# Classification of irreducible $(\mathfrak{g}, K)$-modules associated to the ideals of minimal nilpotent orbits for type $A$ groups

北海道大学理学研究院　田森　宥好
Hiroyoshi Tamori
Department of Mathematics,
Hokkaido University

## 1　導入

本稿では極小表現の $A$ 型での類似の定義、その構成と分類の結果を紹介する。本稿のほとんどの内容は [Tam21] に基づく。

$\mathfrak{g}$ を複素単純 Lie 環、$U(\mathfrak{g})$ を普遍包絡環とする。

**定義 1.1.** $J$ を $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアルとする。

(1) $J$ の次数化 $\mathrm{gr}(J)$ は対称代数 $S(\mathfrak{g})$ のイデアルを定める。$S(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^\vee$ 上の多項式環とみなす。イデアル $\mathrm{gr}(J)$ の $\mathfrak{g}^\vee$ での零点集合を $J$ の**随伴多様体**と呼び、$\mathrm{AV}(J)$ と書く。$\mathrm{AV}(J)$ には $\mathfrak{g}$ の内部自己同型群 $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ が作用する。

(2) $J$ がある既約 $U(\mathfrak{g})$-加群の零化イデアルとしてあらわせる時、$J$ を**原始イデアル**という。

(3) 可換とは限らない代数 $U(\mathfrak{g})/J$ が整域（つまり $J \neq U(\mathfrak{g})$ かつ零でない二つの元の積が零でない）ならば $J$ を**完全素イデアル**という。

(4) $\mathfrak{g}^\vee$ の $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$-軌道であって、$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$-加群としての同型 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^\vee$ を介して冪零元からなる軌道に対応するものを冪零軌道という。$\{0\}$ でない冪零軌道のうち、最も次元が小さい軌道 $\mathcal{O}^{\min}$ がただ一つ存在する。この軌道を**極小冪零軌道**という。

**事実 1.2** ([Jos76, GS04])**.** 複素単純 *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ が $A$ **型でない**（つまり $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ $(n \geq 2)$ のいずれとも同型でない）ならば、$U(\mathfrak{g})$ は随伴多様体が $\mathcal{O}^{\min}$ の閉包 $\overline{\mathcal{O}^{\min}}$ となるような原始完全素イデアル $J_0$ をただ一つ持つ。このイデアルを **Joseph イデアル**という。

$G$ を連結な実単純 Lie 群とし、その Lie 環を $\mathfrak{g}_0$ と書く。$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_0)$ の極大コンパクト群の Lie 環を $\mathfrak{g}_0$ の部分代数とみなして、$\mathfrak{k}_0$ と書く。$K$ を Lie 環 $\mathfrak{k}_0$ を持つ $G$ の解析的部分群とする（$G$ の中心が有限ならば $K$ は極大コンパクト群となる）。また、複素化 $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$ が単純であると仮定する。他の Lie 群に対しても、同様の Lie 環の記法を用いることにする。

**定義 1.3.** $G$ の既約認容表現が**極小表現**であるとは、$U(\mathfrak{k})$-有限ベクトルを取ることで得られる $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群の零化イデアルが Joseph イデアル $J_0$ となることをいう。

$\mathfrak{t}_0$ を $\mathfrak{k}_0$ の Cartan 部分代数として、正ルートの集合を固定し、優整ウェイト $\eta$ に対して最高ウェイトが $\eta$ の既約 $\mathfrak{k}$-加群を $F(\eta)$ と書く。また、Killing 形式によって定まる $\mathfrak{k}_0$ の $\mathfrak{g}_0$ での補空間を $\mathfrak{p}_0$ と書く。

極小表現は以下のような特徴を持つ。

- 無限次元既約認容表現は Gelfand-Kirillov 次元という非負整数値を考えることで、その大きさを比べることができる。極小表現は（その名前の通り）無限次元既約認容表現の中で最も小さい Gelfand-Kirillov 次元 $\frac{1}{2}\dim\mathcal{O}^{\min}$ をもつ。
- 任意の極小表現に対して、ある $\mathfrak{k}$-加群 $\mathfrak{p}$ の最高ウェイト $\psi$ とある優整ウェイト $\eta$ が存在し、極小表現の $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-加群は $\mathfrak{k}$-加群として

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} F(\eta+k\psi)$$

  と分解できる。
- 極小表現の代表的な例として $G=\mathrm{Mp}(n,\mathbb{R})$ の Weil 表現が挙げられる。
- 無限小同値（$(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-加群の同型による同値）を除いて分類されており [Tam19]、それによると $\mathfrak{g}_0$ を固定した時に極小表現は高々 4 つしか存在しない。
- 分類結果からユニタリ化可能（つまり、あるユニタリ表現と無限小同値）である。これは極小表現の定義からは非自明な帰結である。

