下に可測基数は存在しない．

証明. 可測基数 $\kappa \leq |X|$ が存在すると仮定する．$j : V \to N$ を critial point κ を持つ，集合論の宇宙 V から N への初等的埋め込みとする．$|X| \geq \kappa$ より $j(X) \supsetneq j$“X なので $x^* \in j(X) \setminus j$“X が取れる．$h : C(X) \to \mathbb{R}$ を $h(f) = j(f)(x^*)$ で定めると，h は全射環準同型であることは容易に確かめられる．X がリアルコンパクトなので $\ker(h) = \{f \in C(X) \mid f(x) = 0\}$ となる $x \in X$ が取れる．x は G_δ-点であることから $Z(f) = \{x\}$ となる $f \in C(X)$ が取れるが，$\{j(x)\} = j(Z(f)) = Z(j(f))$ であり $j(x) \neq x^*$ なので $j(f)(x^*) \neq 0$, よって $f \notin \ker(h)$ となってしまい矛盾である． $\square$

定理 *10.1* の証明. 離散空間 D を取る. D は明らかに可算擬特性を持つ. もし $|D|$ 以下の可測基数が存在しないならば, Fact 7.3 より D はリアルコンパクトである. また, Y が可算擬特性を持つリアルコンパクト空間で初等的埋め込み $j : C(Y) \to C(D)$ を持つものならば, 命題 9.12 より $|Y| = |D|$ となる. 以上の議論により, LST(Γ) は最小の可測基数以上になる. また, 補題 10.2 よりこれらが丁度一致することが分かる. □

定理 10.1 により, 可算擬特性を持つリアルコンパクト空間全体の Löwenheim-Skolem-Tarski number の存在が可測基数の存在と同値であることが言えるが, 一方で可測基数の存在の下では, 補題 10.2 より可算擬特性を持つリアルコンパクト空間の濃度の上限があることになり, この意味で定理 10.1 はあまり面白くない. それでは濃度の上限を持たないクラスについての結果もいくつか紹介する.

まず距離付け可能空間について考える. 距離付け可能空間は明らかに第一可算であり, また濃度の意味でいくらでも大きな距離付け可能空間が存在する. リアルコンパクト性については次が知られている.

Fact 10.3 (Katětov, 証明については [6] を参照のこと)**.** *X を距離付け可能空間とする. もし X の濃度以下の可測基数が存在しないならば, X はリアルコンパクトである.*

これを用いると, 次が言える.

定理 10.4. Met を距離付け可能空間全体のクラスとする. もし LST(Met) が存在するならば可測基数が存在する. また, LST(Met) は最小の可測基数より真に大きい.

証明. Fact 10.3 と定理 10.1 の議論より. □

一方で, LST(Met) が最小の可測基数よりどれくらい大きくなるかについては現状わかっていない.

Question 10.5. LST(Met) はどれくらい大きいか? 最小の超コンパクト基数と一致するか?

LST(Met) と同様な議論により, 次のようなクラスについてもその Löwenheim-Skolem-Tarski number は最小の可測基数より真に大きくなることがわかる. 証明は省略する.

定理 10.6. Γ を次のうちのどれかとする:

(1) 離散空間全体のクラス.
(2) Extremally disconnected 空間全体のクラス.
(3) 第一可算空間全体のクラス.
(4) Fréchet-Urysohn 空間全体のクラス.
(5) Sequential 空間全体のクラス.

(6) Countably tight 空間全体のクラス.
(7) 局所コンパクト空間全体のクラス.
(8) Perfectly normal 空間全体のクラス.
(9) ほとんど離散な空間全体のクラス.

もし LST(Γ) が存在するならば可測基数が存在する. また, LST(Γ) は最小の可測基数より真に大きい.

ここで X が**ほとんど離散**とは, X の孤立でない点が高々一つなことである. それ以外の空間の定義については Engelking [5] などを参照のこと.

上で挙げた空間のクラスは全て離散空間のクラスを部分クラスとして含んでおり, そのようなクラスの Löwenheim-Skolem-Tarski number は大きくなる傾向にある. 他に離散空間を含む重要なクラスとしてパラコンパクト空間が思いつかれるが, 一方でパラコンパクト空間の Löwenheim-Skolem-Tarski number の下限はわかっていない.

