Van Aubel's theorem を題材にした数学探究教材の開発

-GeoGebra Classroom を用いた問題を発展的に考える授業の提案-

A Development of mathematical inquiry materials based on Van Aubel's theorem

-Proposal for a class to think developmentally about problems using GeoGebra.-

市川学園　市川中学校・市川高等学校　松本　昌也[*1]

Masaya MATSUMOTO, Ichikawa Gakuen Ichikawa Junior & Senior High School

東京理科大学 理学研究科 科学教育専攻　若尾　波月

Hazuki WAKAO, Tokyo University of Science, Graduate School of Science,Department of Matheaics and Science Education

東京理科大学 理学研究科 科学教育専攻　清水　克彦

Katsuhiko SHIMIZU, Tokyo University of Science, Graduate School of Science,Department of Matheaics and Science Education

ABSTRACT

For the teaching of figures in the Department of Mathematics at junior high schools, there is a need for teaching materials that enable students to experimentally investigate the properties of figures and to think about them in an advanced way using ICT. In this study, we developed a teaching material based on van Aubel's theorem. This teaching material is based on a heuristic activity in which students discover properties of figures inductively, and perform specializations and generalizations. In addition, the use of GeoGebra Cassroom is discussed, and suggestions are given regarding the ICT environment for heuristic teaching materials.

キーワード: GeoGebra・ヴァンオーベルの定理・実験数学・初等幾何・中学図形・合同

1　はじめに

中学校学習指導要領の数学科の目標の 1 つとして,「数学を活用して事象を論理的に考察する力，数量や図形などの性質を見いだし統合的・発展的に考察する力，数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う」[13, p.20] ことが挙げられている.

*1 masaya.matsumoto@ichigak-net.ed.jp

特に,「今回の改訂では，統合的・発展的に考えることを重視している. なお，発展的に考えるとは，数学を既成のものとみなしたり，固定的で確定的なものとみなしたりせず，新たな概念，原理・法則などを創造しようとすることである」と述べられており, 数学的活動を通して, 問題の発見とその解決を行い, さらに問題を発展させ, 新たな問題の発見を行う活動が求められている. この学習過程としては, 次のような図 1[13, p.23] が与えられている.

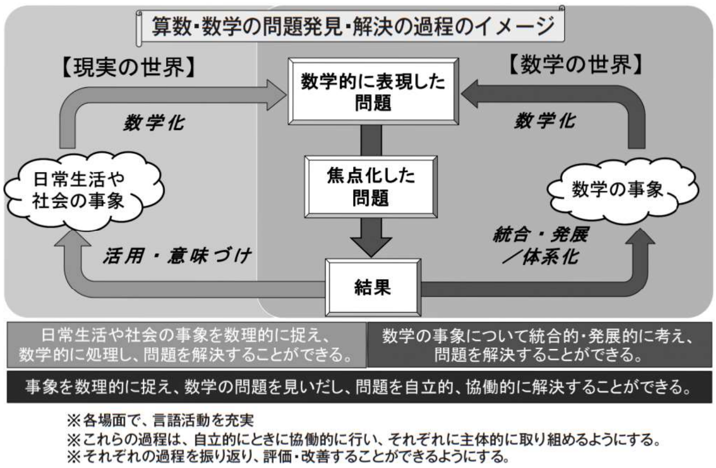


図 1　数学の学習過程

令和 3 年度全国学力調査中学校数学において. 図形の指導として「観察や操作実験などの活動を通して図形の性質を見いだすことや，発展的に考察することができるようにする」[14, p.66] と述べられている. また加藤 [21, p.295] は図形の教材開発の視点として「図形のもつ美しさや不思議さを感得させる教材を工夫することで, 図形の学習への意欲を高めることができる. 帰納的, 類推的に得た命題を演繹的に証明し, 定理を導き出すなどの活動が生まれる教材の開発や, ICT を生かした教材の開発がより一層望まれる」と指摘している. 以上を踏まえれば, 中学校数学科における図形の指導として, GeoGebra 等の DGS 機能備えた ICT を用いて, 図形がもつ性質を実験的に調べられ、発展的に考えられる探究教材が求められている.

以上を踏まえ, 本研究では,「Van Aubel's theorem を題材にした実験的かつ統合的・発展的な活動を行うための教材の開発」を目的としている. 本稿では, Van Aubel's theorem を題材として, GeoGebra を用いて発見される事例をもとに発展的な授業を検討する. また探究を行う際に, GeoGebra Classroom に関する検討を行い, 本教材を扱う際にテクノロジーに関して検討する. 以降 Van Aubel's theorem はヴァンオーベルの定理と表記する.

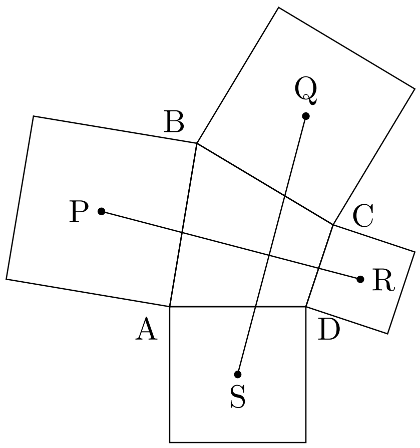
2　ヴァンオーベルの定理と教材開発の視点

2.1　ヴァンオーベルの定理とその証明

ヴァンオーベルの定理とは次の定理である.

ヴァンオーベルの定理

任意の四角形の 4 つの辺の外側に正方形を作る. このとき, 互いに向かい合う正方形の中心を結んだ 2 つの線分は長さが等しく, 直交する.



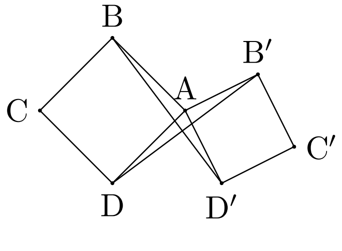
この定理は複素数を用いて示すことが可能である [17][19]. 一方で, 初等幾何的に示すこともでき, その証明には, 中学の教科書や問題集にも載っている 1 点を共有する正方形の性質とフィンスラー・ハドヴィガーの定理を用いることで示すことができる [6][17].

1 点を共有する正方形

点 A を通る正方形 ABCD と正方形 AB′C′D′ を考える. このとき,

$$\mathrm{BD'} = \mathrm{B'D} \text{ かつ } \mathrm{BD'} \perp \mathrm{B'D}$$

が成り立つ.



証明. $\mathrm{AB'} = \mathrm{AD'}$ かつ $\mathrm{AB} = \mathrm{AD}$ かつ, $\angle\mathrm{B'AD} = \angle\mathrm{D'AB}$ であるから, 二辺夾角相等より $\triangle\mathrm{ABD} = \triangle\mathrm{AD'B}$ が成り立つ. 従って, $\mathrm{BD'} = \mathrm{B'D}$.