例 1.5 で見るように、既約 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-加群の零化イデアルが完全素イデアルであることは、既約 $\mathfrak{k}$-部分表現の形に制限を与える。$Z(\mathfrak{k})$ を $U(\mathfrak{k})$ の中心として、$W$ を $(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ に関する Weyl 群とする。$\rho_{\mathfrak{k}}\in\mathfrak{t}^{\vee}$ で $(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ に関する正ルートの和の半分をあらわす。

**事実 1.4** ([Vog81])**.** 既約 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-加群 $V$ の *Gelfand-Kirillov* 次元が $\frac{1}{2}\dim\mathcal{O}^{\min}$ だとする。この時、$V$ の既約 $\mathfrak{k}$-部分加群の最高ウェイト全体の集合の *Zariski* 閉包は互いに異なる有限個の直線の和集合

$$L:=\bigsqcup_{1\le i\le l}(\eta_i+\mathbb{R}\psi)$$

で書ける。ここで $\eta_1,\ldots,\eta_l$ は $V$ に依存する優整な $\mathfrak{t}$-ウェイトで、$\psi$ は $\mathfrak{k}$-加群 $\mathfrak{p}$ のある最高ウェイト。

**例 1.5.** 事実 1.4 の状況で、$V$ の零化イデアルが完全素イデアルと仮定する。各 $1\le i\le l$ に対して $S(\mathfrak{t})^W$ の元 $X_i\neq 0$ であって、$W(\eta_i+\rho_{\mathfrak{k}}+\mathbb{R}\psi)$ 上でのみ消えるようなものが取れる。Harish-Chandra 同型 $Z(\mathfrak{k})\cong S(\mathfrak{t})^W$ で $X_i$ に対応する $Z(\mathfrak{k})$ の元を $Y_i\neq 0$ と書く。これらは $V$ の各既約 $\mathfrak{k}$-部分表現にスカラー倍で作用し、$Y_1\cdots Y_l$ は $V$ を消す。仮定よりある $Y_i$ が $V$ を消すことになるが、これは $L+\rho_{\mathfrak{k}}\subset W(\eta_i+\rho_{\mathfrak{k}}+\mathbb{R}\psi)$ を意味する。$W(\eta_i+\rho_{\mathfrak{k}}+\mathbb{R}\psi)$ で Weyl chamber の閉包の中にある半直線は最大で 2 本なので、特に $l\le 2$ である。

$A$ 型の実単純 Lie 群 $G$ に対しては、$U(\mathfrak{g})$ の Joseph イデアルが定義されていないので、極小表現も定義されていない。しかし次のように、「極小表現とみなされるべき」表現がある。

- $G=\mathrm{O}(p,q)$（ただし $p,q\ge 2$ かつ $p+q$ が 8 以上の偶数）の極小表現の構成（例えば

[KØ03]）を $p+q=6$ の場合で考えた表現の既約成分
- $G=\widetilde{\mathrm{SL}}(3,\mathbb{R})$（$\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ の二重被覆群）のある既約ユニタリ表現 [Tor83]

本稿の目的は、$A$ 型の実単純 Lie 群 $G$ に対しても上記の表現を含むように極小表現の定義を拡張し（これらは定義 3.1 の言葉を用いれば 0-極小表現となる）、その構成と分類を考えることである：

**問.** $\mathfrak{g}$ が $A$ 型の場合には *Joseph* イデアルのような $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアルがどのくらい存在するのか？もし存在するなら、それを零化イデアルに持つような $G$ の既約認容表現はどのくらい存在するのか？

**例 1.6.** 例えば $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の場合、$U(\mathfrak{g})$ の両側イデアル $J$ に対して次の二つは同値となる。

- $J$ は原始完全素イデアルで $\mathrm{AV}(J)=\overline{\mathcal{O}^{\min}}$ となる。
- $J$ は Casimir 元からある複素数を引いたもので生成される。

前者は Joseph イデアルを特徴付ける条件（事実 1.2）であり、後者から全ての $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の被覆群の無限次元既約認容表現は極小表現の類似とみなせる。

# 2 Joseph イデアルの類似

## 2.1 $\mathfrak{g}$ が $A$ 型でない場合

**事実 2.1** ([GS04]). $\mathfrak{g}$ が $A$ 型でない複素単純 *Lie* 環ならば、$U(\mathfrak{g})$ の両側イデアル $J$ が *Joseph* イデアル $J_0$ であることと次のことは全て同値。

*(1)* $J$ が原始完全素イデアルで $\mathrm{AV}(J)=\overline{\mathcal{O}^{\min}}$ となる。
*(2)* $\mathrm{gr}(J)$ が $\overline{\mathcal{O}^{\min}}$ の定める $S(\mathfrak{g})$ のイデアル $\mathcal{I}(\overline{\mathcal{O}^{\min}})$ と一致する。