Question 10.7. パラコンパクト空間の Löwenheim-Skolem-Tarski number はどれくらいか?

11. $C_p(X)$

$C(X)$ に適当な位相を入れた位相空間の研究も多くなされている. 様々な位相の入れ方があるが, 一般位相空間論でよく研究されている各点収束位相を入れた空間 $C_p(X)$ に関する結果を紹介する. $C_p(X)$ については Arkhangel'skii [1] が基本文献である.

定義 11.1. 空間 X に対して, $C_p(X)$ を $C(X)$ に各点収束位相を入れた空間とする, すなわち, $\{g \in C(X) \mid \forall i \leq n(g(x_i) \in O_i)\}$ ($n < \omega, x_i \in X, O_i \subseteq \mathbb{R}$ は開集合) の形の集合全体を開基として位相を入れた空間とする.

注意 11.2. 空間 X とその Hewitt リアルコンパクト化 υX に対して, $C(X)$ と $C(\upsilon X)$ は環としては同型であるが, $C_p(X)$ と $C_p(\upsilon X)$ は同相とは限らない; 順序数空間 ω_1 に対して, $C_p(\upsilon\omega_1)$ は countably tight だが $C_p(\omega_1)$ はそうではない.

命題 11.3. X を空間, Y をリアルコンパクト空間, $j : C(Y) \to C(X)$ を初等的埋め込みとし, $\pi : X \to Y$ を j から誘導された連続写像とする. もし π が全射ならば, j は $C_p(Y)$ から $C_p(X)$ への位相的埋め込みになる. 特に $C_p(Y)$ は $C_p(X)$ の部分空間と同相である.

この命題の応用を一つ紹介する. 空間 X が **scattered** とは, X の空でない部分空間は必ず孤立点を持つことである. 順序数に順序位相を入れた空間が scattered 空間の典型例である.

Fact 11.4 (Gerits [4], Pytkeev [11])**.** X がコンパクトの時, X が scattered である必要十分条件は $C_p(X)$ が Fréchet-Urysohn 空間になることである.

この命題中のコンパクトの仮定は実際には Lindelöf に弱めることができる ([1]).

定理 11.5. X を scattered Lindelöf 空間, Y を空間とする．もし初等的埋め込み $j : C(Y) \to C(X)$ が存在するならば Y も scattered である.

証明. Scattered 性は遺伝的であることを考えると, Y の Hewitt リアルコンパクト化を取ることで Y は最初からリアルコンパクトと仮定してよい．X が Lindelöf なので, j から誘導される連続写像 $\pi : X \to Y$ は全射である．命題 11.3 より $C_p(Y)$ は $C_p(X)$ の部分空間と同相になる．X が scattered なので Fact 11.4 より $C_p(X)$ は Fréchet-Urysohn であるが, Fréchet-Urysohn 性は遺伝的なので $C_p(Y)$ も Fréchet-Urysohn になり, よって Y も scattered である. □

12. LST(Γ) の変種

今までは $C(X)$ の Löwenheim-Skolem-Tarski の性質を見てきたが, 様々な変種を考えることができる．いくつか思いつくものを紹介する.

12.1. 拡張言語での $C(X)$.

$C(X)$ については言語 $\{+, \cdot, 0, 1\}$ の構造とみなしたが, 言語を拡張した Löwenheim-Skolem-Tarski の性質を次のように考えることができる.

定義 12.1. Γ を位相空間のクラスとする．クラス Γ の**拡張された Löwenheim-Skolem-Tarski number** $\mathrm{LST}^+(\Gamma)$ を次を満たす最小の基数とする：任意の $X \in \Gamma$, $n < \omega$ と m_i 変数述語 $R_i \subseteq C(X)^{m_i}$ $(i = 0, \dots, n)$ に対して, $Y \in \Gamma$ と $R'_i \subseteq C(Y)^{m_i}$ $(i = 0, \dots, n)$ で $|Y| < \kappa$ かつ初等的埋め込み $j : (C(Y), R'_0, \dots, R'_n) \to (C(X), R_0, \dots, R_n)$ を持つものが存在する.