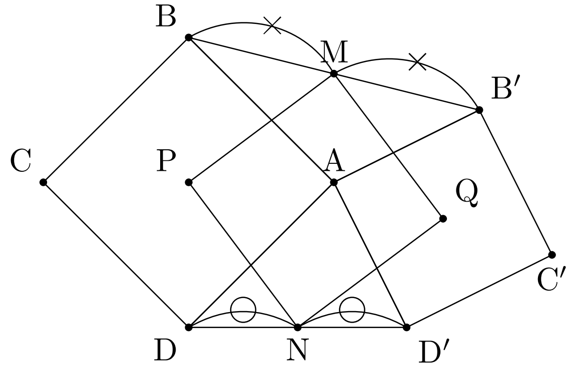
ここで, $\mathrm{B'D}$ と $\mathrm{BD'}$ の交点を F とする. 合同な図形の性質により, $\angle\mathrm{ABD'} = \angle\mathrm{ADB'}$. さらに対頂角は等しいことを用いれば, $\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{BFD} = 90°$. 従って, $\mathrm{BD'} \perp \mathrm{B'D}$.(垂直である証明は, $\triangle\mathrm{ABD}$ を点 A を中心に $90°$ 回転すると, $\triangle\mathrm{ABD}$ と $\triangle\mathrm{AD'B}$ は重なることからも示せる.)

$$\therefore \mathrm{BD'} = \mathrm{B'D}, \mathrm{BD'} \perp \mathrm{B'D}$$

□

フィンスラー・ハドヴィガーの定理

点 A を共有する 2 つの正方形 ABCD と $\mathrm{AB'C'D'}$ を考える. 線分 $\mathrm{BB'}$ の中点を M, 線分 $\mathrm{DD'}$ の中点を N とし, 正方形 ABCD と $\mathrm{AB'C'D'}$ の中心をそれぞれ P, Q とする. このとき, 四角形 PNQM は正方形である.



証明. $\triangle\mathrm{B'BD'}$ について, 中点連結定理より

$$\mathrm{MQ} = \frac{1}{2}\mathrm{BD'},\ \mathrm{MQ}/\!/\mathrm{BD'}$$

同様に, $\triangle\mathrm{BDD'}$ について, 中点連結定理より

$$\mathrm{PM} = \frac{1}{2}\mathrm{B'D},\ \mathrm{PM}/\!/\mathrm{B'D}$$

先の定理より, $\mathrm{BD'} = \mathrm{B'D}$ かつ $\mathrm{BD'} \perp \mathrm{B'D}$ が成り立つので

$$\mathrm{PM} = \mathrm{QM},\ \mathrm{PM} \perp \mathrm{QM}$$

全く同様に,

$$\mathrm{PN} = \mathrm{QN},\ \mathrm{PN} \perp \mathrm{QN}$$

以上より, 四角形 PNP$'$M は正方形である.

□

ヴァンオーベルの定理の証明. 対角線 BD を引き, 中点を M とする. また P,Q,R,S と M を結ぶ. ここで, $\triangle$ABD に着目すると, 辺 AB と AD に正方形が外接しているので, フィンスラー・ハドヴィガーの定理より,

$$\mathrm{PM} = \mathrm{SM} \text{ かつ } \mathrm{PM} \perp \mathrm{SM}$$

同様に,

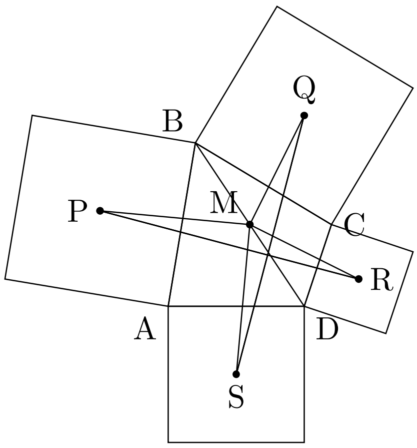
$$\mathrm{QM} = \mathrm{RM} \text{ かつ } \mathrm{QM} \perp \mathrm{RM}$$

よって,

$$\triangle\mathrm{MQS} \equiv \triangle\mathrm{MPR}$$

$\triangle$MQS は $\triangle$MPR を点 M を中心に反時計まわりに, 90° 回転した図形であるから,

$$\mathrm{PR} = \mathrm{SQ} \text{ かつ } \mathrm{PR} \perp \mathrm{SQ}$$



□

2.2　ヴァンオーベルの定理を題材にした教材の視点

ヴァンオーベルの定理は任意の四角形の辺に外接する正方形をつくるが, 見方を変えると, 4 つの正方形を 1 つの頂点を共有するように配置した図形の性質ともみることができ, その証明には, 1 点を共有する 2 つの正方形の性質を用いている. またどの性質も「等長かつ直交する 2 つの線分」に関する話題である. 以上を踏まえ, GeoGebra を用いて, 等長かつ直交する 2 つの線分を見つけようという投げかけをし, 2 つの正方形から, 3 つ, 4 つと正方形の数を増やしていき, ヴァンオーベルの定理に関して探究していくことを検討する.

3　ヴァンオーベルの定理を題材にした GeoGebra を用いて発見できる問題

3.1　原問題

「1 点を共有する 2 つの正方形を描いてみよう」と投げかける. その際, 次のような図 2 を描くことが想定される.

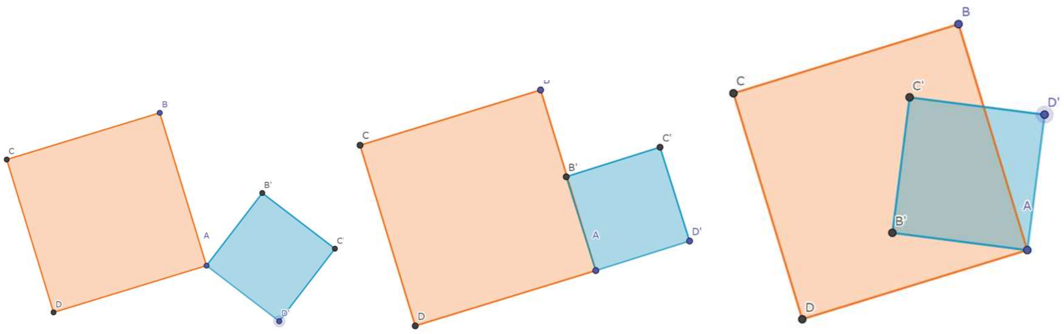


図 2　1 点を共有する正方形

ここで「長さが等しく直交している線分を見つけよう」と投げかける. ここで 1 つの正方形の辺同士以外であることは留意する. すると, 様々な線分を描くことが想定される. 図 1 において, 長さが等しく直交している線分は次の図 3 である. 実際に GeoGebra を用いてこの図を描き, 正方形の頂点を動かすことで, 様々な正方形において成り立つことが分かる.