$\mathfrak{g}$ の $n$ 次対称テンソル積を $S^n(\mathfrak{g})$ と書く。事実 2.1 を用いて、$J_0$ の生成系が次のように記述できる。$S^2(\mathfrak{g})$ の自明 $\mathfrak{g}$-部分加群の生成元を $\Omega$ と書き、$\mathfrak{g}$-部分加群 $F$ を

$$S^2(\mathfrak{g})=\odot^2\mathfrak{g}\oplus\mathbb{C}\Omega\oplus F \tag{2.1}$$

となるよう定義する。ここで $\odot^2\mathfrak{g}$ は Cartan 積、つまり最高ウェイトが $\mathfrak{g}$ の最高ウェイトの倍になる既約 $\mathfrak{g}$-加群をあらわす。$S^2(\mathfrak{g})$ の中で $\odot^2\mathfrak{g}$ と自明 $\mathfrak{g}$-加群はそれぞれ重複度 1 で現れるので、$F$ が well-defined である。

$\mathcal{I}(\overline{\mathcal{O}^{\min}})$ は $F$ と $\Omega$ で生成され [Gar82]、

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(S^1(\mathfrak{g}),F)=0 \tag{2.2}$$

であることから、事実 2.1 の条件 $\mathrm{gr}(J)=\mathcal{I}(\overline{\mathcal{O}^{\min}})$ は

$$\exists! c_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\qquad J_0=\langle\mathrm{sym}(F),\mathrm{sym}(\Omega)-c_0\rangle \tag{2.3}$$

を意味する。ここで sym は対称化である：

$$\mathrm{sym}\colon S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g});\ X_1 \cdots X_n \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(n)}$$

### 2.2 $\mathfrak{g}$ が $A$ 型の場合

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ $(n > 2)$ とする。$I_n$ を $n$ 行 $n$ 列の単位行列、$E_{i,j}$ を $(i,j)$-成分が 1 で他が 0 の $n$ 行 $n$ 列の正方行列とする。

$$T_{i,j} := E_{i,j} - \delta_{i,j} I_n \in \mathfrak{g}$$

として（$\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタ)、$A \in \mathfrak{g}$ に対して $A_{i,j} \in \mathbb{C}$ を $A$ の $(i,j)$-成分とする。$\mathfrak{g}$-同変な線型写像 $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{C};\ X \otimes Y \mapsto \mathrm{Tr}(XY)$ により誘導される同型 $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^\vee \cong \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ で、恒等写像に対応する $S^2(\mathfrak{g})$ の元を $\Omega$ と書く。

(2.1) により $S^2(\mathfrak{g})$ の $\mathfrak{g}$-部分加群 $F$ を定義すると、$A$ 型でない場合と同様に $\mathcal{I}(\overline{\mathcal{O}^{\min}})$ が $F$ と $\Omega$ で生成される [Gar82]。$\mathfrak{g}$-加群としての準同型 $\tau$ を

$$\tau\colon \mathfrak{g} \to F; \quad A \mapsto \frac{n}{n-2} \sum_{i,j,k} A_{i,j} T_{i,k} T_{k,j}$$

で定める。$A$ 型の場合 (2.2) とは異なり

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(S^1(\mathfrak{g}), F) = \mathbb{C}\tau$$

となることに注意する。$F \subset S^2(\mathfrak{g})$ の $\mathfrak{g}$-部分加群 $F'$ を

$$F = \mathrm{Image}(\tau) \oplus F'$$

として定める。(2.3) の類似で、$\tau$ を用いてイデアルの生成元を連続的にずらして $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアルの族 $\{J_a \mid a \in \mathbb{C}\}$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} J_a &:= \langle \mathrm{sym}\left(F' + (\tau - a)(\mathfrak{g}) + \mathbb{C}(\Omega - c_a)\right) \rangle, \\ c_a &:= \frac{(n-1)(2a+n)(2a-n)}{4n} \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{2.4}$$

**注意 2.2.** (2.4) において $c_a$ を他の複素数に変えると、対応する両側イデアルは想定より大きくなり、$U(\mathfrak{g})$ か $U(\mathfrak{g})\mathfrak{g}$ になってしまう。

以上の定義の下で、$A$ 型の場合に Joseph イデアルの類似の両側イデアルは以下のように分類できる。

**定理 2.3.** $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ $(n > 2)$、$J$ を $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアルとする。この時、次は同値となる。

