証明可能性述語の様相論理

神戸大学大学院システム情報学研究科　倉橋 太志 *
Taishi Kurahashi
Graduate School of System Informatics,
Kobe University

1　はじめに

第 2 不完全性定理，すなわちペアノ算術 PA を含む無矛盾かつ計算可能な理論 T について $T \nvdash \mathrm{Con}_T$（ここで Con_T は T の無矛盾性を表す文），という主張は通常次のように証明される．まず，T の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ を用いて，T の Gödel 文 ξ，すなわち $T \vdash \xi \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \xi \urcorner)$ を満たす文 ξ を作る．特に T の無矛盾性から $T \nvdash \xi$ が示せるので，その証明を T において形式化して実行すれば $T \vdash \mathrm{Con}_T \to \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \xi \urcorner)$ となる．もし $T \vdash \mathrm{Con}_T$ であれば $T \vdash \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \xi \urcorner)$ となり，$T \vdash \xi$ であるため T の無矛盾性に反する．よって $T \nvdash \mathrm{Con}_T$ である．

Gödel は原論文 [13] においては，第 2 不完全性定理の証明を上述のようなアウトラインを述べるだけに留めている．しかし，$T \vdash \mathrm{Con}_T \to \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \xi \urcorner)$ を示すには「T が無矛盾ならば $T \nvdash \xi$」の証明を T において実行する必要がある．そしてその議論に対応できるためには，T における証明可能性について成立するいくつかの事実を，$\mathrm{Pr}_T(x)$ を介して T において証明できなければならない．Hilbert and Bernays [16] は第 2 不完全性定理の成立のために十分な，証明可能性述語と T が満たすべきいくつかの条件（導出可能性条件）を提示し，第 2 不完全性定理の詳細な証明を行った．後に Löb [29] によって整理された十分条件を用いた第 2 不完全性定理の証明が広く知られるようになったが，これらの条件以外の十分条件が Jeroslow [18] らによっても与えられている（詳しくは [24] を参照）．このような観点から,「各証明可能性述語はどのような性質を満たすか？」「各性質を満たす，または満たさない証明可能性述語は存在するか？」といった問題が研究されてきた．本稿では特に，これらの問題を**様相論理**を用いて分析する研究[1]について，これまでに知られている結果を紹介する．

2　証明可能性述語と第 2 不完全性定理

2.1　証明可能性述語

$\mathcal{L}_A$ を一階算術の言語とし，本稿ではペアノ算術 PA を含む無矛盾かつ原始再帰的な $\mathcal{L}_A$-理論のみを扱うとする．以降，T は必ずそのような理論を表すとしておく．ここで理論 T が原始再帰的であるとは，T の公理の Gödel 数全体の集合が原始再帰的であることをいう．このとき，T の定理全体の集合 $\mathrm{Th}(T)$ は算術の標準モデル $\mathbb{N}$ において Σ_1-定義可能な（すなわち c.e.）集合となる．このような集合は，論理式を通じて PA において取り扱うことができる．

*kurahashi@people.kobe-u.ac.jp

[1] この分野の基本的な話題については教科書 [8, 38, 42] とサーベイ論文 [2, 17, 28] を参照されたい．

定義 2.1 (弱表現). $\mathcal{L}_A$-論理式 $\varphi(x)$ が PA において集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ を**弱表現する**とは，任意の自然数 n について，$n \in X$ と $\mathsf{PA} \vdash \varphi(\overline{n})$ が同値であることをいう．

標準モデル $\mathbb{N}$ において Σ_1-定義可能な集合は PA において Σ_1 論理式で弱表現されるので，従って $\mathrm{Th}(T)$ を PA において弱表現する Σ_1 論理式が存在し，これが本稿の主役である証明可能性述語である．

定義 2.2 (証明可能性述語). 集合 $\mathrm{Th}(T)$ を PA において弱表現する $\mathcal{L}_A$-論理式 $\mathrm{Pr}_T(x)$ を T の**証明可能性述語**という．

すなわち，T の証明可能性述語とは，任意の $\mathcal{L}_A$-論理式 φ について，

$$T \vdash \varphi \iff \mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

を満たす $\mathcal{L}_A$-論理式 $\mathrm{Pr}_T(x)$ のことである．ただし，本稿では必ずしも Σ_1 とは限らない証明可能性述語も考察の対象に入れる．証明可能性述語は不完全性定理の証明において非常に重要な役割を果たす論理式である．実際，Gödel [13] は T の Σ_1 証明可能性述語 $\mathrm{Prov}_T(x)$ を作り，不完全性定理を証明した．

証明可能性述語の作り方は有限列のコード化の方法や証明可能性の定義の方法などの選択によって変化する．他方，Feferman [11] はこれらを固定したときに，理論 T を弱表現する論理式の選択によって証明可能性述語のどの性質が変化しうるのかを分析した．まず，T を PA において弱表現する論理式 $\tau(v)$，つまり任意の $\mathcal{L}_A$-論理式 φ について，$\varphi \in T$ と $\mathsf{PA} \vdash \tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$ が同値となる $\tau(v)$ を用意する．続いて，“x は $\tau(v)$ の定める理論において証明可能” を表す $\mathcal{L}_A$-論理式 $\mathrm{Pr}_\tau(x)$ を自然に作れば，$\mathrm{Pr}_\tau(x)$ は T の証明可能性述語となることが示せる．この $\mathrm{Pr}_\tau(x)$ という形の論理式を **Feferman 的な証明可能性述語**という．

定理 2.3 (Feferman [11]). *Feferman* 的な T の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_\tau(x)$ について次が成立する：φ と ψ を $\mathcal{L}_A$-論理式とする．

1. $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \psi \urcorner))$.
2. φ が Σ_1 文ならば，$\mathsf{PA} \vdash \varphi \to \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

1 と 2 はそれぞれモダス・ポネンスおよび Σ_1-完全性の形式化である．

2.2 第 2 不完全性定理

証明可能性述語が満たす次の条件について考察する．

定義 2.4 (導出可能性条件).

D1: $T \vdash \varphi$ ならば $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

D2: $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$.

D3: $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.

$\boldsymbol{\Sigma_1}$C: φ が Σ_1 文ならば，$T \vdash \varphi \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

M: $T \vdash \varphi \to \psi$ ならば $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$.

条件 **D1** は T の全ての証明可能性述語が満たしている．条件 **D2** と **M** は Hilbert and Bernays [16] によって導入され，また **D3** と $\mathbf{\Sigma_1 C}$ はそれぞれ Löb [29] と Feferman [11] によって導入された．

定理 2.5 (Löb [29])**.** T の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が **D2** と **D3** を満たすとする．このとき，任意の $\mathcal{L}_A$-論理式 φ について，$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$ となる．特に $T \nvdash \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ である．

ここで，$\neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ は T の無矛盾性を表す文であると考えられるので，従って **D2** と **D3** の両方を満たす証明可能性述語に対して第 2 不完全性定理が成立する．更に **D2** と **D3** を満たす証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ に対して，Löb の定理の形式化 $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ が成立する（Macintyre and Simmons [30]）．

T を弱表現する論理式 $\tau(v)$ が Σ_1 なら，Feferman 的な証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_\tau(x)$ も Σ_1 であることが示せる．定理 2.3 より $\mathrm{Pr}_\tau(x)$ は $\mathbf{\Sigma_1 C}$ を満たすので，この場合 **D3** も満たすことが分かる．したがって定理 2.5 より次の系が得られる．

系 2.6 (Feferman [11])**.** 理論 T を弱表現する Σ_1 論理式 $\tau(v)$ について，次が成立する：

1. $T \nvdash \neg \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.
2. $T \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

つまり，$\tau(v)$ が Σ_1 のとき，$\mathrm{Pr}_\tau(x)$ に対して第 2 不完全性定理が成立する．一方，$\tau(v)$ が Σ_1 ではないときには，$\mathrm{Pr}_\tau(x)$ に対して第 2 不完全性定理が成立しない場合がある．

定理 2.7 (Feferman [11])**.** T を弱表現する Π_1 論理式 $\pi(v)$ があって，$T \vdash \neg \mathrm{Pr}_\pi(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.