以上の活動から, 次のような問題を考えることができる.

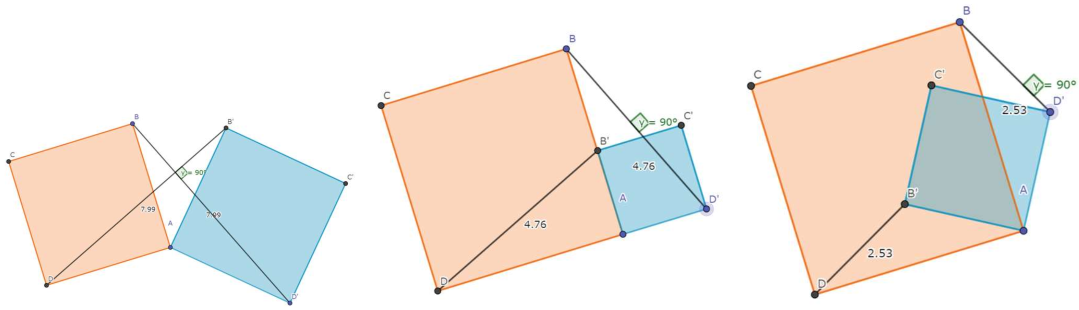


図 3　1 点を共有する正方形における等長かつ直交する線分

問題 1(原問題) 点 A を通る正方形 ABCD と正方形 AB'C'D' を考える. このとき,

$$\mathrm{BD}' = \mathrm{B}'\mathrm{D} \text{ かつ } \mathrm{BD}' \perp \mathrm{B}'\mathrm{D}$$

が成り立つ.

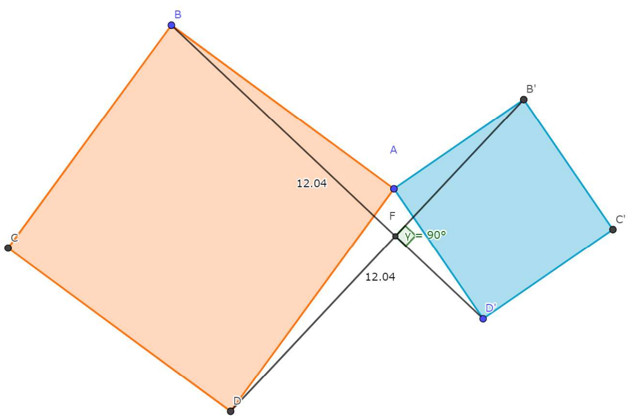


図 4　線分 BD' と B'D の関係

これは 2 章で証明した 1 点を共有する正方形の性質である. これを原問題として, 頂点を結ぶ線分を変えて問題を発展させてみる.

3.2　頂点以外の点を結ぶ線分を考えてみる

「長さが等しく直交している線分はほかにないか」と問いかける. ここで「正方形の頂点以外の点をとるならどんな点がいいかな」と発問する. このとき, 例えば,「正方形の辺の中点」、「対角線の中点（交点)」、「これまで考えてきた線分の中点」など中点に着目をさ

せることができる.GeoGebra の「中点または中心」や「2 点を結ぶ線分」を用いることで, 生徒は中点が描かれた 2 つの正方形をみて, 垂直な線分がないか「観察」、実際に線分を引いてみる「実験」、描かれた線分をみて垂直・等長かを「観察」する活動が行える.

図 5　2 つの正方形と中点・線分をとる

垂直である関係をまず強調する. 原問題で $\mathrm{BD}' \perp \mathrm{B}'\mathrm{D}$ であったことを利用し, BD' に平行な線分と $\mathrm{B}'\mathrm{D}$ に平行な線分は垂直関係になることを見出させる. このことを踏まえて, 線分 BB' と DD' の中点を M, N とし, 線分 OM と線分 NO' を引くと, 次の問題 2 に気づく.

問題 2

$$\mathrm{OM} = \mathrm{NO}' = \frac{1}{2}\mathrm{DB}' \text{ かつ } \mathrm{OM}//\mathrm{NO}'//\mathrm{DB}'$$

同様に, 線分 ON と MO’ を引くことで, 問題 3 に気づく.

問題 3

$$\mathrm{ON} = \mathrm{MO}' = \frac{1}{2}\mathrm{BD}' \text{ かつ } \mathrm{ON}//\mathrm{MO}'//\mathrm{BD}'$$

問題 2 と 3 は中点連結定理を用いることで, 示すことができる.

$\triangle \mathrm{BDB}'$ に着目する. 点 M, Q は線分 $\mathrm{BB}', \mathrm{BD}$ の中点より, 中点連結定理から

$$\mathrm{OM} = \frac{1}{2}\mathrm{DB}' \text{ かつ } \mathrm{OM}//\mathrm{NO}'//\mathrm{DB}'$$

が成り立つ. 問題 3 も同様である.

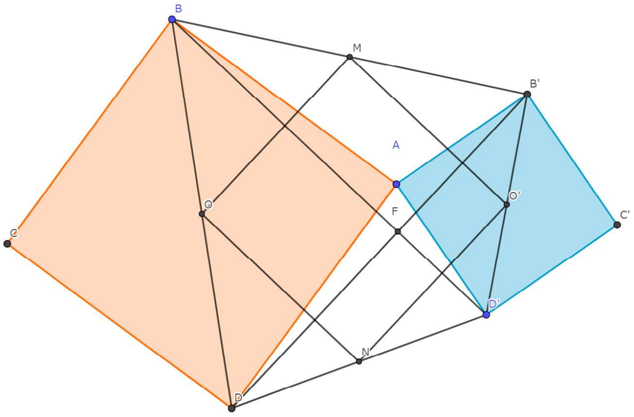


図 6　線分 $\mathrm{OM}, \mathrm{NO}', \mathrm{ON}, \mathrm{MO}'$

4 点 $\mathrm{O}, \mathrm{O}', \mathrm{M}, \mathrm{N}$ を結ぶと, 四角形 $\mathrm{ONO'M}$ ができ, 次の問題 4 を発見できる (図 7). また, この問題から問題 5 も気づける.

問題 4 四角形 $\mathrm{ONO'M}$ は正方形である.

