Split Dynkin indices for homomorphisms between real simple Lie algebras

奥田隆幸
広島大学大学院先進理工系科学研究科
Takayuki Okuda
Graduate School of Advanced Science and Engineering
okudatak@hiroshima-u.ac.jp*

概 要

Dynkin index とは, 複素単純 Lie 代数の間の各準同型に対してルート系の言葉を用いて定義される非負整数であり, Dynkin [3] によって導入されたものである. 本原稿では, Dynkin index のある種の自然な一般化として, 非コンパクト実単純リー代数の間の各準同型に対して, 制限ルート系の言葉を用いて非負整数 (ここでは split Dynkin index と呼ぶことにする) が定義できることを紹介する. また Dynkin index の持つ様々な性質のうち, いくつかの重要な性質は split Dynkin index についても成立することを紹介したい.

1 Dynkin indices

Dynkin index の定義を述べるため, 複素単純リー代数 $\mathfrak{s}$ 上の "正規化された" 不変双線型形式 $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{s}}$ を以下の形で導入しておく.

Definition 1.1. 複素単純リー代数 $\mathfrak{s}$ について, $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s})$ を複素リー代数としての自己同型群とする. $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{s}}$ を $\mathfrak{s}$ 上の $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s})$ 不変双線型形式であって, 以下の条件を満たすものとする (そのような $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{s}}$ は一意に存在する) :

*本研究は JSPS 科研費 JP20K14310 の助成を受けたものです.

条件: $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{s}$ の任意のカルタン部分代数とし, Δ を $(\mathfrak{s}, \mathfrak{h})$ についての root system, $\mathfrak{h}_0$ を Δ の定める $\mathfrak{h}$ の実形, すなわち

$$\mathfrak{h}_0 := \{A \in \mathfrak{h}_0 \mid \alpha(A) \in \mathbb{R} \text{ for any } \alpha \in \Delta\}$$

と定める (Δ は双対空間 $\mathfrak{h}_0^*$ に実現された既約な abstaract root system とみなせる). このとき $(\cdot,\cdot)_\mathfrak{s}$ は $\mathfrak{h}_0$ 上実数値をとり, $\mathfrak{h}_0$ 上の正定値内積を定める. さらに, 双対空間 $\mathfrak{h}_0^*$ に $(\cdot,\cdot)_\mathfrak{s}$ から誘導されるノルムを $\|\cdot\|_\mathfrak{s}$ と書いたとき, Δ の任意の longest root λ について,

$$\|\lambda\|_\mathfrak{s}^2 = 2$$

である.

複素単純リー代数 $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{g}$ およびその間の複素リー代数準同型 $\rho : \mathfrak{l} \to \mathfrak{g}$ について, Dynkin index “Dind(ρ)” は以下のように定義される:

Definition 1.2. 上記設定において,

$$(\rho(X), \rho(Y))_\mathfrak{g} = j_\rho \cdot (X, Y)_\mathfrak{l} \quad (\text{ for any } X, Y \in \mathfrak{l})$$

を満たす非負実数 j_ρ が一意に存在する. この非負実数 j_ρ を ρ の Dynkin index とよび, 本原稿では $\mathrm{Dind}(\rho)$ と書くこととする.

Dynkin index は複素単純リー代数における半単純部分リー代数の分類のための強力なツールとして Dynkin [3] によって導入された概念であり, その後, 様々な関連した研究が行われている (cf. [1, 2, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 13]).

Dynkin index は以下のような性質を持つことが知られている:

(1) $\rho : \mathfrak{l} \to \mathfrak{g}$ について, $\mathrm{Dind}(\rho)$ は $\mathfrak{g}$ の部分リー代数 $\rho(\mathfrak{l})$ の $\mathrm{Aut}_\mathbb{C}(\mathfrak{g})$ 共役類のみに依存して定まる.

(2) 任意の ρ について Dynkin index $\mathrm{Dind}(\rho)$ は (非負) 整数である.

(3) $\mathrm{Dind}(\rho_1 \circ \rho_2) = \mathrm{Dind}(\rho_1) \cdot \mathrm{Dind}(\rho_2)$. ただし ρ_1, ρ_2 はそれぞれ複素単純リー代数の間の複素リー代数準同型で, 合成可能なものとする. また, 非負整数の集合 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を積について可換 monoid とみなしたとき, “Dind” は複素単純リー代数と複素リー代数準同型のなす圏から monoid $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への関手を定める.