実際，$\mathrm{Pr}_\pi(x)$ は定理 2.3 より **D2** と $\mathbf{\Sigma_1 C}$ を満たすが，Σ_2 論理式であり **D3** を満たさないため定理 2.5 が適用できないのである．定理 2.6 はつまり第 2 不完全性定理が全ての証明可能性述語に対して成立するわけではないことを示している．Feferman による $\mathrm{Pr}_\pi(x)$ は Σ_1 ではないが，第 2 不完全性定理の成立しない（Feferman 的ではない）Σ_1 証明可能性述語も存在する．いま $\mathrm{Prov}_T(x)$ を例えば Gödel によって自然に作られた T の Σ_1 証明可能性述語としておく．

定義 2.8 (Rosser の証明可能性述語)**.** "y は T における x の証明" を表す $\Delta_1(\mathsf{PA})$ 論理式 $\mathrm{Prf}_T(x, y)$ で $\mathsf{PA} \vdash \forall x \bigl(\mathrm{Prov}_T(x) \leftrightarrow \exists y \mathrm{Prf}_T(x, y)\bigr)$ となるものを用意し，

$$\exists y \bigl(\mathrm{Prf}_T(x, y) \land \forall z < y \, \neg \mathrm{Prf}_T(\neg x, z)\bigr)$$

を T の **Rosser の証明可能性述語**といい，$\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ で表す．

論理式 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ は T の Σ_1 証明可能性述語であり，更に任意の $\mathcal{L}_A$-論理式 φ について，$T \vdash \neg \varphi$ ならば $\mathsf{PA} \vdash \neg \mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となる．特に $T \vdash \neg 0 = 1$ なので，次が分かる．

命題 2.9 (Kreisel の注意 (Kreisel [20] を参照))**.** $\mathsf{PA} \vdash \neg \mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.

したがって $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ に対して第 2 不完全性定理が成立しないので，定理 2.5 より $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ は導出可能性条件 **D2** と **D3** の少なくとも一方を満たさない．では，$\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ は **D2** または **D3** を満たすかどうかという問いが考えられるが（Kreisel and Takeuti [21]），それは $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ の選び方に依存することが分かっている．まずは，Guaspari and Solovay [14] や Shavrukov [36] による Rosser の証明可能性述語に関連する様相論理について反例クリプキモデルを作ることで，**D2** も **D3** も満たさない Rosser の証明可能性述語の存在が示せる．他方，次の結果が成立する．

定理 2.10 (Bernardi and Montagna [7]; Arai [1])**.** **D2** を満たす *Rosser* の証明可能性述語が存在する．

定理 2.11 (Arai [1])**.** **D3** を満たす *Rosser* の証明可能性述語が存在する．

特に **D2** や **D3** を満たす Rosser の証明可能性述語の存在は次の意味で非常に重要である．

系 2.12. 証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が Σ_1 であっても **D2** か **D3** だけでは $T \nvdash \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ は一般には導けない．

このように，いくつかの条件を満たす Rosser の証明可能性述語の存在を示せば，それらの条件だけでは第 2 不完全性定理が導けないことが示せるのである．証明可能性述語が **D2** を満たせば単調性条件 **M** を満たすが，この条件 **M** について，定理 2.11 を次のように強化できる．

定理 2.13 (Kurahashi [26])**.** **M** と **D3** を共に満たす *Rosser* の証明可能性述語が存在する．したがって **M** と **D3** では $T \nvdash \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ は一般には導けない．

一方，**M** と **D3** については，次の定理が成立する．

定理 2.14 (Kurahashi [26])**.** 証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が **M** と **D3** を満たすなら，ある $\mathcal{L}_A$-文 φ が存在して $T \nvdash \neg\big(\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \land \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg\varphi \urcorner)\big)$ となる．

ここで，$\neg\big(\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \land \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg\varphi \urcorner)\big)$ もまたある意味で T の無矛盾性を表していると考えれば，定理 2.14 も第 2 不完全性定理の一種である．ここで無矛盾性の異なる表現方法について少し考察する．まず，理論 T が無矛盾であることの定義として

1. $T \nvdash 0 = 1$
2. 全ての $\mathcal{L}_A$-論理式 φ について,「$T \vdash \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$」となることはない

のどちらを採用しても同値であることは論理学における初歩的な事実である．そしてそれぞれの主張の $\mathcal{L}_A$-論理式を用いた形式化は次の通りである[2]：

1. $\mathrm{Con}_T :\equiv \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$
2. $\mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T := \{\neg\big(\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \land \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg\varphi \urcorner)\big) \mid \varphi$ は $\mathcal{L}_A$-論理式 $\}$

証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が **D2** を満たせば，T 上で Con_T と $\mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T$ が同値となる．他方，**D2** のない状況においては，定理 2.13 と 2.14 から，次が分かる．

系 2.15. $T \vdash \mathrm{Con}_T$ かつ $T \nvdash \mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T$ となる Σ_1 証明可能性述語が存在する．

したがって，第 2 不完全性定理は無矛盾性のどの表現を採用するのかに応じて成立，不成立が変化する．このこと自体は次の結果からも分かる．

定理 2.16 (Jeroslow [18])**.** Σ_1 証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が $\mathbf{\Sigma_1 C}$ を満たせば，$T \nvdash \mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T$ である．

定理 2.17 (Mostowski [33])**.** $\mathbf{\Sigma_1 C}$ を満たし，$T \vdash \mathrm{Con}_T$ となるような Σ_1 証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が存在する．

---

[2] $\mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T$ の代わりに $\forall x\big(\mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_A}(x) \to \neg\big(\mathrm{Pr}_T(x) \land \mathrm{Pr}_T(\neg x)\big)\big)$ とすれば，これは Hilbert and Bernays の採用していたものである．ちなみに Gödel は $\exists x\big(\mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_A}(x) \land \neg\mathrm{Pr}_T(x)\big)$ を採用していた．これらに関する詳しい分析は [24] で行っている．

図 1 は Σ_1 証明可能性述語に関する導出可能性条件と第 2 不完全性定理の状況をまとめたものである．この図に関して，定理 2.13 と 2.17 より，$\{\mathbf{M}, \mathbf{D3}\}$ や $\{\mathbf{\Sigma_1 C}\}$ からは $T \nvdash \mathrm{Con}_T$ には矢印が出せないことが分かる．また，$\{\mathbf{M}, \mathbf{\Sigma_1 C}\}$ からは $\{\mathbf{D2}, \mathbf{D3}\}$ に矢印が出せないことも分かっている．

定理 2.18 (Kurahashi [24]). **M** と $\mathbf{\Sigma_1 C}$ を満たすが **D2** を満たさないような PA の Σ_1 証明可能性述語が存在する．