問題 5 線分 OO' と MN には次の性質が成り立つ.

$$\mathrm{OO}' \perp \mathrm{MN} \text{ かつ } \mathrm{OO}' = \mathrm{MN}$$

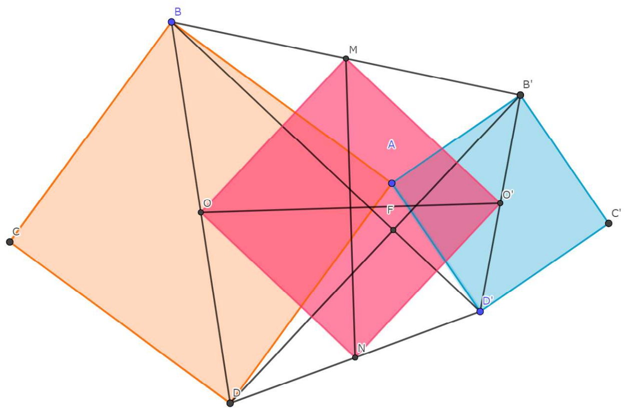


図 7　正方形 $\mathrm{ONO'M}$

3.3　正方形の数を変えてみる (3 つ)

3 つの正方形が, それぞれ 2 つずつの正方形の 1 つの頂点を共有している図を考える. このとき, 正方形の中心をそれぞれ $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2, \mathrm{O}_3$ として, これまでの活動同様に, 点を結び,「長さが等しく直交した線分を探す」活動を行う. 生徒は正方形の頂点や辺の中点をとり, 線分を引くという「観察・実験」を行う.

2 つの正方形の際に成り立った, フィンスラー・ハドヴィガーの定理を 3 つの際にも書き, このときに垂直だった 2 つの線分に着目をして考える. いきなり考えると難しい. そのため図 8 のように, 二等辺三角形の辺に正方形が外接しているとみて, 考えさせる. すなわち, 二つの正方形の辺の大きさが等しいと特殊化させ考えることで, O_1, O_2 と AO_3 が垂直関係であることが見出せる. また長さが等しいことも大きさを図る機能を用いることでわかる. このとき, 点 A を動かすことでこの二つの線分は等長かつ垂直であることが見出せる.

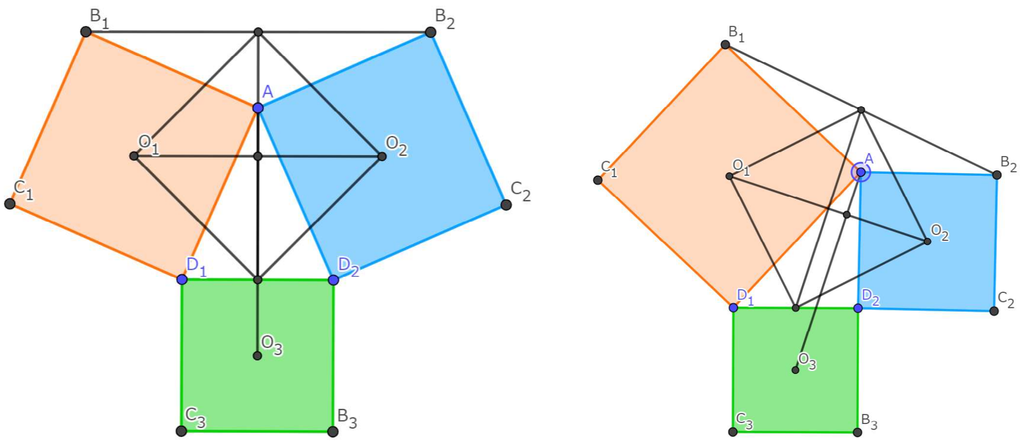


図 8　3 つの正方形に関して

余分な線を消すと図 9 のようになり, 問題 6 が発見できる.

問題 6

$$\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2 = \mathrm{AO}_3 \text{かつ} \ \mathrm{O}_1\mathrm{O}_2 \perp \mathrm{AO}_3$$

この証明はやや難しい. 問 1 で 2 つの図形が合同であり, 90° 回転することで, 重なる証

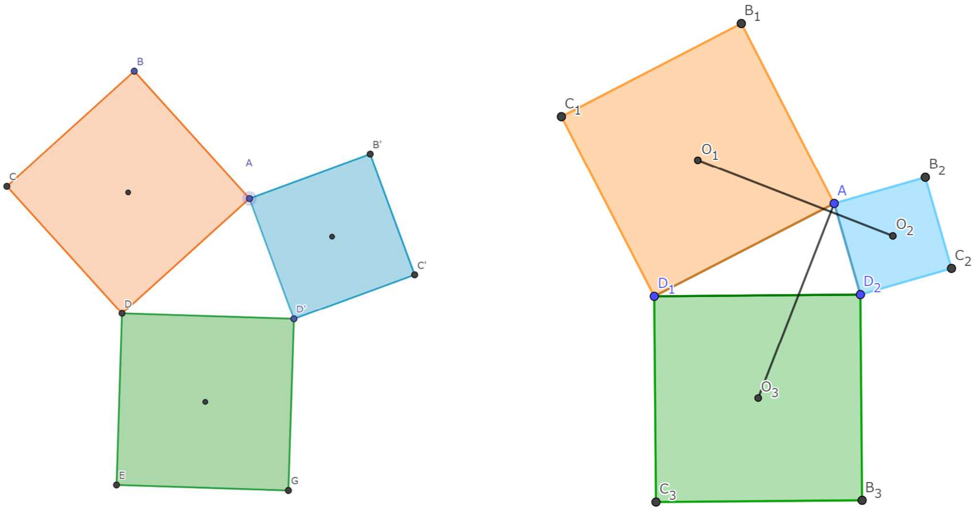


図 9　3 つの正方形に関して

明を行った. すなわち, 対応する点の垂直二等分線を引くことで, 回転の中心を発見することができる. 実際に,GeoGebra の垂直二等分線を引くと次の図 13 のようになる (赤の直線が点 A と $\mathrm{O_1}$,$\mathrm{O_2}$ と $\mathrm{O_3}$ を対応させたときの垂直二等分線であり, 青の直線が A と $\mathrm{O_2}$,$\mathrm{O_1}$ と $\mathrm{O_3}$ を対応させたときの垂直二等分線である).

