第二種 Siegel 領域上の無重複表現
Multiplicity-free representations over Siegel domains of the second kind

嵐 晃一 *

Koichi Arashi

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

Graduate school of Mathematics, Nagoya University

§1. 序

Lie 群の表現論の様々な設定に現れる無重複表現の統一的取り扱いのため, 複素多様体上の可視的作用の研究が, 小林俊行氏により創始された. Lie 群の可視的作用のもとで, 複素多様体上の同変 Hermite ベクトル束の正則切断の空間に実現されるユニタリ表現の無重複性が, ファイバーを表現空間とする部分群の表現の無重複性から従うという, 無重複性の伝搬定理が知られている ([6]).

本稿では, 無重複性の伝搬定理ではなく, 可視的作用それ自身について考える. さらに複素多様体は Siegel 領域と呼ばれる複素領域に, Lie 群は affine 変換群に限定して考える. ここで表現論のみならず, 複素解析, 微分幾何, 関数解析においても非常に良く研究されている対象である, ノンコンパクト型 Hermite 対称空間は Siegel 領域に正則同値であることが知られていることを注意しておく. 初めに, Lie 群の作用が強可視的であることの定義を紹介する.

定義 1 ([4])
Lie 群 H が連結複素多様体 D に正則に作用しているとき, 全実部分多様体 $S \subset D$ に対して $D' := HS \subset D$ は開集合であるとする. D' の反正則微分同相写像 $\sigma : D' \to D'$ が存在して次の条件を満たすとき H の作用は強可視的であるという:

$$\sigma|_S = \mathrm{id},$$
$$\sigma \text{ は } D' \text{ 内の各 } H\text{-軌道を保存する.}$$

次の定理が知られている.

定理 2 ([5])

(i) 半単純 *Lie* 群 G および *Hermite* 対称空間 G/K に対して, (G, H) を対称対とするとき, H の G/K 上の作用は強可視的である.

(ii) G/K をノンコンパクト型 *Hermite* 対称空間とする. G の極大ユニポテント部分群の G/K 上の作用は強可視的である.

*m15005y@mail.math.nagoya-u.ac.jp

この結果を踏まえて, ノンコンパクト型 Hermite 対称空間の設定から Siegel 領域の設定へと移行するのは自然である. $\mathcal{D}$ を第二種 Siegel 領域とする. 以下の節において, 一般化 Heisenberg 群と呼ばれる群 $\mathbf{N}$ を正規部分群として含む $\mathcal{D}$ の特定の affine 変換群について, 領域 $\mathcal{D}$ 上の作用が強可視であるための十分条件を説明する. そして具体的な例で, 定理 2(ii) との関係を説明する. また, 群 $\mathbf{N}$ 自身が領域 $\mathcal{D}$ に強可視的に作用するための必要十分条件を与える.

§2. Siegel 領域と反正則微分同相写像

N, M を自然数とする. $\Omega \neq \emptyset$ を $\mathbb{R}^N$ の正則錐, すなわち直線を含まない開凸錐とする. $Q : \mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^N$ を Ω-正な Hermite 写像とする. ここで Q が Ω-正とは, $Q(u,u) \in \overline{\Omega} \backslash \{0\}$ $(u \in \mathbb{C}^M \backslash \{0\})$ が成り立つことを意味する. ここで, $\overline{\Omega}$ は Ω の閉包を表す. 次の領域 $\mathcal{D}$ は第二種 Siegel 領域と呼ばれている:

$$\mathcal{D} := \{(z,u) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^M \mid \operatorname{Im} z - Q(u,u) \in \Omega\}.$$

$$G(\Omega) := \{g \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^N) \mid g(\Omega) = \Omega\}$$

とおく. 以下必要に応じて自然に $G(\Omega) \subset \mathrm{GL}(\mathbb{C}^N)$ と考える. まず $\mathcal{D}$ の反正則微分同相写像について説明する. $-\sigma_1 \in G(\Omega)$ と反線形写像 $\sigma_2 : \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^M$ が次式を満たしていると仮定する:

$$\sigma_1(Q(u,u)) = -Q(\sigma_2(u), \sigma_2(u)) \quad (u \in \mathbb{C}^M). \tag{1}$$

$\widetilde{\sigma_1}$ で σ_1 を $\mathbb{C}^N$ 上の反線形自己準同型写像に拡張したものを表すことにすると,

$$\sigma : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^M \ni (z,u) \mapsto (\widetilde{\sigma_1}(z), \sigma_2(u)) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^M$$

は $\mathcal{D}$ を保存し, $\mathcal{D}$ の反正則微分同相写像を定義する.

注意 1
一般にはこの形に書けない反正則微分同相写像が存在する. 一方で, 正則同値な二つの *Siegel* 領域は *affine* 同値であることが知られている ([3]). このことから, 領域 $\mathcal{D}$ の反正則微分同相写像が存在すれば, 上記 σ の形のものが存在する.