(4) $\mathrm{Dind}(\rho) = 0$ となるのは $\rho = 0$ であることと同値.

(5) $\mathrm{Dind}(\rho) = 1$ となるのは

$$\rho(\mathcal{O}_{\min}(\mathfrak{l})) \subset \mathcal{O}_{\min}(\mathfrak{g})$$

となることと同値. ただしここでは複素単純リー代数 $\mathfrak{s}$ の極小冪零随伴軌道 (unique に定まる) を $\mathcal{O}_{\min}(\mathfrak{s})$ と書くこととする.

Remark 1.3. 上記性質のうち非自明なのは (2), (5) である. (2) については, まず Dynkin [3] によって複素単純リー代数の 3 次元単純部分リー代数の分類を用いた証明が与えられた. その後 Dynkin index のコホモロジカルな解釈 (cf. Dynkin [4], Oniščik [11]) からも従うことが示され, さらに abstract root system の性質を用いた代数的な証明が Braden [2] によって与えられている. (5) については極小冪零軌道が longest root vector の軌道であるという事実と, Dynkin [3, Theorem 2.4] から従うということが Panyushev [13] によって言及されている.

2 Split Dynkin indices

本原稿においては Dynkin index のある種の一般化として, 非コンパクト実単純リー代数の間の実リー代数準同型 ρ について, “split Dynkin index $\mathrm{SDind}(\rho)$” を定義する. そのため, まず以下のように “shortest coroot” についての用語を整備しておく.

Definition 2.1. $\mathfrak{s}$ を非コンパクト実単純リー代数とし, $\mathfrak{s}$ の Killing form を $B_\mathfrak{s}$ と書く. 本原稿では $\mathfrak{s}$ の元 A に対し, “A が $\mathfrak{s}$ の shortest coroot である” という用語を以下の意味で用いる: $\mathfrak{s}$ のあるカルタン対合 θ と, $\mathfrak{s}^{-\theta}$ の maximal abelian subspace $\mathfrak{a}$ が存在して, $(\mathfrak{s}, \mathfrak{a})$ の定める restricted root system $\Sigma \subset \mathfrak{a}^*$ の coroot system を $\Sigma^\vee \subset \mathfrak{a}$ と書いたとき, $A \in \Sigma^\vee$ かつ

$$B_\mathfrak{s}(A, A) = \min_{A' \in \Sigma^\vee} B_\mathfrak{s}(A', A')$$

($B_\mathfrak{s}$ は $\mathfrak{a}$ 上正定値であることに注意).

Split Dynkin index を以下の形で定義しよう:

Definition 2.2. $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{g}$ をそれぞれ非コンパクト実単純リー代数とする. 実リー代数準同型 $\rho : \mathfrak{l} \to \mathfrak{g}$ について, split Dynkin index $\mathrm{SDind}(\rho)$ を

$$\mathrm{SDind}(\rho) := \frac{B_\mathfrak{g}(\rho(A_\mathfrak{l}), \rho(A_\mathfrak{l})))}{B_\mathfrak{g}(A_\mathfrak{g}, A_\mathfrak{g})} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

と定める. ただし $A_{\mathfrak{l}}$, $A_{\mathfrak{g}}$ はそれぞれ $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{g}$ の shortest coroot とする (右辺は $A_{\mathfrak{l}}$, $A_{\mathfrak{g}}$ の選び方には寄らない).

以下の意味で split Dynkin index は Dynkin index の一般化となっている:

Proposition 2.3. 複素単純リー代数 $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{g}$ およびその間の複素リー代数準同型 $\rho : \mathfrak{l} \to \mathfrak{g}$ について,

$$\mathrm{Dind}(\rho) = \mathrm{SDind}(\rho).$$

ただし右辺の定義においては, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{g}$ の複素構造を忘れ, それぞれ非コンパクト実単純リー代数とみなしている.

Remark 2.4. Split Dynkin index の定義として, 複素の場合の Definitions 1.1, 1.2 と同様の流れによる定義を採用することは可能である. 本原稿では直感的に議論を行いやすい Definition 2.2 を採用した.