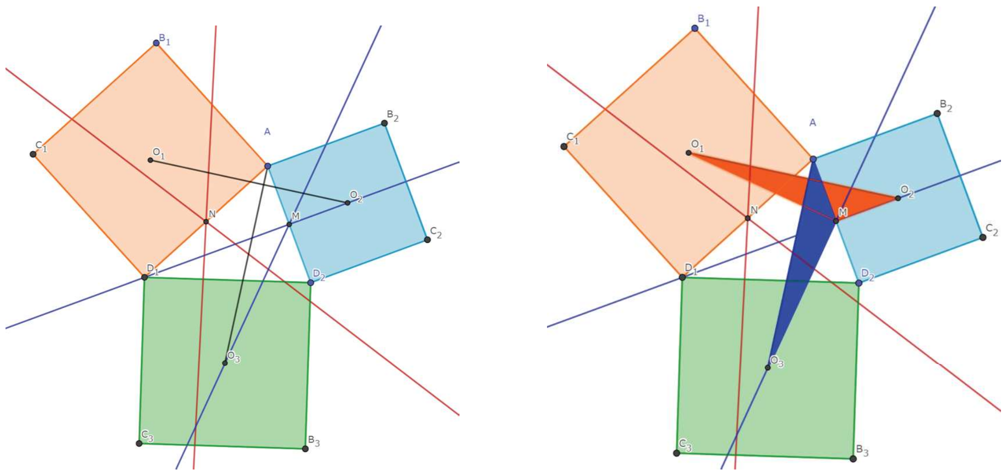


図 10　垂直二等分線を引く

　$\mathrm{O_1M} = \mathrm{O_3M}$ であることは問題 4 から示すことができる. よって合同であることがわかる.

　またこの図を発展し, 方形の中心同士を結び, 三角形を作り, 線分 $\mathrm{AO_3}, \mathrm{D_1O_2}, \mathrm{D_2O_1}$ を引くと, 一点で交わることが分かる (図 11).

問題 7 線分 $\mathrm{AO_3}, \mathrm{D_1O_2}, \mathrm{D_2O_1}$ を引くと,1 点で交わる.

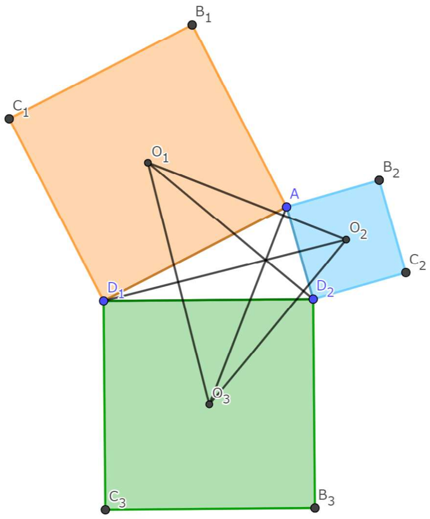


図 11　$\triangle \mathrm{O_1O_2O_3}$

これは問題 6 から, 交点は $\triangle \mathrm{O_1O_2O_3}$ の垂心であることがわかる.

3.4　正方形の数を変えてみる (4 つ)

正方形を 4 つに変え, 中心を $\mathrm{P, Q, R, S}$ とする. これまでと同じように, 点を結ぶ活動を通して, ヴァンオーベルの定理を発見する. 正方形が 3 つだったときと同じように, 今度は四角形に外接していると考え, その四角形を正方形や長方形など特殊な例に対して, 同様に検討をする. これを行うことによって, ヴァンオーベルの定理の発見を行うことができる.(図 12).

問題 8 任意の四角形の 4 つの辺の外側に正方形を作る. このとき, 互いに向かい合う正方形の中心を結んだ 2 つの線分は長さが等しく, 直交する. すなわち

$$\mathrm{PR} = \mathrm{QS} \text{ かつ } \mathrm{PR} \perp \mathrm{QS}$$

正方形が 3 つのときと 4 つのときの関係に関して.1 つの正方形の辺の長さを限りなく

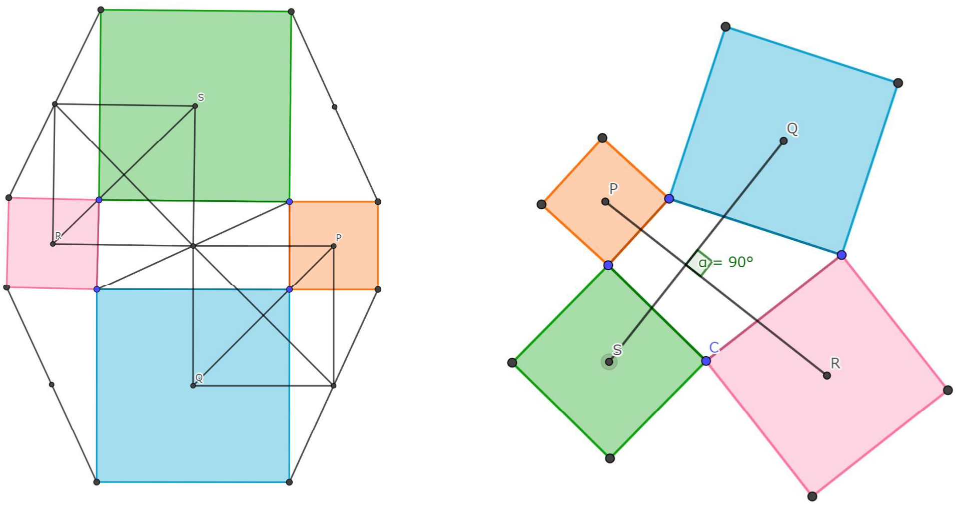


図 12　Van Aubel' theorem

小さくし, 点にすることで, 問題 6 と 8 の関係も GeoGebra からわかり, 問題 6 は正方形が 3 つのときのヴァンオーベルの定理であったことがわかる.

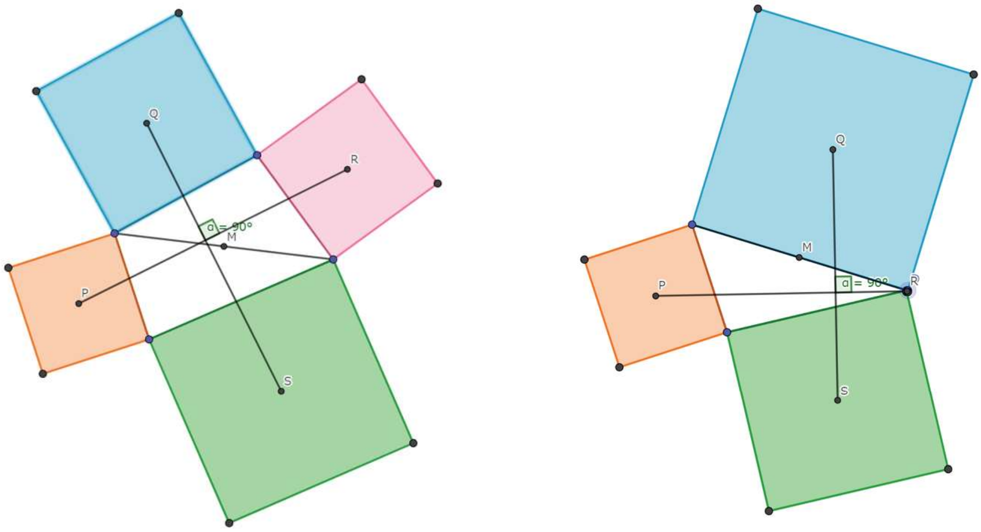


図 13　R を中心にもつ四角形を点に退化させた

また 4 つの正方形に関する問題では, 図 12 のように特殊化させた場合に, 異なる等長かつ垂直関係になる 2 つの線分を見つけることもできる. 具体的には, 外接される四角形が平行四辺形の場合である. 四角形 ABCD を特殊な形として, 正方形・長方形・ひし形・平行四辺形を扱い, 成り立つ性質と成り立たない性質に着目していくことで, 向かい合う中心を結んだ線分 PR と SQ は常に一定になっていること」, 四角形 PQRS が正方形になる

ときは, 四角形 ABCD が平行四辺形のとき」ということを見出すことができ, 特殊化や一般化など数学的な考え方を育成できると考える. 問題としては次のようにかける.