この結果を強められるかどうかという次の問題は，第 2 不完全性定理を理解するうえで重要であると筆者は考えている．

問題 2.19. **M** と $\mathbf{\Sigma_1 C}$ を共に満たし，$T \vdash \mathrm{Con}_T$ となるような Σ_1 証明可能性述語は存在するか？

$$\begin{tikzcd}
\{\mathbf{D2}, \mathbf{\Sigma_1 C}\} \arrow[dd, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
& \{\mathbf{M}, \mathbf{\Sigma_1 C}\} \arrow[dd, Rightarrow] \arrow[ddr, Rightarrow] & \\
\{\mathbf{D2}, \mathbf{D3}\} \arrow[dd, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
& \{\mathbf{M}, \mathbf{D3}\} \arrow[dr, Rightarrow] & \{\mathbf{\Sigma_1 C}\} \arrow[d, Rightarrow] \\
T \nvdash \mathrm{Con}_T \arrow[rr, Rightarrow] & & T \nvdash \mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T
\end{tikzcd}$$

図 1: Σ_1 証明可能性述語に対する導出可能性条件と第 2 不完全性定理

3 証明可能性述語と正規様相論理

3.1 証明可能性論理

系 2.6 は，理論 T を弱表現する Σ_1 論理式 $\tau(v)$ に対して，$\mathrm{Pr}_\tau(x)$ は **D2** と **D3** を満たすため Löb の定理を適用でき，すなわち $T \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となることを述べている．ではこの他にも，$\mathrm{Pr}_\tau(x)$ に対して成立する，Löb の定理とは本質的に異なる原理はあるだろうか．実は，答えは「ない」であり，その事実は様相論理を用いて示すことができる．

実際，証明可能性述語は様相論理における様相演算子として非常によい振る舞いをする．例えば「$T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$」という性質は様相論理における規則であるネセシテーション $\dfrac{A}{\Box A}$ に対応する．また，条件 **D2**, **D3** および Löb の定理はそれぞれ様相論理における次の公理 K，4 および GL に対応する：

K: $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

4: $\Box A \to \Box\Box A$

GL: $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$

ここで，様相論理の言語は命題論理の言語に様相演算子 $\Box$ を加えたものである．$\Diamond A$ を $\neg\Box\neg A$ の略記とする．上述の対応を正確に記述するために，様相論理式の算術的解釈を導入する．

定義 3.1 (算術的解釈)**.** 様相論理式から算術の文への写像 f が証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ に基づく**算術的解釈**であるとは，次の条件を満たすことをいう：

- $f(\bot)$ は $0=1$,
- $f(\neg A)$ は $\neg f(A)$,
- $f(A \circ B)$ は $f(A) \circ f(B)$（ただし $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$），
- $f(\Box A)$ は $\mathrm{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner)$.

例えば，$\mathrm{Pr}_T(x)$ に対して **D3** が成立するとは，任意の様相論理式 A と $\mathrm{Pr}_T(x)$ に基づく任意の算術的解釈 f について $T \vdash f(\Box A \to \Box\Box A)$ が成立することである．このように，任意の算術的解釈のもとで T において証明できるような様相論理式に興味がある．

定義 3.2 (証明可能性論理)**.** 理論 T の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ に基づく任意の算術的解釈 f について $T \vdash f(A)$ となるような様相論理式 A 全体の集合 $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ を $\mathrm{Pr}_T(x)$ の**証明可能性論理**という．

では，$\mathrm{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理 $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ はどのような様相論理だろうか．ここで，よく知られた様相論理 K とその拡大論理を導入する．

定義 3.3 (様相論理 K の公理と推論規則)**.** 様相論理 K は次の公理と推論規則で公理化される：

公理 恒真式と $\mathrm{K} : \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.

規則 モダス・ポネンス $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ とネセシテーション $\dfrac{A}{\Box A}$.

様相論理では公理系とその定理全体の集合がしばしば同一視される．論理 K にいろいろな公理を加えることで様々な様相論理が得られる．

定義 3.4 (様々な様相論理)**.**

- $\mathsf{KD} = \mathsf{K} + \neg\Box\bot$
- $\mathsf{KT} = \mathsf{K} + (\Box A \to A)$
- $\mathsf{K4} = \mathsf{K} + (\Box A \to \Box\Box A)$
- $\mathsf{K5} = \mathsf{K} + (\Diamond A \to \Box\Diamond A)$
- $\mathsf{KB} = \mathsf{K} + (A \to \Box\Diamond A)$
- $\mathsf{GL} = \mathsf{K} + (\Box(\Box A \to A) \to \Box A)$

証明可能性述語の様相論理である証明可能性論理について筆者が興味を持っているのは，大きく分けて次の二つの問いである．

問題 A. 各証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理はどのような論理か？

問題 B. どの様相論理 L に対して $L = \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ となる証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ がとれるか？

更に問題 A を，特に決まった形をした Feferman 的な証明可能性述語に関する問題 A1 と，それら以外の証明可能性述語に関する問題 A2 に分けて考えることにする．

問題 A1. Feferman 的な $\mathrm{Pr}_\tau(x)$ の証明可能性論理はどのような論理があり得るか？

問題 A2. Feferman 的ではない各証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理はどのような論理か？

3.2 Feferman 的な証明可能性述語

まずは問題 A1 について考える．Feferman 的な証明可能性述語は理論を弱表現する論理式の選択以外の部分は自然に作られており，**D2** や $\mathbf{\Sigma_1 C}$ などの性質を満たす．特に **D2** を満たすことから，任意の $\tau(v)$ について $\mathsf{K} \subseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_\tau)$，すなわち $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_\tau)$ は正規様相論理[3]であることが分かる．

様相論理 GL は，導出可能性条件や Löb の定理に対応する公理や規則を持つため，次は容易に分かる．

命題 3.5 (算術的健全性)**.** 理論 T を弱表現する Σ_1 論理式 $\tau(v)$ と様相論理式 A について，$\mathsf{GL} \vdash A$ ならば，$\mathrm{Pr}_\tau(x)$ に基づく任意の算術的解釈 f について，$T \vdash f(A)$ となる．すなわち，$\mathsf{GL} \subseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_\tau)$ である．

T が Σ_1-健全，すなわち証明できる Σ_1 文が全て算術の標準モデル $\mathbb{N}$ において正しい場合に，逆もまた成立すること，すなわち，$\mathrm{Pr}_\tau(x)$ に関して T において証明できる原理が GL で尽くされることが分かっている．

定理 3.6 (算術的完全性定理 (Solovay [39]))**.** 理論 T が Σ_1-健全で，$\tau(v)$ が T を弱表現する Σ_1 論理式ならば，$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_\tau) = \mathsf{GL}$ である．

Solovay の定理の主張では理論の Σ_1-健全性が仮定されている．実際，Σ_1-健全ではない理論には例えば $T \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ となる，すなわち $\Box\bot \in \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_\tau)$ となるようなものがあり，この場合は $\mathsf{GL} \subsetneq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_\tau)$ となるため，GL 以外の論理を証明可能性論理としてもつ場合がある．いま $\Box^n$ を $\overbrace{\Box \cdots \Box}^{n\text{ 個}}$ の略記とする．

定理 3.7 (Visser [40])**.** 理論 T が Σ_1-健全ではないとし，$\tau(v)$ は T を弱表現する Σ_1 論理式とする．このとき，$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_\tau)$ は GL か，ある $n \geq 1$ について $\mathsf{GL} + \Box^n\bot$ のいずれかである．