LST(Γ) と同様に, 最小の超コンパクト基数は $\mathrm{LST}^+(\Gamma)$ の上界となる．また, 定理 3.3, 4.4, 7.9 の証明はほぼそのまま $\mathrm{LST}^+(\Gamma)$ の証明に書き換えることができるので次が言える.

定理 12.2.
(1) $\mathrm{LST}^+(\mathsf{C.C.C.}) = (2^\omega)^+$.
(2) $\mathrm{LST}^+(\mathsf{Comp}) = \mathrm{LST}^+(\mathsf{Lind}) = (2^{2^\omega})^+$.
(3) $\mathrm{LST}^+(\mathsf{Top}) \leq$ 最小の可測基数.

一方, 言語を拡張したことで $\mathrm{LST}^+(\mathsf{Met})$ は非常に大きなものになることが判明している.

定理 12.3. $\mathrm{LST}^+(\mathsf{Met})$ は最小の超コンパクト基数と一致する.

12.2. 上方 Löwenheim-Skolem-Tarski の性質.

今までは, "どれくらい小さい Y が取れるか" という**下方 Löwenheim-Skolem-Tarski の性質**を考えていたが, "どれくらい大きくできるか" という**上方 Löwenheim-Skolem-Tarski の性質**も同じように考えることができる.

定義 12.4. Γ を位相空間のクラスとする．クラス Γ の**上方 Löwenheim-Skolem-Tarski number** $\mathrm{uLST}(\Gamma)$ を次を満たす最小の基数とする: 任意の $X \in \Gamma$ に対して, $|X| \geq \kappa$ ならばいくらでも大きいな $Y \in \Gamma$ で初等的埋め込み $j : C(Y) \to C(X)$ を持つものが存在する．

$\mathrm{uLST}(\Gamma)$ は二階論理の Hanf number に対応する基数である．
$\mathrm{uLST}(\Gamma)$ については大したことはわかっていない．いくつか判明していることを紹介する．

補題 12.5. (1) Γ が可算無限空間を含めば $\mathrm{uLST}(\Gamma) \geq \omega_1$.
(2) Γ が $\mathbb{R}$ か $[0,1]$ を含めば $\mathrm{uLST}(\Gamma) \geq (2^\omega)^+$.

補題 12.6. Γ が自然な位相空間のクラスならば

$$\mathrm{uLST}(\Gamma) \leq \text{最小の拡張可能基数}.$$

定理 12.7. (1) $\mathrm{uLST}(\mathsf{RealComp}) \geq$ 最小の可測基数.
(2) $\mathrm{uLST}(\mathsf{Top}) \geq$ 最小の可測基数.
(3) $\mathrm{uLST}(\mathsf{Met}) \geq$ 最小の可測基数.

定理 12.8. $\mathrm{uLST}(\mathsf{C.C.C.}) \leq$ 最小の強コンパクト基数.

12.3. **$C(X,Y)$.** 空間 X,Y に対して, $C(X,Y)$ を X から Y への連続写像全体とする．Y が何らかの代数系の場合は, $C(X)$ と同様にして $C(X,Y)$ も適当な代数とみなすことができる．例を挙げれば:

(1) 2 元体 F_2 に離散位相を入れた空間についての $C(X,F_2)$.
(2) 整数環 $\mathbb{Z}$ に離散位相を入れた空間についての $C(X,\mathbb{Z})$.
(3) 有理数体 $\mathbb{Q}$ に通常の距離位相を入れた空間についての $C(X,\mathbb{Q})$.
(4) 複素数体 $\mathbb{C}$ に通常の距離位相を入れた空間についての $C(X,\mathbb{C})$.

特に X がゼロ次元, すなわち開閉集合からなる開基を持つときには $C(X)$ よりも $C(X,F_2)$, $C(X,\mathbb{Z})$ のほうが X の構造をよりよく表している可能性がある．これらの構造についても初等的埋め込みや Löwenheim-Skolem-Tarski の性質を考えることができるが, 現状ほとんど手付かずである．

12.4. **Löwenheim-Skolem number と Löwenheim number.** 二階論理における Löwenheim-Skolem number と Löwenheim number に対応する基数が以下のように定義できる[2].