*(1)* ある $a \in \mathbb{C}$ に対して $J = J_a$ となる。
*(2)* $J$ が原始完全素イデアルで $\mathrm{AV}(J) = \overline{\mathcal{O}^{\min}}$ となる。
*(3)* $\mathrm{gr}(J)$ が $\overline{\mathcal{O}^{\min}}$ の定める $S(\mathfrak{g})$ のイデアル $\mathcal{I}(\overline{\mathcal{O}^{\min}})$ と一致する。

**注意 2.4.** 定理 2.3 の (1) と (3) の同値は [BJ98] でも異なる手法で示されている。

定理 2.3 の証明では、$J_a$ を零化イデアルに持つような最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群の分類（命題 2.5）が重要な役割を果たす。

$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の対角行列からなる Cartan 部分代数として、ルートの集合を $\{e_i - e_j \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$ と書き、正ルートの集合を $\{e_i - e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ とする。$\lambda \in \mathfrak{h}^\vee$ に対して $L(\lambda)$ を最高ウェイト $\lambda$ を持つ既約最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群として、$\lambda_i \in \mathbb{C}$ を $\lambda = \sum_i \lambda_i e_i$ で定義し、$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ と書く。$\sum_i \lambda_i = 0$ に注意する。

$1 \leq i \leq n$ と $a \in \mathbb{C}$ に対して $\mathbf{1}_i = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{i})$ を用いて $\lambda(i, a)$ を次のように定義する：

$$\lambda(i, a) := \left( \left( -\frac{a}{n} - \frac{1}{2} \right) \mathbf{1}_{i-1}, \frac{(n-1)a}{n} - \frac{(n+1-2i)}{2}, \left( -\frac{a}{n} + \frac{1}{2} \right) \mathbf{1}_{n-i} \right)$$

**命題 2.5.** $a \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathfrak{h}$ とする。この時、次は同値となる。

*(1)* $L(\lambda)$ の零化イデアルが $J_a$ である。
*(2)* ある $1 \leq i \leq n$ を用いて $\lambda = \lambda(i, a)$ と書け、優整ウェイトでない。

**注意 2.6.** $\lambda(i, a)$ が優整ウェイトになることは、$i = 1$ かつ $a \in \frac{n}{2} + \mathbb{N}$ であるか、$i = n$ かつ $a \in -\frac{n}{2} - \mathbb{N}$ であることと同値となる。

## 3 極小表現の類似の構成

定義 3.1 と定理 2.3 に基き、$A$ 型の実単純 Lie 群に対して極小表現の定義の類似を定義し、それを $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群のレベルで構成する。

$G$ を連結な実単純 Lie 環として、$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ $(n > 2)$ と仮定する。

**定義 3.1.** $a \in \mathbb{C}$ とする。

(1) 既約 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群が **$a$-極小**であるとは、零化イデアルが $J_a$ となることをいう。
(2) $G$ の既約認容表現が **$a$-極小表現**であるとは、$U(\mathfrak{k})$-有限ベクトルを取ることで得られる既約 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群が $a$-極小であることをいう。

**注意 3.2.** もし $a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群 $V$ が存在するならば、$\mathfrak{p}^\vee \cap \mathcal{O}^{\min}$ が空でないことが示せる。従って $\mathfrak{g}_0$ で $a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群を持ちうるのは $\mathfrak{su}(p, q)$ $(0 < p < n = p + q)$ と $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ に限る。

まず $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(p, q)$ $(0 < p < n = p + q)$ の場合を考える。この時は $\mathfrak{k}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{t}$ を対角行列からなる部分代数 $\mathfrak{h}$ として取れる。任意の $a \in \mathbb{C}$ に対して $\lambda(p, a), \lambda(p+1, a)$ は $\mathfrak{k}$-加群のウェイトとしては整ウェイトなので、$\mathfrak{g}$-加群 $L(\lambda(p, a)), L(\lambda(p+1, a))$ は共に $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群となる。

次の定理は命題 2.5 からすぐに従う。$\mathbb{N}$ に 0 を含めていることに注意する。

**定理 3.3.** $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(p, q)$ $(0 < p < n = p + q)$, $a \in \mathbb{C}$ とする。次の $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群は $a$-極小であ

り、その双対は $(-a)$-極小である。

$$L(\lambda(p,a)) \quad \begin{cases} a \in -(p-q)/2-\mathbb{N} & \textit{if } p>1, \\ a \notin n/2+\mathbb{N} & \textit{if } p=1, \end{cases}$$

$$L(\lambda(p+1,a)) \quad \begin{cases} a \in -(p-q)/2+\mathbb{N} & \textit{if } q>1, \\ a \notin -n/2-\mathbb{N} & \textit{if } q=1 \end{cases}$$

逆に、最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群 $L(\lambda)$ で $a$-極小 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-加群となるものはこれらに限られる。