定理 3.8 (Beklemishev [3])**.** 理論 T を Σ_1-健全ではないとすると，各 $L \in \{\mathsf{GL}\} \cup \{\mathsf{GL} + \Box^n\bot \mid n \geq 1\}$ について，$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_\tau) = L$ となるような，T を弱表現する Σ_1 論理式 $\tau(v)$ が存在する．

これらの定理によって，Σ_1 論理式に基づく Feferman 的な証明可能性述語の状況が把握できた．続いて Σ_1 ではない論理式に基づく Feferman 的な証明可能性述語について考える．ここで各理論 T と $n \geq 1$ に対して，

$$\mathcal{PL}_n(T) := \{\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_\tau) \mid \tau(v) \text{ は } T \text{ を弱表現する } \Sigma_n \text{ 論理式}\}$$

と定めておく．定理 3.6, 3.7, および 3.8 をまとめると，

- T が Σ_1-健全ならば $\mathcal{PL}_1(T) = \{\mathsf{GL}\}$,
- T が Σ_1-健全でなければ $\mathcal{PL}_1(T) = \{\mathsf{GL}\} \cup \{\mathsf{GL} + \Box^n\bot \mid n \geq 1\}$,

である．まず Σ_1 ではない論理式に基づく Feferman 的な証明可能性述語に関する結果である，Feferman の定理 2.7 を言い換えると次が得られる．

系 3.9. T を弱表現する Σ_1 論理式 $\pi(v)$ があって，$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_\pi) \supseteq \mathsf{KD}$ となる．

[3] 様相論理 L が**正規**であるとは，$\mathsf{K} \subseteq L$ かつ L がモダス・ポネンスとネセシテーションと一様代入則で閉じていることをいう．任意の証明可能性論理 $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ はこれらの規則で閉じているため，$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ が正規であることは $\mathsf{K} \subseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ であることと同値である．

特に KD は GL と矛盾するので，$\mathcal{PL}_2(T)$ は GL とは本質的に異なる論理を含んでいる．Feferman の論理式 $\mathrm{Pr}_\pi(x)$ の証明可能性論理 $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_\pi)$ の公理化は Montagna [31] と Visser [41] によって研究されているが，まだ得られていない．

問題 3.10. Feferman の $\mathrm{Pr}_\pi(x)$ について，$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_\pi)$ を公理化せよ．

更に例えば次の問題も分かっていない．

問題 3.11. $\mathsf{KD} \in \mathcal{PL}_2(T)$ か？

$\mathcal{PL}_2(T)$ については，いくつかのことが分かっている．

定理 3.12 (Kurahashi [22])**.** $\mathsf{K} \in \mathcal{PL}_2(T)$ である．このことから，

$$\mathsf{K} = \bigcap \{\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_\tau) \mid \tau(v) \text{ は } T \text{ を弱表現する論理式}\}$$

が分かる．

Solovay の定理により GL が算術と強い結びつきを持つことが分かったが，更に算術における不動点定理が GL においてある形で成立することが知られている（Boolos [8] を参照）．Sacchetti [35] は GL よりも真に弱い論理

$$\mathsf{wGL}_n = \mathsf{K} + (\Box(\Box^n A \to A) \to \Box A) \qquad (n \geq 2)$$

を導入し，これらの論理に対しても不動点定理が成立することを証明した．そして，これらの各論理を証明可能性論理として持つような，Feferman 的な証明可能性述語が存在する．

定理 3.13 (Kurahashi [23])**.** 各 $n \geq 2$ について，$\mathsf{wGL}_n \in \mathcal{PL}_2(T)$ である．

つまり，$\mathcal{PL}_2(T)$ は $\mathcal{PL}_1(T)$ には属さない無限個の論理を含んでいる．こうした状況が一般化できるかどうかを次のように問うのは自然であろう．

問題 3.14. 各 $n \geq 2$ について，$\mathcal{PL}_n(T) \subsetneq \mathcal{PL}_{n+1}(T)$ か？

T を弱表現する Σ_1 論理式に基づく Feferman 的な証明可能性述語の間の相互関係の分析も行われている．様相論理の言語に新しい様相記号 $\triangle$ を加えた言語における二重様相論理 CS は GL に，$\triangle$ に関する GL の公理と推論規則を追加し，更に公理 $\Box A \to \triangle\Box A$ と $\triangle A \to \Box\triangle A$ を追加することで得られる．論理 CS に公理 $\Box A \to \triangle A$ を追加することで得られる論理を CSM という．更に CSM に公理 $\triangle A \to \Box(\triangle\bot \vee A)$ を加えて得られる論理を CDC という．Feferman 的な証明可能性述語の組 $(\mathrm{Pr}_{\tau_0}, \mathrm{Pr}_{\tau_1})$ について，$\Box$ と $\triangle$ をそれぞれ $\mathrm{Pr}_{\tau_0}(x)$ と $\mathrm{Pr}_{\tau_1}(x)$ を用いて解釈するような算術的解釈を，$(\mathrm{Pr}_{\tau_0}, \mathrm{Pr}_{\tau_1})$ に基づく算術的解釈という．また，$(\mathrm{Pr}_{\tau_0}, \mathrm{Pr}_{\tau_1})$ に基づく任意の算術的解釈 f に対して $T \vdash f(A)$ となるような，拡張した言語の様相論理式 A 全体の集合を $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_{\tau_0}, \mathrm{Pr}_{\tau_1})$ と書くことにする．このとき，次は容易に確認できる．

命題 3.15. T を弱表現する Σ_1 論理式 $\tau_0(v)$ と $\tau_1(v)$ について，$\mathsf{CS} \subseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_{\tau_0}, \mathrm{Pr}_{\tau_1})$ である．

しかし，$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_{\tau_0}, \mathrm{Pr}_{\tau_1})$ がどのような論理になるかは組 $(\mathrm{Pr}_{\tau_0}, \mathrm{Pr}_{\tau_1})$ の選択に依存する．

定理 3.16 (Beklemishev [4])**.** 理論 T は Σ_1-健全とする．

1. T を弱表現する Σ_1 論理式 $\tau_0(v)$ と $\tau_1(v)$ が存在して，$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_{\tau_0}, \mathrm{Pr}_{\tau_1}) = \mathsf{CS}$ となる．

2. $L \in \{\mathsf{CSM}, \mathsf{CDC}\}$ とすると，T を弱表現する任意の Σ_1 論理式 $\tau_0(v)$ に対して，T を弱表現する Σ_1 論理式 $\tau_1(v)$ が存在して，$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_{\tau_0}, \mathrm{Pr}_{\tau_1}) = L$ となる．

次の問題が残されている．

問題 3.17. T を Σ_1-健全な理論とする．

1. T を弱表現する任意の Σ_1 論理式 $\tau_0(v)$ に対して，T を弱表現する Σ_1 論理式 $\tau_1(v)$ が存在して，$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_{\tau_0}, \mathrm{Pr}_{\tau_1}) = \mathsf{CS}$ となるか？

2. T を弱表現する Σ_1 論理式 $\tau_0(v)$ と $\tau_1(v)$ に対して，$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_{\tau_0}, \mathrm{Pr}_{\tau_1})$ はどのような論理となり得るか？

更に，$\tau_1(v)$ が T より強い理論 U を弱表現する場合の研究も行われており，例えば次の Carlson の定理は U が T の健全性を証明できる程度に強い場合に関するものである．