また Split Dynkin index についての簡単な考察として, 以下が分かる:

Proposition 2.5. 以下が成り立つ:

- $\rho : \mathfrak{l} \to \mathfrak{g}$ について, $\mathrm{SDind}(\rho)$ は $\mathfrak{g}$ の部分リー代数 $\rho(\mathfrak{l})$ の $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ 共役類のみに依存して定まる (ただし $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の実リー代数としての自己同型群とする).
- $\mathrm{SDind}(\rho) = 0$ となることは $\rho = 0$ と同値.
- ρ が同型写像であるなら $\mathrm{SDind}(\rho) = 1$.
- $\mathrm{SDind}(\rho_1 \circ \rho_2) = \mathrm{SDind}(\rho_1) \cdot \mathrm{SDind}(\rho_2)$. ただし ρ_1, ρ_2 はそれぞれ非コンパクト実単純リー代数の間の実リー代数準同型で, 合成可能なものとする.

本原稿の主結果は以下の三つの定理 (Theorems 2.6, 2.8, 2.10) である: まず split Dynkin index の整数性について:

Theorem 2.6. 任意の ρ について, split Dynkin index $\mathrm{SDind}(\rho)$ は (非負) 整数.

特に上記の考察と併せると, 以下が得られる:

Corollary 2.7. 非負整数の集合 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を積について可換 monoid とみなしたとき, "SDind" は非コンパクト実単純リー代数と実リー代数準同型のなす圏から monoid $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への関手を定める.

次に split Dynkin index が 1 であるような実リー代数準同型の極小冪零軌道を用いた特徴付けについて:

Theorem 2.8. 非コンパクト実単純 Lie 代数 $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{g}$ の間の実 Lie 代数準同型 $\rho : \mathfrak{l} \to \mathfrak{g}$ について, 以下の二条件は同値である:

(i) $\mathrm{SDind}(\rho) = 1$.

(ii) $\rho(\mathcal{N}_{\min}(\mathfrak{l})) \subset \mathcal{N}_{\min}(\mathfrak{g})$.

ただし, ここでは非コンパクト単純リー代数 $\mathfrak{s}$ について, $\mathcal{N}_{\min}(\mathfrak{s})$ を $\mathfrak{s}$ における極小冪零随伴軌道すべての合併とする. すなわち $X \in \mathcal{N}_{\min}(\mathfrak{s})$ となるのは X を通る $\mathfrak{s}$ における随伴軌道が極小冪零軌道であることを意味するものとする.

Remark 2.9. $\mathcal{N}_{\min}(\mathfrak{s})$ について: 非コンパクト単純リー代数 $\mathfrak{s}$ が複素構造を許容する場合, および $\mathfrak{s}$ が複素構造を持たず, 対称対 $(\mathfrak{s}, \mathfrak{k})$ が Hermitian でない場合 ($\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{s}$ の極大コンパクト) には, $\mathfrak{s}$ の極小冪零随伴軌道は一意であり, 特に $\mathcal{N}_{\min}(\mathfrak{g})$ はその極小冪零随伴軌道を表すこととなる. また $\mathfrak{s}$ が複素構造を許容ぜず, 対称対 $(\mathfrak{s}, \mathfrak{k})$ が Hermitian となる場合には, $\mathfrak{s}$ は二つの極小冪零随伴軌道 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を持ち, $\mathcal{O}_1 = -\mathcal{O}_2$ となる. この場合は $\mathcal{N}_{\min}(\mathfrak{s}) = \mathcal{O}_1 \sqcup \mathcal{O}_2$ となる (特にカルタン対合を考えることにより, 自己同型群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{s})$ は $\mathcal{N}_{\min}(\mathfrak{s})$ に推移的に作用することが分かる). 詳しくは [10] を参照されたい.

最後に非コンパクト単純リー代数の複素化についての split Dynkin index について:

Theorem 2.10. $\mathfrak{g}$ を非コンパクト単純リー代数とする. $\mathfrak{g}$ の複素化を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ と書くことにし, 包含写像

$$\iota_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C},\ X \mapsto X \otimes 1$$

について考える. このとき

$$\mathrm{SDind}(\iota) = \begin{cases} 2 & \text{if } \mathfrak{g} \text{ is isomorphic to one in Table 1,} \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Table 1: List of $\mathfrak{g}$ with $\mathrm{SDind}(\iota_{\mathfrak{g}}) \neq 1$