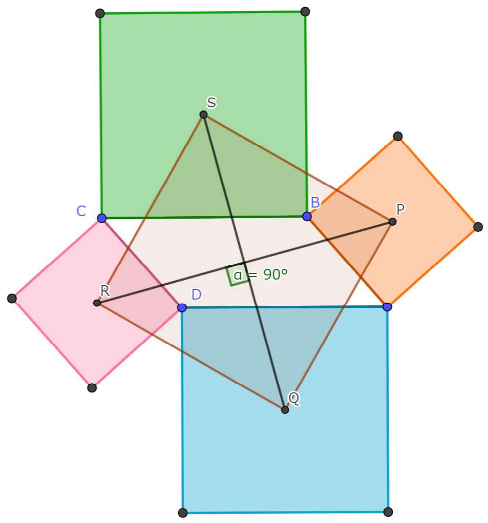


図 14　四角形 PQRS が正方形になる場合

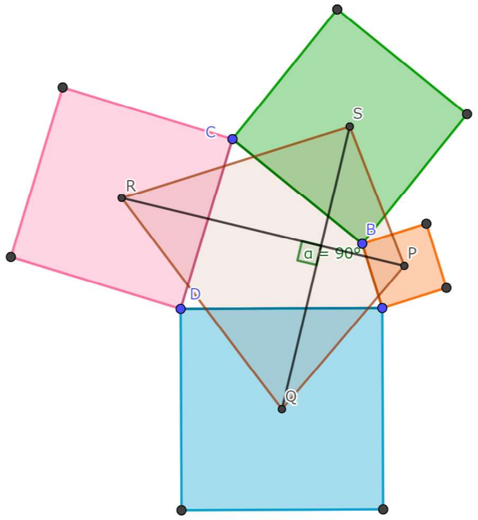


図 15　四角形 PQRS が正方形にならない場合

> **問題 9** 平行四辺形の 4 つの辺の外側に正方形を作る. このとき, 隣り合う正方形の中心を結んだ四角形 PQRS は正方形である.

3.5　1 点を共有する正方形の他に成り立つ性質の例

問題 1 の図において, CC' を結ぶと,BD' と $B'D$ の交点 F を通り, また $\angle B'FD'$ を 2 等分することが, 実験からわかる (図 16). すなわち問題 2 が発見できる.

> **問題 10** 線分 BD' と $B'D$ と CC' は一点 F で交わり,CC' は $\angle B'FD'$ を二等分する.

この問題 2 は, 線分 BD, BD' を直径とする円周上に点 F が存在することが, 円周角の定理からわかり, また弦 $D'C' = C'B'$ であるから, $\angle D'FC' = B'FC'$ であることが分かる. 同様に, $\angle DFC = BFC$.

さらに, 点 A と F を結ぶことで, 次の問題 11 を発見できる.

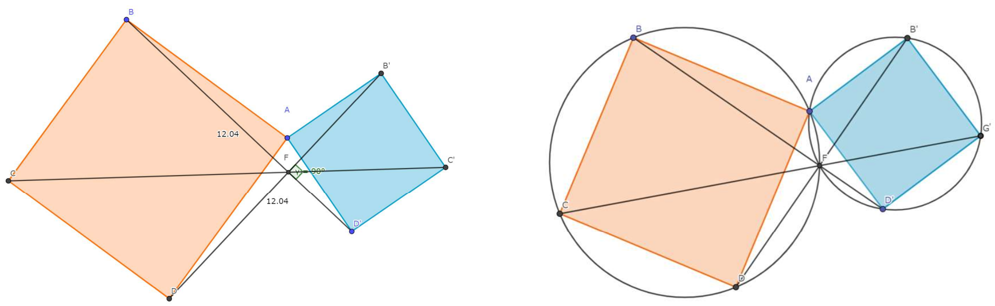


図 16　線分 BD’ と B’D と CC’ の関係

問題 11 線分 AF と線分 $\mathrm{CC'}$ は垂直に交わる.

問題 11 は四角形 $\mathrm{AFC'B'}$ が円に内接していることから直ちにわかる.

2 つの正方形の中心を $\mathrm{O}, \mathrm{O'}$ とおくと, 線分 $\mathrm{OO'}$ は線分 $\mathrm{CC'}$ と平行または線分が重なることが発見でき, それぞれの大きさを調べると, ちょうど半分になっていることがわかる (図 17). よって次の問題 12 を発見できる.

問題 12 線分 $\mathrm{OO'}$ と CC’ には次の関係が成り立つ.

$$\mathrm{OO'} \mathbin{/\!/} \mathrm{CC'} \text{ かつ } \mathrm{OO'} = \frac{1}{2}\mathrm{CC'}$$

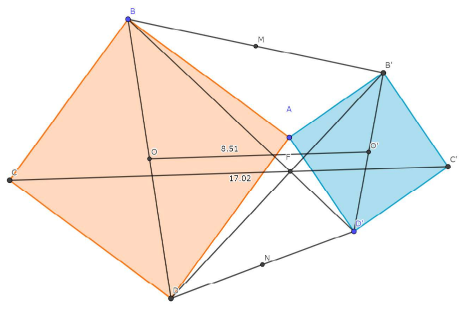


図 17　線分 OO’ と CC’ の関係

これは, $\triangle \mathrm{ACC'}$ において, 中点連結定理より示せる.

正方形の 2 辺を辺としてもつ三角形を 4 つ描き, 正方形の 2 辺とは異なる辺の中点を図 18 のように,$\mathrm{K}, \mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N}$ として, 線分 KM と NL を結ぶと, 線分 PR と QS の交点で交

わる.

問題 13 線分 KM と NL を結ぶと, 線分 PR と QS の交点で交わる.