**注意 3.4.** 上の表示は $\lambda(p,-(p-q)/2)=\lambda(p+1,-(p-q)/2)$ だけ被りがある。

次に $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ の場合を考える。$Q=MAN$ を $G$ の放物型部分群とその Langlands 分解とする。$\sigma$ を $M$ の有限次元既約表現、$\nu\in\mathfrak{a}^\vee$ とすると $Q$ の表現 $\sigma_\nu$ が $m\in M, X\in\mathfrak{a}, n\in N$ に対して $me^Xn\mapsto\sigma(m)e^{\nu(X)}$ で定まる（表現空間は $\sigma$ のそれとして取る）。放物型誘導表現

$$C^\infty(G,\sigma_\nu)^Q := \left\{\, f\in C^\infty(G,\sigma_\nu) \;\middle|\; f(gq)=\sigma_\nu(q^{-1})f(g) \quad \forall g\in G, q\in Q \,\right\}$$

を考える。ここでは $G$ が左移動により作用する。$\iota$ を $\mathfrak{g}$ 上で $-1$ 倍となる $U(\mathfrak{g})$ の反対合として、$I(d\sigma_\nu)$ を $\sigma_\nu$ の微分表現 $d\sigma_\nu$ の（$U(\mathfrak{q})$ での）零化イデアルに $\iota$ を当てたもので生成された $U(\mathfrak{g})$ の左イデアルとする：

$$I(d\sigma_\nu) := U(\mathfrak{g})\iota(\operatorname{Ann}_{U(\mathfrak{q})} d\sigma_\nu)$$

また $a\in\mathbb{C}$ に対して、$U(\mathfrak{g})/I(d\sigma_\nu)$ の $\mathfrak{q}$-部分加群 $W_a$ を次で定める：

$$W_a := \iota\circ\operatorname{sym}(F_a)+I(d\sigma_\nu)$$

すると次のような $G$-絡微分作用素が得られる：

$$D_a = D_a(Q,\sigma_\nu)\colon C^\infty(G,\sigma_\nu)^Q \to C^\infty(G, W_a^\vee\otimes\sigma_\nu)^Q$$
$$\left\langle D_af(g), \sum_i a_iX_iY_i \right\rangle := \left.\frac{d^2}{dt_1dt_2}\right|_{t_1=t_2=0} \sum_i a_if(ge^{t_1X_i}e^{t_2Y_i})$$

ただし $g\in G,\ \sum_i a_iX_iY_i\in\iota\circ\operatorname{sym}(F_a), a_i\in\mathbb{C}, X_i,Y_i\in\mathfrak{g}_0$ とした。$D_a$ が $G$ の作用と可換であることから、$\operatorname{Ker} D_a$ は $C^\infty(G,\sigma_\nu)^Q$ の部分表現となる。

**命題 3.5.** $a\in\mathbb{C}$ に対して $\operatorname{Ker} D_a$ の無限次元既約部分商は全て $a$-極小表現である。

従って $a$-極小表現を構成するには、$\operatorname{Ker} D_a$ が $0$ にならないような $(Q,\sigma_\nu)$ を上手く取ってくればよい。

まずは $G=\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ $(n>2)$ の場合を考える。$Q$ として分割 $(1,n-1)$ に対応する上三角行列からなる極大放物型部分群を取り、$\mathfrak{a}$ が対角行列からなる Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ となるように Langlands 分解を固定する。すると $M$ の有限次元既約表現は、自明表現 triv か $(1,1)$ 成分の符号をとる表現 sgn である。$\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n)$ を $k$ 次斉次多項式全体のなす $G$ の既約表現、$\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$ を $k$ 次斉次調和多項式全体のなす $K=\mathrm{SO}(n)$ の既約表現とする。

**定理 3.6.** $a \in \mathbb{C}$, $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ $(n > 2)$ として、$Q = MAN$ を上記のようにとる。$\sigma = \mathrm{triv}$ *(resp.* $\mathrm{sgn}$*)* の時、もし $a \in \mathbb{R}$ かつ $|a| \in \frac{n}{2} + 2\mathbb{N}$ *(resp.* $\frac{n}{2} + 2\mathbb{N} + 1$*)* ならば表現の *Grothendieck* 群の意味で

$$[C^\infty(G, \sigma_{-\lambda(1,-a)})^Q] = [\mathcal{P}^{|a|-\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)] + [a\text{-極小表現}]$$

と書ける。$a$ が上記の条件を満たさない場合は $C^\infty(G, \sigma_{-\lambda(1,-a)})^Q$ が $a$-極小表現となる。それぞれの場合の $a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群は $\mathfrak{k}$-加群として

$$\bigoplus_{k \in 2\mathbb{N} (\textit{resp.}\ 2\mathbb{N}+1),\ k > |a| - \frac{n}{2}} \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n), \qquad \bigoplus_{k \in 2\mathbb{N} (\textit{resp.}\ 2\mathbb{N}+1)} \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$$