定義 12.9. Γ を位相空間のクラスとする．クラス Γ の **Löwenheim-Skolem number** $\mathrm{LS}(\Gamma)$ を次を満たす最小の基数とする: 任意の $X \in \Gamma$ に対して, $Y \in \Gamma$ で $|Y| < \kappa$ かつ $C(X)$ と $C(Y)$ が初等的同値になるものがものが存在する．

[2]Löwenheim-Skolem-Tarski number, Löwenheim-Skolem number, Löwenheim number の使い分けについては Magidor-Väänänen [10] を参考にした.

定義 12.10. Γ を位相空間のクラスとする. クラス Γ の **Löwenheim number** $\mathrm{L}(\Gamma)$ を次を満たす最小の基数とする: 任意の文 φ に対して, もし $C(X) \models \varphi$ となる $X \in \Gamma$ が存在すれば $Y \in \Gamma$ で $|Y| < \kappa$ かつ $C(Y) \models \varphi$ となるものが存在する.

$\mathrm{LST}(\Gamma)$ と違い, $\mathrm{LS}(\Gamma)$ と $\mathrm{L}(\Gamma)$ は常に存在する基数となる. 明らかに $\mathrm{L}(\Gamma) \leq \mathrm{LS}(\Gamma) \leq \mathrm{LST}(\Gamma)$ であり, 命題 2.1 により Γ が $[0,1]$ か $\mathbb{R}$ を含めば $(2^\omega)^+ \leq \mathrm{L}(\Gamma)$ であるが上限についてはよくわかっていない.

Question 12.11 (Schweber [12])**.** 自然なクラス Γ に対して $\mathrm{LS}(\Gamma)$ と $\mathrm{L}(\Gamma)$ の値はどうなるか? 特に $\mathrm{LS}(\mathsf{Top})$, $\mathrm{L}(\mathsf{Top})$ の値は何か?

References

[1] A. V. Arkhangel'skiĭ, *Topological function spaces.* Mathematics and its Applications (Soviet Series), vol. 78, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992.
[2] J. Bagaria, *$C^{(n)}$-cardinals.* Arch. Math. Logic 51 (2012), no. 3-4, 213–240.
[3] I. Bandlow, *A construction in set-theoretic topology by means of elementary substructures.* Z. Math. Logik Grundlag. Math. 37 (1991), 467–480.
[4] J. Gerlits, *Some properties of C(X) II*, Topol. Appl. 15(3) (1983) 255–262.
[5] R. Engelking, General Topology.
[6] L. Gillman, M. Jerison, *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, New York, 1960.
[7] C. W. Henson, C. G. Jockusch, L. A. Rubel, G. Takeuti, *First order topology.* Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 143 (1977), 40 pp.
[8] L. R. Junqueira, F. D. Tall, *The topology of elementary submodels.* Top. Appl. 82 (1998), 239–266.
[9] M. Madigor, *On the role of supercompact and extendible cardinals in logic.* Israel J. Math. 10, 147–157 (1971).
[10] M. Magidor, J. Väänänen, *On Löwenheim-Skolem-Tarski numbers for extensions of first order logic.* J. Math. Log. 11 (2011), no. 1, 87–113.
[11] E.G. Pytkeev, *Sequentiality of spaces of continuous functions*, Russ. Math. Surv. 37(5) (1982) 190–191.
[12] N. Schweber, `https://math.stackexchange.com/questions/4211730/lowenheim-skolem-number-for-satisfaction-via-continuous-function-rings`
[13] A. Stonestrom, `https://math.stackexchange.com/questions/4211730/lowenheim-skolem-number-for-satisfaction-via-continuous-function-rings`
[14] F. D. Tall, *Set-theoretic problems concerning Lindelöf spaces.* Questions Answers Gen. Topology 29 (2011), no. 2, 91–103.
[15] T. Usuba, in preparation.
[16] E. M. Vechtomov, *Rings of continuous functions. Algebraic aspects.* (Russian) Translated in J. Math. Sci. 71 (1994), no. 2, 2364–2408.
[17] M. D. Weir, *Hewitt-Nachbin spaces.* North-Holland Mathematics Studies, No. 17. Notas de Matemática, No. 57. 1975.

(薄葉季路) 早稲田大学基幹理工学部数学科
Email address: `usuba@waseda.jp`