定理 3.18 (Carlson [9])**.** 理論 T とその健全な拡大理論 U をそれぞれ弱表現する Σ_1 論理式 $\tau_0(v)$ と $\tau_1(v)$ について，$T \vdash \forall v(\tau_0(v) \to \tau_1(v))$ および全ての $\mathcal{L}_A$-文 φ に対して $U \vdash \mathrm{Pr}_{\tau_0}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$ が成り立つとする．このとき，$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_{\tau_0}, \mathrm{Pr}_{\tau_1}) = \mathsf{CSM} + \triangle(\Box A \to A)$ となる．

さまざまな拡大理論 U に対して，論理 $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_{\tau_0}, \mathrm{Pr}_{\tau_1})$ の公理化に関する研究が Beklemishev [5, 6] によって大きく進められたが，全容解明には至っていない．

3.3 Feferman 的でない証明可能性述語

続いて問題 A2 について考える．ここでは特に証明可能性の定式化の違いによって得られる証明可能性述語の例として，Rosser の証明可能性述語，Parikh の証明可能性述語，Shavrukov の証明可能性述語の 3 種類について，それぞれの様相論理的な振る舞いに関する研究を紹介する．

Rosser の証明可能性述語は，その選び方によって **D2** や **D3** の成立状況が変化することは既に述べた．したがって，ここでは Rosser の証明可能性述語を一つ固定して分析するのではなく，それら全てに対して成立する原理を二重様相論理を用いて分析する研究を紹介する．

定義 3.19 (様相論理 GR の公理と推論規則)**.** 二重様相論理 GR は次の公理と推論規則で公理化される：

公理
- $\Box$ に対する GL の公理,
- $\triangle A \to \Box A$,
- $\Box A \to \Box \triangle A$,
- $\Box A \to (\Box \bot \vee \triangle A)$,
- $\Box \neg A \to \Box \neg \triangle A$.

規則 モダス・ポネンスとネセシテーション $\dfrac{A}{\Box A}$ と規則 $\dfrac{\Box A}{A}$.

命題 3.20. 任意の *Rosser* の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ について，$\mathsf{GR} \subseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Prov}_T, \mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T)$ である．

定理 3.21 (Shavrukov [36])**.** T が Σ_1-健全ならば，$\mathsf{PL}(\mathrm{Prov}_T, \mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T) = \mathsf{GR}$ となる *Rosser* の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ が存在する．このことから

$$\mathsf{GR} = \bigcap \{\mathsf{PL}(\mathrm{Prov}_T, \mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T) \mid \mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x) \text{ は } \textit{Rosser} \text{ の証明可能性述語}\}$$

が分かる．

ただし Shavrukov は論理 $\bigcap\{\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}) \mid \mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ は Rosser の証明可能性述語 $\}$ の公理化を行っていない．この話題は次節において取り扱う．

続いて，加速現象の分析のために Parikh [34] によって導入された規則に基づく，Parikh の証明可能性述語について紹介する．$\mathcal{L}_A$-文 φ が理論 T において **Parikh 証明可能**であるとは，φ が T において更に規則 $\dfrac{\mathrm{Prov}_T(\ulcorner\psi\urcorner)}{\psi}$ を加えて証明可能であることをいう．実際，T が Σ_1-健全ならばこの規則は T において許容可能であり，すなわち実際の証明可能性と Parikh 証明可能性は一致する．更に，T における Parikh 証明可能性の形式化である $\mathrm{Prov}_T^{\mathrm{Pa}}(x)$ は T の Σ_1 証明可能性述語となる．ただし T の Σ_1-健全性は T において証明できないので，$\mathrm{Prov}_T(x)$ と $\mathrm{Prov}_T^{\mathrm{Pa}}(x)$ は T 上で同値ではない．では，$\mathrm{Prov}_T(x)$ と $\mathrm{Prov}_T^{\mathrm{Pa}}(x)$ の相互関係はどうなっているのだろうか．ここで $\mathsf{GLT} = \mathsf{CSM} + (\triangle A \leftrightarrow \triangle\Box A)$ とする．

定理 3.22 (Lindsröm [28])**.** T が Σ_1-健全ならば，$\mathsf{PL}(\mathrm{Prov}_T, \mathrm{Prov}_T^{\mathrm{Pa}}) = \mathsf{GLT}$ である．

この定理の系として次が得られる．

系 3.23 (Lindsröm [28])**.** T が Σ_1-健全ならば，$\mathsf{PL}(\mathrm{Prov}_T^{\mathrm{Pa}}) = \mathsf{GL}$ である．

したがって，Feferman 的な証明可能性述語以外にも，証明可能性論理が GL となる証明可能性述語があることが分かる．そのような証明可能性述語については，それ単体の様相演算子としての振る舞いを分析するだけではその固有の性質に関する情報を得ることができない．$\mathrm{Prov}_T^{\mathrm{Pa}}(x)$ の他にも，通常とは異なる証明可能性の概念に基づく証明可能性述語で，対応する二重様相論理が GLT であるようなものが見出されている（Henk and Pakhomov [15] を参照）．

最後は Shavrukov による証明可能性述語を紹介する．Σ_2 論理式 $\mathrm{Prov}_{\mathsf{PA}}^{\mathrm{Sh}}(x)$ を，

$$\exists y\big(\mathrm{Prov}_{\mathbf{I\Sigma}_y}(x) \land \neg\mathrm{Prov}_{\mathbf{I\Sigma}_y}(\ulcorner 0 = 1\urcorner)\big)$$

とする．ここで $\mathbf{I\Sigma}_n$ とは PA の帰納法公理を Σ_n 論理式に関するものに制限することによって得られる PA の部分理論であり，$\mathrm{Prov}_{\mathsf{PA}}^{\mathrm{Sh}}(x)$ は無矛盾だと分かっている $\mathbf{I\Sigma}_y$ において x が証明できることを述べている．実はこの論理式は Feferman の $\mathrm{Pr}_\pi(x)$ の作り方を $\mathbf{I\Sigma}_n$ の階層に応用したものである．

任意の自然数 n について $\mathsf{PA} \vdash \neg\mathrm{Prov}_{\mathrm{I\Sigma}_n}(\ulcorner 0 = 1\urcorner)$ なので，$\mathrm{Prov}_{\mathsf{PA}}^{\mathrm{Sh}}(x)$ は PA の証明可能性述語である．更に $\mathsf{PA} \vdash \neg\mathrm{Prov}_{\mathsf{PA}}^{\mathrm{Sh}}(\ulcorner 0 = 1\urcorner)$ であり，つまり $\mathsf{KD} \subseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Prov}_{\mathsf{PA}}^{\mathrm{Sh}})$ である．さて，ここでも通常の PA の Σ_1 証明可能性述語 $\mathrm{Prov}_{\mathsf{PA}}(x)$ と Shavrukov の証明可能性述語 $\mathrm{Prov}_{\mathsf{PA}}^{\mathrm{Sh}}(x)$ の二重様相論理のために，次の論理 GF を導入する．

定義 3.24 (様相論理 GF の公理と推論規則)**.** 二重様相論理 GF は次の公理と推論規則で公理化される：

公理
- $\Box$ に対する GL の公理,
- $\triangle$ に対する KD の公理,
- $\Box A \to \Box\triangle A$,
- $\Box A \to \triangle\Box A$,
- $\Box A \leftrightarrow (\Box\bot \lor \triangle A)$,
- $\triangle A \to \triangle\big((\triangle B \to B) \lor \triangle A\big)$.