と既約分解する。

次に $G = \widetilde{SL}(3, \mathbb{R})$ の場合を考える。この時、$a \in \mathbb{C}$ によっては線形群 $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ の表現とはならない（これを **genuine** という）$a$-極小表現が存在しうる。$\mathfrak{q}$ が上三角行列からなり、$\mathfrak{a}$ が対角行列からなる部分代数 $\mathfrak{h}$ となるように $G$ の Borel 部分群 $B = MAN$ をとる。$M$ は 8 つの元からなる非可換な群であり、ただ一つの 2 次元表現 $\sigma^0$ を持つ。2 次元の既約 $\mathfrak{k}$-加群 $\mathbb{C}^2$ の $k$ 次対称積を $S^k(\mathbb{C}^2)$ と書く。

**定理 3.7.** $a \in \mathbb{Z}$ ならば、$\mathrm{Ker}\, D_a(B, \sigma^0_{-\lambda(2,-a)})$ は $a$-極小表現であり、付随する $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群は $\mathfrak{k}$-加群として

$$\bigoplus_{k \geq 0} S^{2|a|+1+4k}(\mathbb{C}^2)$$

と分解する。

**注意 3.8.** 定理 3.7（より一般に、$G = \widetilde{\mathrm{SL}}(3, \mathbb{R})$ での様々な $(Q, \sigma_\nu)$ に対する $\mathrm{Ker}\, D_a(Q, \sigma_\nu)$）は Heisenberg 超双曲型方程式に関する研究 [KØ21] でも求められている。

以上の $a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群の構成（定理 3.3, 3.6, 3.7）をまとめると、表 3.1 のようになる。ただし下付きの $U(\mathfrak{k})$-fin は $U(\mathfrak{k})$-有限ベクトルの空間をとる操作をあらわす。これらの $a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群は注意 3.4 による同型を除けば、互いに同型でない。

## 4 極小表現の類似の分類

$n > 2$ とする。以下が本稿の主定理である。

**定理 4.1.** $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(p, q)$ $(0 < p < n = p + q)$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ として、$a \in \mathbb{C}$ とする。任意の $a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群は表 *3.1* のいずれかと同型である。

**注意 4.2.** 極小表現の場合とは異なり、$a$-極小表現はユニタリ化可能とは限らない。実際に $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(p, q)$ ならば、$a$-極小であるような $L(\lambda(i, a))$ がユニタリ化可能であることは、次のいずれかが成り立つことと同値である。

(1) $p = 1, i = 1$ かつ $a \in (-\infty, 2 - \frac{n}{2}] \cup \{\frac{n}{2} - i \mid 1 \leq i \leq n - 3\}$
(2) $q = 1, i = n$ かつ $a \in \{-\frac{n}{2} + i \mid 1 \leq i \leq n - 3\} \cup (-2 + \frac{n}{2}, \infty]$

表 3.1　$a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群の一覧

| $\mathfrak{g}_0$　$(n > 2)$ | $a$ | $a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群 |
|---|---|---|
| $\mathfrak{su}(1, n-1)$ | $\mathbb{C} \setminus (n/2 + \mathbb{N})$ | $L(\lambda(1, a))$ |
| | $(n-2)/2 + \mathbb{N}$ | $L(\lambda(2, a))$ |
| | $\mathbb{C} \setminus (-n/2 - \mathbb{N})$ | $L(\lambda(1, -a))^\vee$ |
| | $-(n-2)/2 - \mathbb{N}$ | $L(\lambda(2, -a))^\vee$ |
| $\mathfrak{su}(p, q)$ | $-(p-q)/2 - \mathbb{N}$ | $L(\lambda(p, a))$ |
| $(p, q \geq 2)$ | $-(p-q)/2 + \mathbb{N}$ | $L(\lambda(p+1, a))$ |
| | $(p-q)/2 + \mathbb{N}$ | $L(\lambda(p, -a))^\vee$ |
| | $(p-q)/2 - \mathbb{N}$ | $L(\lambda(p+1, -a))^\vee$ |
| $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ | $\pm(n/2 + 2\mathbb{N} + 1)$ | $[C^\infty(G, \sigma_{-\lambda(1,-a)})^Q_{U(\mathfrak{k})\text{-fin}}] - [\mathcal{P}^{\lvert a \rvert - n/2}(\mathbb{R}^n)]$ |
| $\sigma = \mathrm{triv}, \mathrm{sgn}$ | $\mathbb{C} \setminus \pm(n/2 + 2\mathbb{N} + 1)$ | $C^\infty(G, \sigma_{-\lambda(1,-a)})^Q_{U(\mathfrak{k})\text{-fin}}$ |
| $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ | $\mathbb{Z}$ | $\operatorname{Ker} D_a(B, \sigma^0_{-\lambda(2,-a)})_{U(\mathfrak{k})\text{-fin}}$ |