$\mathfrak{g}$
$\mathfrak{su}^*(2k)$ with $k \geq 2$
$\mathfrak{so}(n-1,1)$ with $n \geq 5$
$\mathfrak{sp}(p,q)$ with $p,q \geq 1$
$\mathfrak{e}_{6(-26)}$
$\mathfrak{f}_{4(-20)}$

Theorem 2.10 と以下の命題との組合せにより, ρ の split Dynkin index と, 複素化 $\rho_{\mathbb{C}}$ の Dynkin index の関係が分かる:

Corollary 2.11 (Corollary to Propositions 2.3 and 2.5)**.** 非コンパクト実単純 Lie 代数 $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{g}$ の間の実 Lie 代数準同型 $\rho : \mathfrak{l} \to \mathfrak{g}$ について, それぞれの複素化を $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $\rho_{\mathbb{C}} : \mathfrak{l}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ と表すこととする. このとき

$$\mathrm{SDind}(\rho) = \frac{\mathrm{SDind}(\iota_{\mathfrak{l}})}{\mathrm{SDind}(\iota_{\mathfrak{g}})} \cdot \mathrm{Dind}(\rho_{\mathbb{C}}).$$

Remark 2.12. Kollross–Rodríguez-Vázquez [7] は上記命題の設定において, ρ の複素化の Dynkin index $\mathrm{Dind}(\rho_{\mathbb{C}})$ を “ρ の Dynkin index” と呼んでいる.

3 Concluding remarks

Kollross–Rodríguez-Vázquez [7] は既約リーマン対称空間の全測地的部分多様体について, 非コンパクト単純リー代数の部分半単純リー代数を対応させ, Remark 2.12 の意味での Dynkin index を (正確には $\mathfrak{l}$ が半単純の場合も考慮して一般化した形で) 考察し, 全測地的部分多様体の分類について大きな成果を挙げている.

著者は現在, 田丸博士氏 (大阪公立大), 久保亮氏 (広島工業大) と共同で, 既約リーマン対称空間の間の全測地的はめ込みについて split Dynkin index を定義し, “Helgason sphere (cf. [5])” や断面曲率の観点から Kollross–Rodríguez-Vázquez の結果を捉えなおすという研究を進めている.

参考文献

[1] V. Balaji, *Principal bundles on projective varieties and the Donaldson-Uhlenbeck compactification*, J. Differential Geom. **76** (2007), 351–398.

[2] H. W. Braden, *Integral pairings and Dynkin indices*, J. London Math. Soc. **43** (1991), 313–323.

[3] E. B. Dynkin, *Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras*, Mat. Sbornik N.S. **30(72)** (1952), 349–462 (3 plates). Translated in english by Amer. Math. Soc. Transl. **6** (1957), 111–244.

[4] E. B. Dynkin, *Topological characteristics of homomorphisms of compact Lie groups*, Mat. Sbornik N.S. **35(77)** (1954), 129–173. Translated in english by Amer. Math. Soc. Transl. **12** (1959), 301–342.

[5] S. Helgason, *Totally geodesic spheres in compact symmetric spaces*, Math. Ann. **165** (1966), 309–317.

[6] S. Ihara, *Holomorphic imbeddings of symmetric domains*, J. Math. Soc. Japan, **19** (1967), 261–302.

[7] A. Kollross and A. Rodríguez-Vázquez, *Totally geodesic submanifols in exceptional symmetric spaces*, preprint, available at arXiv:2202.10775.

[8] T. Kubo, *The Dynkin index and conformally invariant systems associated to parabolic subalgebras of Heisenberg type*, Osaka J. Math., **51** (2014), 359–373.

[9] S. Kumar, M. S. Narasimhan and A. Ramanathan, *Infinite Grassmannians and moduli spaces of G-bundles*, Math. Ann., **300** (1994), 41–75.

[10] T. Okuda, *Smallest complex nilpotent orbits with real points*, J. Lie Theory, **25** (2015), 507–533.

[11] A. L. Oniščik, *Torsion of the special Lie groups*, Mat. Sbornik N.S., **51(93)** (1960), 273–276. Translated in english by Amer. Math. Soc. Transl. **50** (1966), 1–4.

[12] D. I. Panyushev, *On the Dynkin index of a principal sl_2-subalgebra*, Adv. Math. **221** (2009), 1115–1121.

[13] D. I. Panyushev, *The Dynkin index and $\mathfrak{sl}_2$-subalgebras of simple Lie algebras*, J. Algebra **430** (2015), 15–25.