規則 モダス・ポネンスとネセシテーション $\dfrac{A}{\Box A}$ と $\dfrac{A}{\triangle A}$.

このとき，次が成り立つ．

定理 3.25 (Shavrukov [37])**.** $\mathsf{PL}(\mathrm{Prov}_{\mathsf{PA}}, \mathrm{Prov}_{\mathsf{PA}}^{\mathrm{Sh}}) = \mathsf{GF}$ である．

系として，$\mathsf{PL}(\mathrm{Prov}_{\mathsf{PA}}^{\mathrm{Sh}})$ の証明可能性論理の公理化も次のように得られる．

系 3.26 (Shavrukov [37])**.** $\mathsf{PL}(\mathrm{Prov}_{\mathsf{PA}}^{\mathrm{Sh}}) = \mathsf{KD} + (\Box A \to \Box\big((\Box B \to B) \vee \Box A\big))$ である．

$\mathsf{KD} + (\Box A \to \Box\big((\Box B \to B) \vee \Box A\big))$ のような，様相論理の文脈ではおそらく考察されなかったであろう論理が登場するのは興味深い．しかしこのことから，問題 B の解明が難しいであろうことも推察される．

3.4　証明可能性論理になる様相論理

本節の最後に問題 B について考える．定理 3.12 は $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_\tau) = \mathsf{K}$ となる Feferman 的な Σ_2 証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_\tau(x)$ の存在を述べているが，同様のことが Σ_1 証明可能性述語についても成立する．

定理 3.27 (Kurahashi [27])**.** $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T) = \mathsf{K}$ となる Σ_1 証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ がある．

一方，同様のことが Sacchetti の論理 wGL_n に対して成立するかは分かっていない（定理 3.13 を参照）．

問題 3.28. 各 $n \geq 2$ について，$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T) = \mathbf{wGL}_n$ となる Σ_1 証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ は存在するか？

定理 2.10 において，**D2** を満たす Rosser の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ の存在が示されているが，$\mathsf{PA} \vdash \neg\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ なので，このとき $\mathsf{KD} \subseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ が成り立つ．定理 2.10 はこの意味で，次のように拡張できる．

定理 3.29 (Kurahashi [25])**.** $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}) = \mathsf{KD}$ となる *Rosser* の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ が存在する．

証明可能性論理が KD を真に含むような Rosser の証明可能性述語も存在することが分かっている．

定理 3.30 (Kurahashi [25])**.** $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}) \supseteq \mathsf{KD} + (\Box A \to \Box\Diamond A)$ となる *Rosser* の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ が存在する．

問題 3.31.

1. Rosser の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ に対して，$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}})$ はどのような論理となり得るか？
2. $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}) = \mathsf{KD} + (\Box A \to \Box\Diamond A)$ となる Rosser の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ は存在するか？

D2 を満たさない Rosser の証明可能性述語の証明可能性論理については次節において取り扱う．

$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T) = L$ となる証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ がとれない様相論理 L がいくつか分かっている．まず，$\mathsf{K4} \subseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ とすると，$\mathrm{Pr}_T(x)$ は **D2** と **D3** を満たすため，Löb の定理より $\mathsf{GL} \subseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ であり $\mathsf{K4} \neq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ となる．つまり $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T) = \mathsf{K4}$ となる証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ は存在しない．

更に Montague [32] によって $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T) \not\supseteq \mathsf{KT}$ となる証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が存在しないことも示されている．これは $\mathsf{KT} \subseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ とすると，$\mathrm{Pr}_T(x)$ の Gödel 文 ξ について $T \vdash \xi$ となるためである．

これらのような状況が発生する理由は，算術には不動点定理があるために様相論理だけではできないことができてしまうことにある．更に不動点定理を用いることで，次も分かる．

定理 3.32 (Kurahashi [23])**.** $T \nvdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ となる任意の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ について，$\mathsf{KB} \cap \mathsf{K5} \nsubseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ である[4]．

定理 3.30 における論理 $\mathsf{KD} + (\Box A \to \Box\Diamond A)$ が論理 $\mathsf{KD4} \cap \mathsf{KD5} \cap \mathsf{KT}$ に含まれることは容易に確認できる．他方，Montagna の結果の拡張である次が成立する．

定理 3.33 (Kurahashi [25])**.** 任意の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ について，$\mathsf{KD4} \cap \mathsf{KD5} \cap \mathsf{KT} \nsubseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ である．

4 証明可能性述語と非正規様相論理

前節までにおいて取り扱ってきた証明可能性述語は Rosser によるものを除きいずれも **D2** を満たすものばかりであった．条件 **D2** は導出可能性条件の一つであり，その観点では特別な条件というわけではない．しかし，様相論理的な観点では **D2** を満たす証明可能性述語に対応する証明可能性論理は正規様相論理になるという特別な性質を持っていた．つまり，条件 **D2** を満たさないような証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ を様相論理を用いて分析する際には，$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ が正規様相論理ではない，つまり，$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ を分析するためにクリプキ意味論を用いることができないという問題点がある．Solovay の定理の証明は，対応するクリプキモデルを算術に埋め込むというものであり，正規様相論理ではない $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ に対しては Solovay による証明法をそのまま使用できない．しかし，クリプキ意味論に類似した関係意味論を持つような非正規様相論理もあり，それらに対して Solovay の手法を拡張することで証明可能性論理を分析するという，筆者らによる次の 2 つの研究を紹介する：

1. 全ての証明可能性述語の様相論理 N
2. 単調性条件 **M** を満たす証明可能性述語の様相論理 MN

4.1 全ての証明可能性述語の様相論理

古典論理にネセシテーションのみを加えることで得られる論理 N が Fitting, Marek, and Truszczyński [12] によって導入されている．

定義 4.1 (様相論理 N の公理と推論規則)**.** 様相論理 N は次の公理と推論規則で公理化される：

公理 恒真式のみ．

規則 モダス・ポネンス $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ とネセシテーション $\dfrac{A}{\Box A}$．

[4] [23] において実際に証明しているのは $\mathsf{KB} \nsubseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ かつ $\mathsf{K5} \nsubseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ という主張だが，定理 3.33 の証明と同様の方法で，ここで述べた形に強めることができる．

全ての証明可能性述語に共通の性質としては「$T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$」というものがあり，これは様相論理におけるネセシテーションに対応する．すなわち，次の命題が成立する．

命題 4.2. 全ての証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ について，$\mathsf{N} \subseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ である．

では，全ての証明可能性論理の共通部分は N に一致するだろうか．MF を様相論理式全体の集合とすれば，論理 N は次の関係意味論を持つ．

定義 4.3 (N-モデル)**.** $(W, \{\prec_A\}_{A \in \mathsf{MF}}, \Vdash)$ が N-モデルであるとは，次を満たすことをいう：

- W は空でない集合.
- 各 $A \in \mathsf{MF}$ に対して，$\prec_A$ は W 上の二項関係.
- $\Vdash$ は各 $w \in W$ における充足関係で，特に

$$w \Vdash \Box A :\Longleftrightarrow \forall x \in W (w \prec_A x \Rightarrow x \Vdash A).$$

定理 4.4 (Fitting, Marek, and Truszczyński [12])**.** N は N-モデル全体に対して健全かつ完全で，更に有限モデル性も持つ.