§3. Siegel 領域上の強可視的作用

領域 $\mathcal{D}$ を保存する $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^M$ の affine 変換全体が成す群を $\mathrm{Aff}(\mathcal{D})$ で表す. $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $u_0 \in \mathbb{C}^M$ に対して, affine 変換

$$\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^M \ni (z,u) \mapsto (z + 2\sqrt{-1}\,Q(u,u_0) + \sqrt{-1}\,Q(u_0,u_0) + x_0, u + u_0) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^M$$

を $n(x_0,u_0)$ で表すと $n(x_0,u_0) \in \mathrm{Aff}(\mathcal{D})$ である. 次の $\mathrm{Aff}(\mathcal{D})$ の部分群を一般化 Heisenberg 群と呼ぶ:

$$\mathbf{N} := \{n(x_0,u_0) \mid x_0 \in \mathbb{R}^N, u_0 \in \mathbb{C}^M\} \subset \mathrm{Aff}(\mathcal{D}).$$

次に

$$\mathrm{Aff}_0(\mathcal{D}) := \left\{(g,l) \in G(\Omega) \times \mathrm{GL}(\mathbb{C}^M) \mid gQ(u,v) = Q(lu,lv) \text{ for all } u,v \in \mathbb{C}^M\right\}$$

とおく. $\mathrm{Aff}_0(\mathcal{D})$ の要素 (g,l) を自然に affine 変換

$$\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^M \ni (z,u) \mapsto (gz, lu) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^M$$

とみなすことによって $\mathrm{Aff}_0(\mathcal{D}) \subset \mathrm{Aff}(\mathcal{D})$ である. G_0 を $\mathrm{Aff}_0(\mathcal{D})$ の閉部分群として, $G := G_0\mathbf{N} \subset \mathrm{Aff}(\mathcal{D})$ とおく. G_0 の要素 (g, l) について, 第二成分 $l \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^M)$ を無視することで G_0 は Ω に自然に作用する. $\Omega^{-\sigma_1} := \{y \in \Omega \mid \sigma_1(y) = -y\}$ とおく. 次の条件を考える:

$$-\sigma_1 \text{ は } \Omega \text{ 内の全ての } G_0\text{-軌道を保存する}, \tag{C1}$$

$$\Omega \text{ 内の各 } G_0\text{-軌道は } \Omega^{-\sigma_1} \text{ と交わる}. \tag{C2}$$

本稿の主定理は次である.

定理 3 ([1])
条件 (C1), (C2) が成り立つとき, G の $\mathcal{D}$ 上の作用は強可視的である.

定理の具体例について説明する. 以下 ν, r は自然数とし, 複素行列 X に対して転置行列を ${}^tX$ で, Hermite 転置を X^* で表す.

例 1
$\nu \geq 2$, $r \geq 1$ とする. $\mathrm{Herm}_\nu(\mathbb{C})$ を ν 次 *Hermite* 行列全体が成す空間とする. Ω が正定値 *Hermite* 行列全体が成す正則錐で, $Q : \mathrm{Mat}_{\nu,r}(\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}_{\nu,r}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_\nu(\mathbb{C})$ が $Q(U, V) = \frac{1}{2}UV^*$ で与えられる場合, この Ω と Q から定義される *Siegel* 領域 $\mathcal{D}$ は $I_{\nu+r,\nu}$ 型 *Hermite* 対称空間である. $\sigma_1(X) = -{}^tX$ $(X \in \mathrm{Herm}_\nu(\mathbb{C}))$, $\sigma_2(U) = \overline{U}$ $(U \in \mathrm{Mat}_{\nu,r}(\mathbb{C}))$ のとき, 等式 (1) が成立する. いま $A \in \mathrm{GL}_\nu(\mathbb{C})$ に対して次の *affine* 変換 $\iota(A) \in \mathrm{Aff}_0(\mathcal{D})$ を考える:

$$\iota(A) : \mathrm{Mat}_\nu(\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}_{\nu,r}(\mathbb{C}) \ni (Z, U) \mapsto (AZA^*, AU) \in \mathrm{Mat}_\nu(\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}_{\nu,r}(\mathbb{C}).$$

このとき, 定理 3 の条件 (C1), (C2) を満たす G_0 の例として $\iota(U(p,q))\,(p, q \geq 0, p + q = \nu)$ がある. 対角成分が 1 の下三角行列全体の成す部分群を $T \subset \mathrm{GL}_\nu(\mathbb{C})$ とおくとき, $\iota(T)$ も G_0 の例である. なお, $\iota(T)\mathbf{N}$ は $SU(\nu + r, \nu)$ の極大ユニポテント部分群に同型である.