(3) $i \neq 1, n$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ $(n > 2)$ ならば、$a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群がユニタリ化可能であることは、$a \in \mathbb{C}$ が純虚数であることと同値である。

定理 4.1 の証明には次の命題を用いる。

**事実 4.3** ([GS05]). $V, V'$ が $a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群で $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(V, V') = 0$ とする。この時 $V \cong V'$ となる。また、$a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群は $\mathfrak{k}$-加群として重複度自由である。

従って一般の $a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群が、表 3.1 にあらわれる $a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群と同じ既約 $\mathfrak{k}$-部分加群を持つことを言えば良い。

分解 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ に対応する Cartan 対合を $\theta$ と書く。$\mathfrak{p}_0$ の $\mathfrak{t}_0$ と可換な元全体を $\mathfrak{a}_0$ と書く。$\mathfrak{a}_0$ は可換であり、$\mathfrak{h}_0 := \mathfrak{t}_0 + \mathfrak{a}_0$ は $\mathfrak{g}_0$ の $\theta$-安定な Cartan 部分代数となる。$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対する正ルートの集合を、$\theta$-安定となるようにとる。最高ルートを $\psi$ と書き、そのルート空間を $\mathfrak{g}_\psi$ と書く。

注意 3.2 より、$\mathfrak{p}^\vee \cap \mathcal{O}^{\min}$ が空でないと仮定して良い。この仮定の下で $\mathfrak{g}_\psi \subset \mathfrak{p}$ が従う。$\mathfrak{g}$-加群としての同型 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^\vee$ が誘導する同型 $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^\vee$ において、$\psi$ の定数倍に対応し、$\psi(H_\psi) = 2$ となる元 $H_\psi \in \mathfrak{t}$ が存在する。$\mathrm{ad}(H_\psi)$ の固有値 $j$ の固有空間を上付きの $j$ であらわすことにする。すると $\mathfrak{p}^{\pm 2} = \mathfrak{g}_{\pm\psi}$ と、分解

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= \qquad\quad \mathfrak{k}^{-1} + \mathfrak{k}^0 + \mathfrak{k}^1 \qquad\quad , \\ \mathfrak{p} &= \mathfrak{p}^{-2} + \mathfrak{p}^{-1} + \mathfrak{p}^0 + \mathfrak{p}^1 + \mathfrak{p}^2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

を得る。

$$\rho(\mathfrak{k}^1, \mathfrak{t}) := \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathrm{ad}(\cdot)|_{\mathfrak{k}^1}) \in \mathfrak{t}^\vee$$

とする。分解 (4.1) を用いて $F$ の元を具体的に構成でき、その作用を計算することで次の命題が得られる。

**命題 4.4.** $a \in \mathbb{C}$ で $V$ が $a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群で、$V^{\mathfrak{g}_\psi} = 0$ となるものとする。この時、$V$ の既約 $\mathfrak{k}$-部分表現の最高ウェイトは

$$-\rho(\mathfrak{k}^1, \mathfrak{t}) + ([\mathfrak{g}^0, \mathfrak{g}^0] \cap \mathfrak{t})^\perp$$

に属する。ここで $\perp$ は $\mathfrak{t}^\vee$ における直交補空間をあらわす。

**注意 4.5.** 無限次元の既約 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群 $V$ に対して $V^{\mathfrak{g}_\psi} = 0$ または $V^{\mathfrak{g}_{-\psi}} = 0$ が成り立つ。従って、必要ならば正ルートの集合を取り替えて $\psi$ と $-\psi$ を入れ替えることで、命題 4.4 の仮定を満たすようにできる。

$([\mathfrak{g}^0, \mathfrak{g}^0] \cap \mathfrak{t})^\perp$ は $\mathbb{C}\psi$ を含む。また $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(p, q)$ $(p, q \neq 0, p + q > 2)$ ならば 2 次元で、$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ $(n > 2)$ ならば 1 次元である。命題 4.4 の状況で $V^{\mathfrak{g}_\psi} \neq 0$ ならば $V$ は最高ウェイト加群で、$V^{\mathfrak{g}_{-\psi}} \neq 0$ ならば $V$ は最低ウェイト加群であることに注意すると、以下の系が得られる。

**系 4.6.** $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(p, q)$ $(p, q \neq 0, p + q > 2)$ ならば、$a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群は最高ウェイト加群であるか、最低ウェイト加群となる。