この結果を用いて，次を示すことができる．

定理 4.5 (Kurahashi [27])**.** $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T) = \mathsf{N}$ となる Σ_1 証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が存在する．このことから，

$$\mathsf{N} = \bigcap \{\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T) \mid \mathrm{Pr}_T(x) \text{ は } T \text{ の証明可能性述語}\}$$

が分かる．

更に N のいろいろな拡大論理を導入する．

定義 4.6 (N の拡大論理)**.**

- $\mathsf{N4} = \mathsf{N} + (\Box A \to \Box\Box A)$
- $\mathsf{NR} = \mathsf{N} + \dfrac{\neg A}{\neg \Box A}$
- $\mathsf{NR4} = \mathsf{NR} + (\Box A \to \Box\Box A)$

論理 N4, NR, NR4 はそれぞれ **D3** を満たすが **D2** を満たさない証明可能性述語，Rosser の証明可能性述語，**D3** を満たす Rosser の証明可能性述語に対応する．そして，それぞれの論理にちょうど対応する証明可能性述語が存在する．

定理 4.7 (Kurahashi [27])**.** $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T) = \mathsf{N4}$ となる Σ_1 証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が存在する．このことから，

$$\mathsf{N4} = \bigcap \{\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T) \mid \mathrm{Pr}_T(x) \text{ は } \mathbf{D3} \text{ を満たす証明可能性述語}\}$$

が分かる．

定理 4.8 (Kurahashi [27])**.** 各 $L \in \{\mathsf{N4}, \mathsf{NR4}\}$ に対して，$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}) = L$ となる *Rosser* の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ が存在する．このことから，次が分かる：

- $\mathsf{NR} = \bigcap \{\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}) \mid \mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x) \text{ は } \textit{Rosser} \text{ の証明可能性述語}\}$,
- $\mathsf{NR4} = \bigcap \{\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}) \mid \mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x) \text{ は } \mathbf{D3} \text{ を満たす } \textit{Rosser} \text{ の証明可能性述語}\}$.

特に論理 NR は Shavrukov の二重様相論理 GR の $\triangle$ 断片に対応する論理であることが分かる．また，NR4 に対応する結果は Arai の定理 2.11 の拡張である．

4.2　単調な証明可能性述語の様相論理

様相論理 N に単調性 $\dfrac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$ を規則として加えることで得られる論理 MN とその拡張論理について考える．

定義 4.9 (様相論理 MN の公理と推論規則)**.** 様相論理 MN は次の公理と推論規則で公理化される：

公理 恒真式のみ.

規則 モダス・ポネンス $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ と単調性 $\dfrac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$ とネセシテーション $\dfrac{A}{\Box A}$.

単調性規則 $\dfrac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$ は第 2 節において導入した単調性条件 $\mathbf{M}$ に対応し，次が容易に確認できる．

命題 4.10. 単調性条件 $\mathbf{M}$ を満たす全ての証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ について，MN $\subseteq$ PL(Pr_T) である．

様相論理 N の場合と同様に，単調性条件を満たす証明可能性述語の証明可能性論理全体の共通部分が MN に一致するかどうかが問題となる．単調性規則を持つ様相論理は次のような自然な関係意味論を持つ．

定義 4.11 (MN-モデル)**.** $(W, \prec, \Vdash)$ が MN-モデルであるとは，次を満たすことをいう：

- W は空でない集合.
- $\prec$ は W と $\mathcal{P}(W) \setminus \{\emptyset\}$ の間の二項関係で次を満たす：任意の $w \in W$ と $V, U \in \mathcal{P}(W)$ について，
$$w \prec V \ \& \ V \subseteq U \Rightarrow w \prec U.$$
- $\Vdash$ は各 $w \in W$ における充足関係で，特に
$$w \Vdash \Box A :\iff \forall V \in \mathcal{P}(W)\big(w \prec V \Rightarrow \exists y \in V(y \Vdash A)\big).$$

実はここで定めた MN モデルは MN を妥当とする近傍フレームを持つモデルと等価であり，そのことから次が分かる．

定理 4.12 (Chellas [10] を参照)**.** MN は MN-モデル全体に対して健全かつ完全で，更に有限モデル性も持つ．

この結果を用いて，次が成立する．

定理 4.13 (Kogure and Kurahashi [19])**.** PL$(\mathrm{Pr}_T) =$ MN となる，$\mathbf{M}$ を満たす Σ_1 証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が存在する．このことから，

$$\mathsf{MN} = \bigcap \{\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T) \mid \mathrm{Pr}_T(x) \text{ は } \mathbf{M} \text{ を満たす証明可能性述語}\}$$

が分かる．

論理 N の場合と同様に，MN にいろいろな公理を加えることで得られる拡大論理を考える．

定義 4.14 (MN の拡大論理)**.**

- MNP = MN + $\neg\Box\bot$
- MND = MN + $\neg(\Box A \wedge \Box\neg A)$

更に MN, MNP, MND に公理 $\Box A \to \Box\Box A$ を加えて得られる論理をそれぞれ MN4, MNP4, MND4 という.

条件 $\mathbf{D2}$ を満たさない証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ に対して，無矛盾性を表す Con_T と $\mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T$ は一般には同値ではなかった．非正規様相論理においてもそれぞれに対応する公理 $\mathrm{P} : \neg\Box\bot$ と $\mathrm{D} : \neg(\Box A \wedge \Box\neg A)$ は一般には同値ではなく，それぞれを MN に追加した論理を考えることで，これらを区別することができる.

N の拡大論理と同様に，これらの論理に対応する Σ_1 証明可能性述語を取ることができる.

定理 4.15 (Kogure and Kurahashi [19])**.** $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T) = \mathsf{MN4}$ となる，$\mathbf{M}$ を満たす Σ_1 証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が存在する．このことから，

$$\mathsf{MN4} = \bigcap\{\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T) \mid \mathrm{Pr}_T(x) \text{ は } \mathbf{M} \text{ と } \mathbf{D3} \text{ を満たす証明可能性述語}\}$$

が分かる.

定理 4.16 (Kogure and Kurahashi [19])**.** 各 $L \in \{\mathsf{MNP}, \mathsf{MNP4}, \mathsf{MND}\}$ に対して，$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T) = L$ となる，$\mathbf{M}$ を満たす *Rosser* の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ が存在する．このことから，次が成り立つ：

- $\mathsf{MNP} = \bigcap\{\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T) \mid \mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ は $\mathbf{M}$ を満たす *Rosser* の証明可能性述語 $\}$,
- $\mathsf{MNP4} = \bigcap\{\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T) \mid \mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ は $\mathbf{M}$ と $\mathbf{D3}$ を満たす *Rosser* の証明可能性述語 $\}$,
- $\mathsf{MND} = \bigcap\{\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T) \mid \mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ は $\mathbf{M}$ を満たし，その $\mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T$ が T で証明できる *Rosser* の証明可能性述語 $\}$.

特に MNP4 に対応する結果は定理 2.13 の拡張である.

定理 2.14 より $\mathrm{Pr}_T(x)$ が条件 $\mathbf{M}$ と $\mathbf{D3}$ を満たせば $T \nvdash \mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T$ であり，したがって定理 4.16 とは異なり次が成立する.

系 4.17. 証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が条件 $\mathbf{M}$ を満たせば，$\mathsf{MND4} \nsubseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ である.

他方，$\mathrm{Pr}_T(x)$ が $\mathbf{M}$ を満たすことは $\mathsf{MN} \subseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ であることの十分条件ではあるが必要条件ではないことを考えれば，次の問題が提起できる.