例 2
$\nu, r \geq 1$ とする. $\mathrm{Herm}_\nu(\mathbb{R})$ を ν 次実対称行列全体が成す空間, $\mathrm{Sym}_\nu(\mathbb{C})$ を ν 次複素対称行列全体の成す空間とする. Ω が正定値対称行列全体が成す正則錐で $Q : \mathrm{Mat}_{\nu,r}(\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}_{\nu,r}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Sym}_\nu(\mathbb{C})$ が $Q(U, V) = \frac{1}{4}\left(UV^* + \overline{V}{}^tU\right)$ で与えられるとき, この Ω と Q から定義される *Siegel* 領域 $\mathcal{D}$ は $III_{\nu,r}$ 型擬対称領域と呼ばれている ([7]). $\sigma_1(X) = -X$ $(X \in \mathrm{Herm}_\nu(\mathbb{R}))$, $\sigma_2(U) = \overline{U}$ $(U \in \mathrm{Mat}_{\nu,r}(\mathbb{C}))$ のとき, 等式 (1) が成立する. 自明群は定理 3 の条件 (C1), (C2) を満たす G_0 の例である. つまり $\mathbf{N}$ の $\mathcal{D}$ 上の作用は強可視的である.

§4. 管状領域に正則同値な Siegel 領域

前節で $\mathbf{N}$ の作用が強可視的になる Siegel 領域の例を紹介した. この節では, この性質を持つ Siegel 領域の特徴づけを与える. $\mathbb{C}^M$ の実部分空間 W に対して $\mathbf{N}^W := \{n(x_0, u_0) \mid x_0 \in \mathbb{R}^N, u_0 \in W\}$ とおく.

定理 4
以下は同値である.

(i) $\mathbf{N}$ の $\mathcal{D}$ 上の作用は強可視的である;

(ii) $\mathbb{C}^M$ の実形 W で $\mathbf{N}^W$ の $\mathcal{D}$ 上の作用が強可視的になるものが存在する;

(iii) $\mathbb{C}^M$ の実形 W で $Q(W,W) \subset \mathbb{R}^N$ を満たすものが存在する;

(iv) $\mathbb{R}^{N+M}$ の領域 U で, $\mathbb{R}^{N+M} + \sqrt{-1}U \subset \mathbb{C}^{N+M}$ と $\mathcal{D}$ が正則同値であるものが存在する.

注意 2

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) は筆者自身の結果ではない. これは *Simon Gindikin* 氏によって指摘されている ([2]).

本稿では (i) $\Rightarrow$ (iii) の証明を説明する. 次の補題を使う.

補題 5

有限次元複素ベクトル空間 V 上の *Hermite* 形式の族 $\{h_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられ, h_{λ_0} が正定値となる $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在するとする. 反線形写像 $\tau : V \to V$ が

$$h_\lambda(u,v) = h_\lambda(\tau(v),\tau(u)) \quad (\lambda \in \Lambda, u, v \in V)$$

を満たしているとする. この時, 対合的な反線形写像 $\tau' : V \to V$, すなわち $\tau'^2 = 1$ で

$$h_\lambda(u,v) = h_\lambda(\tau'(v),\tau'(u)) \quad (\lambda \in \Lambda, u, v \in V)$$

を満たすものが存在する.

いま $(z_0, u_0) \in \mathcal{D}$ に対して

$$\mathbf{N}(z_0,u_0) = \{(z,u) \in \mathcal{D} \mid \operatorname{Im} z - Q(u,u) = \operatorname{Im} z_0 - Q(u_0,u_0)\}$$

が成り立つことに注意すると, $\mathbf{N}$ の $\mathcal{D}$ 上の作用が強可視的であるとき

$$Q(u,v) = Q(\tau(v),\tau(u)) \quad (u, v \in \mathbb{C}^M)$$

を満たす反線形写像 $\tau : \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^M$ の存在が示される. さらに補題 5 より τ として対合的なものが取れる. W として τ の固有値 1 の固有空間をとればよい.

参 考 文 献

[1] K. Arashi, Visible actions of certain affine transformation groups of a Siegel domain of the second kind. to appear in Springer Proc. Math. Stat. 396, 6 pages.

[2] S. G. Gindikin, Analysis in homogeneous domains. (Russian) Uspehi Mat. Nauk 19 1964 no. 4 (118), 3–92.

[3] W. Kaup, Y. Matsushima, T. Ochiai, On the automorphisms and equivalences of generalized Siegel domains. Amer. J. Math. 92 (1970), 475–498.

[4] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 41 (2005), no. 3, 497–549.

[5] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces. Transform. Groups 12 (2007), no. 4, 671–694.

[6] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-freeness property for holomorphic vector bundles. Lie groups: structure, actions, and representations, 113–140, Progr. Math., 306, Birkhäuser/Springer, New York, 2013.

[7] I. Satake, Algebraic structures of symmetric domains. Kanô Memorial Lectures, 4. Iwanami Shoten, Tokyo; Princeton University Press, Princeton, p. xvi+321 (1980).