$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(p, q)$ $(p, q \neq 0, p + q > 2)$ ならば、定理 3.3 と系 4.6 から $a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群が表 3.1 にあるものの他に存在しないことが従う。

**系 4.7.** $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ $(n > 2)$ ならば、$a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群の既約 $\mathfrak{k}$-部分加群は、$n > 3$ ならば $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$ と書けて、$n = 3$ ならば $S^k(\mathbb{C}^2)$ と書ける $(k \in \mathbb{N})$。

**注意 4.8.** $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ の時のみ、最高ウェイトが $\psi$ の定数倍になるような既約 $\mathfrak{k}$-加群は $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n) \cong S^{2k}(\mathbb{C}^2)$ だけでは尽くせない。$k$ が奇数の時、$\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(3)$-加群 $S^k(\mathbb{C}^2)$ は $\widetilde{\mathrm{SL}}(3, \mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群 $\mathrm{SU}(2)$ の表現には持ち上がるが、$\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群 $\mathrm{SO}(3)$ の表現には落ちない。このような既約 $\mathfrak{k}$-加群を部分加群に持つ $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群は genuine である。

$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ $(n > 3)$ ならば、系 4.7 から $a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群は定理 3.6 のものと同じ既約 $\mathfrak{k}$-部分加群を持つことが分かる。従って命題 4.4 からこれらは同型である。

$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ であっても、genuine でない $a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群ならば系 4.7 と注意 4.8 から定理 3.6 のものと同じ既約 $\mathfrak{k}$-部分加群を持つことが分かる。従って命題 4.4 からこれらは同型である。

$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ の genuine な $a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群に対しては、Casseman の部分表現定理や命題 3.5 を用いて、さらに絡微分作用素 $D_a$ の核空間を具体的に計算することで次が示せる：

**補題 4.9.** 定理 *3.7* で構成した $\operatorname{Ker} D_a(B, \sigma^0_{-\lambda(2,-a)})$ $(a \in \mathbb{Z})$ 以外に *genuine* な $a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群は存在しない。

以上より $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ の場合にも $a$-極小 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-加群が表 3.1 にあるもので尽くされることが分かり、定理 4.1 が従う。

**注意 4.10.** 命題 4.4 は $A$ 型でない場合の極小表現にも適用できる。特に $\mathfrak{g}_0$ がエルミート型

の実形ならば極小表現は最高（もしくは最低）ウェイト表現であることが直接証明できる。また定理 4.1 の証明と同様にして、極小表現がこれまでに構成されたもので尽くされていることも示せる。この証明では [Tam19] での case-by-case の計算が不要となる。

## 謝辞

講演の機会を頂き有難うございました。本研究は日本学術振興会・特別研究員奨励費（課題番号：20J00024）の助成を受けたものです。

## 参考文献

[BJ98] A. Braverman and A. Joseph, *The minimal realization from deformation theory*, J. Algebra **205** (1998), 13–36.

[Gar82] D. Garfinkle, *A new construction of the Joseph ideal*, Phd. thesis, M.I.T., 1982.

[GS04] W. T. Gan and G. Savin, *Uniqueness of Joseph ideal*, Math. Res. Lett. **11** (2004), 589–597.

[GS05] ———, *On minimal representations definitions and properties*, Represent. Theory **9** (2005), 46–93.

[Jos76] A. Joseph, *The minimal orbit in a simple Lie algebra and its associated maximal ideal*, Ann. Sci. École. Norm. Sup. (4) **9** (1976), no. 1, 1–29.

[KØ03] T. Kobayashi and B. Ørsted, *Analysis on the minimal representation of* $\mathrm{O}(p,q)$*, I. Realization via conformal geometry*, Adv. Math. **180** (2003), 486–512.

[KØ21] T. Kubo and B. Ørsted, *Classification of $k$-type formulas for the Heisenberg ultrahyperbolic operator $\square_s$ for $\widetilde{SL}(3,\mathbb{R})$ and tridiagonal determinants for local Heun functions*, arXiv:2101.06810, 2021.

[Tam19] H. Tamori, *Classification of minimal representations of real simple Lie groups*, Math. Z. **292** (2019), no. 1-2, 387–402.

[Tam21] ———, *Classification of irreducible $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-modules associated to the ideals of minimal nilpotent orbits for simple Lie groups of type A*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2021), rnab356.

[Tor83] P. Torasso, *Quantification géométrique, opérateurs d'entrelacement et représentations unitaires de $\widetilde{SL}_3(\mathbb{R})$*, Acta Math. **150** (1983), no. 3-4, 153–242.

[Vog81] D. Vogan, *Singular unitary representations*, Noncommutative harmonic analysis and Lie groups, Lecture Notes in Math., vol. 880, Springer, 1981, pp. 506–535.