問題 4.18. $\mathsf{MND4} \subseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ となるような証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ は存在するか？

この問題は第 2 不完全性定理の一種である定理 2.14 の仮定をどこまで弱められるか，という問いであり，本研究におけるそもそもの問題意識からすると非常に興味深いように思われる.

今回考えてきた問題 A と B については研究の余地が大いに残されている．問題 B については，例えば近傍意味論などの関係意味論ではない意味論を持つ論理に対して分析を適用できるか，という問いが次に考えるべきものかもしれない．具体的には次の非正規様相論理 EN やその拡大論理がその例に相当する.

定義 4.19 (様相論理 EN の公理と推論規則)**.** 様相論理 EN は次の公理と推論規則で公理化される：

公理 恒真式のみ.

規則 モダス・ポネンス $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ と $\dfrac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$ とネセシテーション $\dfrac{A}{\Box A}$.

問題 4.20. $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T) = \mathsf{EN}$ となるような証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ は存在するか？

参考文献

[1] Toshiyasu Arai. Derivability conditions on Rosser's provability predicates. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 31(4):487–497, 1990.

[2] Sergei N. Artemov and Lev D. Beklemishev. Provability logic. In D. Gabbay and F. Guenthner, editors, *Handbook of Philosophical Logic*, volume 13, pages 189–360. Springer, Dordrecht, 2nd edition, 2005.

[3] Lev D. Beklemishev. On the classification of propositional provability logics. *Mathematics of the USSR. Izvestiya*, 35(2):247–275, 1990.

[4] Lev D. Beklemishev. Independent numerations of theories and recursive progressions. *Siberian Mathematical Journal*, 33(5):22–46, 1992.

[5] Lev D. Beklemishev. On bimodal logics of provability. *Annals of Pure and Applied Logic*, 68(2):115–159, 1994.

[6] Lev D. Beklemishev. Bimodal logics for extensions of arithmetical theories. *The Journal of Symbolic Logic*, 61(1):91–124, 1996.

[7] Claudio Bernardi and Franco Montagna. Equivalence relations induced by extensional formulae: classification by means of a new fixed point property. *Fundamenta Mathematicae*, 124:221–233, 1984.

[8] George Boolos. *The logic of provability.* Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[9] Tim Carlson. Modal logics with several operators and probability interpretations. *Israel Journal of Mathematics*, 54:14–24, 1986.

[10] Brian F. Chellas. Modal logic. An introduction. Cambridge etc.: Cambridge University Press. XII, 295 p., 1980.

[11] Solomon Feferman. Arithmetization of metamathematics in a general setting. *Fundamenta Mathematicae*, 49:35–92, 1960.

[12] Melvin C. Fitting, V. Wiktor Marek, and Mirosław Truszczyński. The pure logic of necessitation. *Journal of Logic and Computation*, 2(3):349–373, 1992.

[13] Kurt Gödel. On formally undecidable propositions of *Principia Mathematica* and related systems. I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38:173–198, 1931.

[14] David Guaspari and Robert M. Solovay. Rosser sentences. *Annals of Mathematical Logic*, 16:81–99, 1979.

[15] Paula Henk and Fedor N. Pakhomov. Slow and ordinary provability for Peano Arithmetic. 2016. arXiv:1602.01822.

[16] David Hilbert and Paul Bernays. *Grundlagen der Mathematik. Vol. II.* Springer, Berlin, 1939.

[17] Giorgi Japaridze and Dick de Jongh. The logic of provability. In *Handbook of proof theory*, pages 475–546. Amsterdam: Elsevier, 1998.

[18] Robert G. Jeroslow. Redundancies in the Hilbert-Bernays derivability conditions for Gödel's second incompleteness theorem. *The Journal of Symbolic Logic*, 38:359–367, 1973.

[19] Haruka Kogure and Taishi Kurahashi. Arithmetical completeness theorems for monotonic modal logics. 2022. arXiv:2208.03555. 投稿中.

[20] Georg Kreisel. Ordinal logics and the characterization of informal concepts of proof. Proc. Int. Congr. Math. 1958, 289-298 (1960)., 1960.

[21] Gerog Kreisel and Gaisi Takeuti. Formally self-referential propositions for cut free classical analysis and related systems. *Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne)*, 118, 1974.

[22] Taishi Kurahashi. Arithmetical completeness theorem for modal logic K. *Studia Logica*, 106(2):219–235, 2018.

[23] Taishi Kurahashi. Arithmetical soundness and completeness for Σ_2 numerations. *Studia Logica*, 106(6):1181–1196, 2018.

[24] Taishi Kurahashi. A note on derivability conditions. *The Journal of Symbolic Logic*, 85(3):1224–1253, 2020.

[25] Taishi Kurahashi. Rosser provability and normal modal logics. *Studia Logica*, 108(3):597–617, 2020.

[26] Taishi Kurahashi. Rosser provability and the second incompleteness theorem. In Kikuchi M. Kuroda S. Okada M. Yorioka T. Arai, T., editor, *Advances in Mathematical Logic. SAML 2018*, volume 369 of *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, pages 77–97. Springer, Singapore, 2021.

[27] Taishi Kurahashi. The provability logic of provability predicates. 2022. arXiv:2208.03553. 投稿中.

[28] Per Lindström. Provability logic – a short introduction. *Theoria*, 62(1-2):19–61, 1996.

[29] Martin Hugo Löb. Solution of a problem of Leon Henkin. *The Journal of Symbolic Logic*, 20:115–118, 1955.

[30] Angus J. Macintyre and H. Simmons. Gödel's diagonalization technique and related properties of theories. *Colloquium Mathematicum*, 28:165–180, 1973.

[31] Franco Montagna. On the algebraization of a Feferman's predicate. (The algebraization of theories which express Theor; X). *Studia Logica*, 37:221–236, 1978.

[32] Richard Montague. Syntactical treatments of modality, with corollaries on reflexion principles and finite axiomatizability. *Acta Philosophica Fennica*, 16:153–167, 1963.

[33] Andrzej Mostowski. Thirty years of foundational studies. Lectures on the development of mathematical logic and the study of the foundations of mathematics in 1930-1964. Acta Philosophica Fennica. Fasc. XVII. Oxford: Basil Blackwell. 180 p. (1966)., 1966.

[34] Rohit Parikh. Existence and feasibility in arithmetic. *The Journal of Symbolic Logic*, 36:494–508, 1971.

[35] Lorenzo Sacchetti. The fixed point property in modal logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 42(2):65–86, 2001.

[36] V. Yu. Shavrukov. On Rosser's provability predicate. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 37(4):317–330, 1991.

[37] V. Yu. Shavrukov. A smart child of Peano's. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 35(2):161–185, 1994.

[38] Craig Smoryński. *Self-reference and modal logic*. Universitext. Springer, Cham, 1985.

[39] Robert M. Solovay. Provability interpretations of modal logic. *Israel Journal of Mathematics*, 25:287–304, 1976.

[40] Albert Visser. The provability logics of recursively enumerable theories extending Peano arithmetic at arbitrary theories extending Peano arithmetic. *Journal of Philosophical Logic*, 13:97–113, 1984.

[41] Albert Visser. Peano's smart children: A provability logical study of systems with built-in consistency. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 30(2):161–196, 1989.

[42] 佐野勝彦・倉橋太志・薄葉季路・黒川英徳・菊池誠. **数学における証明と真理 - 様相論理と数学基礎論**. 共立出版, 2016.