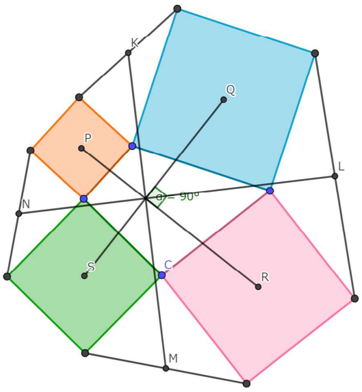


図 18

4　考察と GeoGebra を利用

4.1　本教材の考察

本教材は,「点を取る」,「2 点を通る線分・直線を引く」という操作を行いながら, 実験・観察をすることで図形の性質を発見・証明する活動が行える教材であるため,「操作的練習を取り入れた実験数学教材の 1 つ」であると考える. 操作的練習とは, 問題に対して同様な操作を繰り返して用い, 探求していく中で, 子ども達がお互いに議論し, 対象についての理解を深める. その際, どのような関係があるのか認識する能力や推測する能力・証明する能力を向上させることを目指す活動を指す [23]. また実験数学とは, 数学的対象に対して, 帰納的にデータを集め, 観測することで規則性を推測し, さらにその推測が一般に成り立つのかを（必要に応じてテクノロジーを用いて）さらなる具体例をもとに検討する活動を指す [3]. 松本・清水は実験数学活動の理論的枠組みとして図 19 を指摘している.

この教材では「等長と垂直である 2 線分を発見する」という問題に対して, 図を GeoGebra 上で書き, 発見をしていった. フィンスラー・ハドヴィガーの定理の発見 (問題 2, 3, 4, 5) ではすでに発見した垂直かつ等長な線分を利用し, 2 つの線分をそれぞれ平行移動しても垂直関係は変わらないことを見出し発見をさせた. また正方形を 3 つ,4 つと

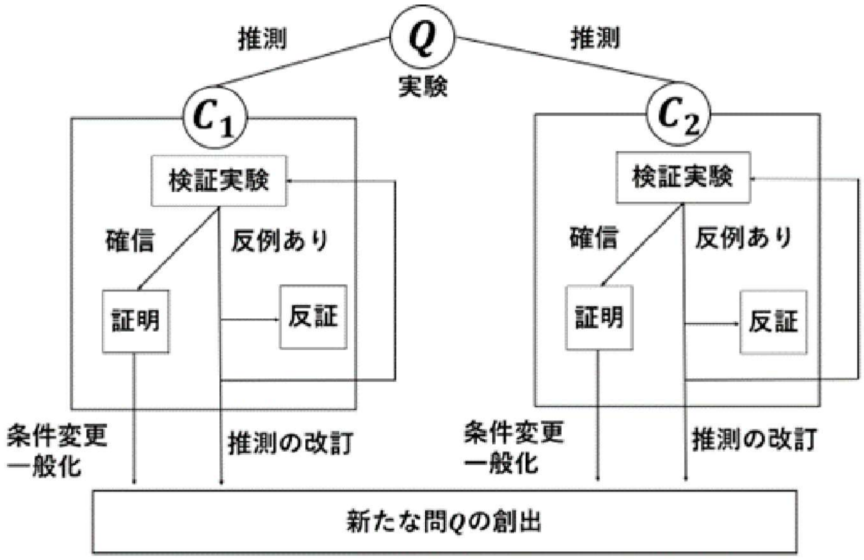


図 19　実験数学活動の理論的枠組み

拡張していった際には特殊化された状態で性質を発見し, 一般化する活動を取り入れた. ただ拡張をすることだけでなく, 帰納的な態度をとりこれまで成り立ってきた性質を利用することや特殊な形から一般化する発見的な教材であると考える. これは図 19 において, GeoGebra 上で点を結び, 実験・検証実験を行い, 予想から証明や反証を行っており, さらに四角形の個数を増やしたり, 点を結ぶ箇所を変えるという条件変更を行い, 新たな問題を創出している点で松本・清水があげる実験数学教材であると考えられる.

本教材で扱った数学的内容は.「三角形の合同」・「中点連結定理」・「円周角の定理」が中心である. 中学 2,3 年生の図形の授業で扱うことが可能な教材である. また等長と直角という性質を保ったまま, 問題を発展的に考え, 最後には統合的に考えることができる教材である. 中学 2, 3 年生の数学科における「深い学び」につながる教材になると考える. さらに 4 つのヴァンオーベルの定理を GeoGebra を用いることで,3 つに減った場合などの図形の特殊な例（退化）に関しても学ぶことができる教材であると考える. 実際にヴァンオーベルの定理の特殊な例を [11] があげている.

4.2　GeoGebra Classroom を用いた発展的な授業への示唆

本教材は GeoGebra を用いることを前提としている. その際に GeoGebra を教材としてどのように利用するのかについて述べる.

GeoGebra とは動的幾何ソフト (Dynamic Geometry Software, DGS) と数式ソフトウエア (Computer Algebra System,CAS) ならびにスプレッドシートなど統計や解析など

の統合的な数学ソフトウエアである. 関数のグラフや 2 次元・3 次元の図形の考察ができたり, 方程式を解くこと・積分計算など行える. またこれらは単独の機能として使うだけでなく, DGS と CAS を組み合わせて利用することもできる.

このような数学ソフトウエアを用いることは, 作図手順の制約を保持したまま図の変形を行え, 条件や手順にもとづいた様々な数学的事実を生成することがため, 数学ソフトウエアは「実験」の道具としては非常に強力なツールである [5]. また GeoGebra を用いた活動においては,GeoGebra を用いて行った課題を別のソフトウエアを用いてまとめたりすることは, 生徒の活動の難易度を上げる [9] ことが指摘されている. 本教材のように,GeoGebra を用いて, 発展的に考える授業において, 懸念点としては次のようなものが考えられる.

- 学習者が検討する数学的題材を GeoGebra 上に 1 から作図・数式コマンドを入力することは, 負荷がかかり集中・注意を欠く可能性が高い
- 毎回問題を発展させる際に, 授業者が GeoGebra ファイルをダウンロードし, 保存する操作も時間がかかる
- 発見した性質を他の媒体やソフトウェアにまとめる活動は学習者の難易度をあげる
- 個別活動中の生徒の様子を可視化しづらい

そこで,GeoGebra Classroom を用いて, GeoGebra ブックのファイルを共有することの検討を行う.

GeoGebra Classroom とは, 学習者にクラスコードを知らせることで, GeoGebra ワークシートやブックを共有することができ, 1 つのクラスを作成することができる学習環境のことで, クラスに入っている学習者の作業をまとめて確認することができる.GeoGebra Classroom でできることに関して次のように挙げられている [25].

- 学生にインタラクティブな課題を割り当てられること
- 課題に取り組んでいる生徒の進捗を表示すること
- 生徒の開始した（または会誌していない）課題を表示すること
- クラス全体に質問を行い、すべての学生の解答を確認すること
- 生徒の解答を表示するとき、生徒の名前を隠すこと
- 教員を複数追加しチームティーチングできること
- すべての生徒や, 生徒のグループ, 生徒間でのインタラクティブな対話を促進すること

これらを踏まえると GeoGebra Classroom を用いる利点として, 1 つが複数のファイル

を GeoGebra ブックとして作成することで, 複数のファイルを一度に共有することである. これまでは QR コードや ggb ファイルをダウンロードすることで可能であったがその手間がなくなる. また学習者の活動がリアルタイムで把握することが可能であるため, 評価や分析を行うことができる. さらにプロジェクターなどで投影することで, クラス全体に GeoGebra を動かしながら発表することも可能となる. 他には, Geogebra ブックをいつでも開くことができる環境を整備することで, 授業外の例えば復習などで利用しやすくなると考える. このように GeoGebra Classroom を用いた実践は少ないものの, 多くの可能性を秘めていると考えられる.

本教材も正方形の個数を増やしていった GeoGebra ファイルを事前に用意をして, GeoGebra ブックとして共有することで, 学習者は線分を発見することから活動が可能となる.GeoGebra Classroom を用いることで, 学習者が探究する内容に入る前の準備の時間を削減することが可能になると考えられる.

5　まとめ・今後の課題

実験を取り入れた統合的・発展的に考える教材の一例として Van Aubel’s theorem を題材にした教材の検討を行った. 本稿では, GeoGebra を用いて発見できる数学的内容の例示にとどまっているが, この教材は中学数学の中で, 多様な発展のさせ方を見出すことができる教材であると考えられる. 多様な発見ができるため, 複数の授業展開も考えることができる. 今後の課題として, 本稿では見つけられる事例の例示にとどまっているため, 授業設計・教材の改善を行い, 実践を行う予定である. 発見される内容や発言の分析を行い, 教材の見直しを行う. それを踏まえ, 探究という観点からみたときの教育的価値を見出すことを行う予定である.

GeoGebra Classroom に関しては, GIGA スクール構想により 1 人 1 台端末の時代における数学教育において, 有効なツールの 1 つであると考える. 本稿では利用される場面の案でとどまっているため, 実際に利用することで, 多くの知見の蓄積を行っていきたい.

謝辞

本研究は科学研究費補助金基盤研究（C）21K02931 の助成を受けた.

参考文献

[1] 松本昌也. 清水克彦 (2021a). 高等学校理数探究基礎における実験数学を用いた授業モデルの提案と授業実践-RLA と SRP に基づいた探究モデルによる創造性の育成を目指して-. 日本数学教育学会第 54 回秋期研究大会発表集録, pp.177-180.

[2] 松本昌也. 清水克彦 (2021b). Google Colaboratory を用いた実験数学教材の開発-Python で完全数・メルセンヌ数を探究する-. 数理解析研究所講究録 2208 巻, 数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究, pp.20-30.

[3] 松本昌也. 清水克彦 (2021c). 数学教育における実験数学を用いた問題発見型授業の設計. 日本科学教育学会研究会研究報告, 36, 2, pp.157-162.

[4] 清水克彦 (2010). 実験数学による創造性の育成についての検討-テクノロジーによる帰納 ・類比そして推測の導入-. 日本科学教育学会年会論文集, 34, pp.97-98.

[5] 清水克彦 (2013). 数学教育における「実験」の機能とコンピュータの活用. 日本科学教育学会年会論文集, 37, pp.92-95.

[6] C.Alsina.,& R.B.Neisen(2010). *Charming Proofs. -A Journey into Elegant Mathematics-* The Mathematical Association of America.

[7] J.R.Silvester(2006). *Extensions of a theorem of van aubel.* The Mathematical Gazette, Vol90, pp.2-12.

[8] M.D.Villiers(1998). *Dual generalisations of van aubel's theorem.* The Mathematical Gazette, Vol82, pp.404-412.

[9] Robert Weinhandl, Zsolt Lavicza, Markus Hohenwarter, Stefanie Schallert(2020). *Enhancing Flipped Mathematics Education by Utilising GeoGebra.* International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology (IJEMST), 8(1), pp.1-15.

[10] Dadang Juandi , Yaya S. Kusumah , Maximus Tamur , Krisna S. Perbowo , Tommy Tanu Wijaya(2021). *A meta-analysis of Geogebra software decade of assisted mathematicslearning: what to learn and where to go?* Heliyon, 7(5), pp.1-8.

[11] V.Oxman.,& M.Stupel(2015). *Elegant special cases of van aublel's theorem* The Mathematical Gazette, Vol99, pp.256-262

[12] 文部科学省 (1992). 高等学校数学指導資料指導計画の作成と学習指導の工夫. 実教出版.

[13] 文部科学省 (2017). 中学校学習指導要領解説 数学編 理数編. 実教出版.

[14] 国立教育政策所 (2021). 令和 3 年度全国学力・学習状況調査報告書中学校数学. https://www.nier.go.jp/21chousakekkahoukoku/report/middle_math.html2022 年 11 月 23 日確認
[15] 山本芳彦 (2000). 実験数学入門. 岩波書店.
[16] 小池正夫 (2010). 実験・発見・数学体験. 数学書房.
[17] 西山豊 (2009). 美しい Van Aubel の定理. http://yutaka-nishiyama.sakura.ne.jp/math2010j/aubel_j.pdf2022 年 11 月 23 日確認
[18] 細矢治夫 (2021). 四角形の七不思議 いちばん身近な図形の深遠な世界. ブルーバックス.
[19] 中村義作 (2003). パズルでひらめく補助線の幾何学. ブルーバックス.
[20] ブラウン. ワルター (1990). いかにして問題をつくるか-問題設定の技術-. 東洋館出版社.
[21] 加藤幸太 (2022). 第 104 回全国算数・数学教育研究（島根）大会基調発表　中学校部会　3　図形　日本数学教育学会第 104 回大会発表要旨集 (島根大会), pp204-206
[22] 飯島康之 (2021). ICT で変わる数学的探究. 明治図書.
[23] 米田重和 (2013). 「二等辺三角形探し」を例にした「操作的練習に関する研究」. 日本数学教育学会誌, 95(3), pp.17-24.
[24] 竹内芳男・沢田利夫 (1982). 問題から問題へ—問題の発展的な扱いによる算数・数学科の授業改善—. 東洋館出版.
[25] GeoGebra Team. https://www.geogebra.org/m/hncrgruu 2022 年 11 月 23 日確認